

Экзаменационные вопросы по курсу  
“Математическая статистика”  
лектор – М.В. Болдин  
осенний семестр 2018 г.

1. Теорема Гливенко – Кантелли о сходимости эмпирической функции распределения.
2. Метод подстановки на примерах эмпирических моментов и квантилей.
3. Постановка задачи параметрического оценивания в одномерном случае: статистики, оценки, с.к. риски, несмещенные оценки, с.к. оптимальные оценки.
4. Неравенство Рао – Крамера и эффективные (оптимальные в  $C_R$ ) оценки.
5. Экспоненциальное семейство, примеры. Теоремы о достаточных и необходимых условиях равенства в неравенстве Рао – Крамера. Примеры эффективных и неэффективных оценок.
6. Задача параметрического оценивания в многомерном случае – с.к. оптимальные (несмещенные с равномерно минимальной ковариационной матрицей) оценки. Неравенство Рао – Крамера в многомерном случае (без док.-ва), эффективные оценки.
7. Условное математическое ожидание (у.м.о.) случайной величины относительно дискретной сигма-алгебры – мотивация и лемма об эквивалентном определении.
8. Определение у.м.о. случайных величин и векторов относительно произвольных сигма-алгебр, теорема существования и единственности.
9. Основные свойства у.м.о. (с доказательствами).
10. Задача оптимального с.к. прогноза в авторегрессии.

11. У.м.о. случайного вектора  $\xi$  относительно вектора  $\eta$ , условная вероятность. Условное распределение и условная плотность  $\xi$  относительно вектора  $\eta$ .
12. Теорема о вычислении условной плотности и у.м.о. через условную плотность. Примеры.
13. Достаточные статистики: определение, критерий факторизации (док-во для дискретного и абсолютно непрерывного случаев), примеры.
14. Теорема Блекуэлла-Рао-Колмогорова об улучшении несмещенной оценки усреднением по достаточной статистике.
15. Полные статистики. Лемма Лемана – Шефаре. Примеры построения с.к. оптимальных оценок для выборок из  $Pois(\theta)$ ,  $R(0, \theta)$ .
16. Многомерный гауссовский закон –определение и основные свойства (с док-ом).
17. Распределение хи-квадрат Пирсона. Лемма об ортогональных проекциях.
18. Линейная гауссовская модель: полные достаточные статистики в ней, оценки наименьших квадратов неизвестных параметров, теорема об их распределении и с.к. оптимальности.
19. Гауссовская выборка и однофакторная линейная модель – примеры гауссовской линейной модели.
20. Распределение Стьюдента. Доверительное оценивание параметров гауссовской выборки и параметров гауссовской линейной регрессии.
21. Состоятельные и асимптотически нормальные оценки. Теорема Бахадура (без док-ва) и асимптотически эффективные оценки.
22. Теорема об экстремальном свойстве правдоподобия как мотивация к построению оценок максимального правдоподобия.
23. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия.
24. Теорема об асимптотической эффективности состоятельного решения уравнения правдоподобия.
25. Оценки максимального правдоподобия в многомерном случае.
26. Задача проверки параметрических гипотез – основные определения: критерий, уровень значимости, ошибки 1-го и 2-го рода, мощность, равномерно наиболее мощные и наиболее мощные критерии.
27. Лемма Неймана – Пирсона. Оптимальная проверка гипотезы о среднем гауссовской выборки как пример ее применения.
28. Теорема о двойственности задач доверительного оценивания и проверки гипотез.

29. Распределение Фишера. Доверительный эллипсоид для параметра  $\beta = As$  гауссовской линейной регрессии. Критерий Фишера для линейной гипотезы  $H_0 : \beta = \beta_0$ .

30. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона для гипотезы о параметрах полиномиального распределения: определение, поведение статистики Пирсона при альтернативах и теорема Пирсона. Пример применения – проверка гипотезы о виде функции распределения.

31. Проверка однородности двух выборок с помощью теста Колмогорова – Смирнова (это 1-ая лекция!).

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. А.А. Боровков. Математическая статистика, 4-ое изд., Лань, Спб., 2010.

2. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Математическая статистика, Высшая школа, 1984.

3. А.Н. Ширяев. Вероятность-1, 5-ое изд. МЦНМО, М., 2011.