Список вопросов к экзамену по курсу
«Теория случайных процессов»
(мехмат МГУ, 3 курс, эконом. поток, осенний семестр 2017 г.)
Лектор — А.Д. Манита[1].

Внимание

Убедитесь, что Вы скачали самую свежую версию этого файла со страницы кафедры теории вероятностей[2]. Достоверноcь списка вопросов, полученного из других мест, не гарантирована. Версия от 27 декабря 2017 г.

Общие понятия. Некоторые классы случайных процессов. (Лекции + [1, 2, 6, 5, 9])

1. Понятие случайного процесса. Траектории. Функция среднего и ковариационная функция. Конечномерные распределения процесса. Простейшие примеры случайных процессов: случайное блуждание, модель капитала страховой компании.

2. Процессы с независимыми приращениями. Случайное блуждание как процесс с независимыми приращениями. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна как пример, не являющийся процессом с независимыми приращениями.

3. Два определения пуассоновского процесса без доказательства их эквивалентности: 1) как процесс с независимыми приращениями, 2) в духе процессов восстановления.

4. Распределение случайной величины как вероятностная мера на пространстве значений. Семейство конечномерных распределений (КМР) случайного процесса. КМР случайных процессов с дискретным множеством значений. Случай абсолютно непрерывных КМР.

5. Утверждение о виде КМР процессов с независимыми приращениями и дискретным множеством значений.

6. Определение винеровского процесса. Его траектории. Автомодельность. Среднее и ковариационная функция винеровского процесса. Конечномерные распределения винеровского процесса, вид их плотностей.

7. Квадратично интегрируемые случайные величины и квадратично интегрируемые случайные процессы. Среднее и ковариационная функция процессов с независимыми приращениями. Примеры: случайное блуждание, пуассоновский процесс.

8. Понятие процесса стационарного в узком смысле. Примеры стационарных и нестационарных в узком смысле процессов.

9. Понятие процесса стационарного в широком смысле. Утверждение о том, что (квадратично интегрируемый) стационарный в узком смысле процесс является стационарным в широком смысле. Пример процесса, стационарного в широком смысле, но не стационарного в узком смысле.

Измеримость относительно под-σ-алгебр. (Лекции + [3])

10. Под-σ-алгебры основной σ-алгебры событий $\mathcal{F}$. Наименьшие σ-алгебры, содержащие заданный набор событий. Их существование. σ-алгебры, порожденные конечным или счетным раздиением мн-ва элементарных исходов.

[1]Email: `manita@mech.math.msu.su`
[2]Вкладка «Преподавание» на `http://new.math.msu.su/department/probab/`

11. σ-алгебра, порожденная одной случайной величиной. Частный случай дискретной случайной величины. σ-алгебра, порожденная набором случайных величин. Понятие потока σ-алгебр. Естественная фильтрация, порождаемая случайным процессом.

12. Понятие случайной величины, измеримой относительно под-σ-алгебры. Утверждение о виде случайной величины, измеримой относительно σ-алгебры, порожденной конечным или счетным разбиением вероятностного пространства.

13. Доказательство утверждения о представлении случайной величины, измеримой относительно σ-алгебры, порожденной дискретной случайной величиной. Утверждение о представлении случайной величины, измеримой относительно σ-алгебры, порожденной случайной величиной общего вида (без доказательства).

Условные математические ожидания. (Лекции + [3, 7])

14. Условное математическое ожидание (УМО) произвольной случайной величины (с.в.) ξ относительно события H — $\mathsf{E}(\xi|H)$. Элементарные свойства УМО $\mathsf{E}(\xi|H)$.

15. Определение УМО $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ для конечно или счетно порожденной σ-алгебры $\mathcal{A}$. Замечание 1: Измеримость УМО относительно $\mathcal{A}$. Замечание 2: об усреднении по элементам $\mathcal{A}$.

16. Доказательство того, что выполнение свойств замечаний 1 и 2 обнозначно определяет УМО относительно конечно или счетно порожденной σ-алгебры.

17. Свойства УМО $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ для конечно или счетно порожденной σ-алгебры $\mathcal{A}$ (8 свойств).

18. Определение УМО $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ для произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$. Вопрос об единственности. Теорема Радона-Никодима (без доказательства). Доказательство существования УМО.

19. Свойства УМО $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ для произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$ (8 свойств). Без доказательства.

20. Обозначение $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$. Формула для усреднения с.в. ξ на событиях, порожденных с.в. η. Условные распределения $\mathsf{P}(A|\eta = y)$. Формулы для вычисления в частных ситуациях дискретных с.в. и абсолютно непрерывных с.в.

21. Пример вычисления условных математических ожиданий для винеровского процесса с помощью условных плотностей.

Цепи Маркова. (Лекции)

22. Марковские процессы: вводный пример набора независимых с.в. Явная конструкция конечной цепи Маркова с дискретным временем. Марковское свойство. Вероятности перехода за несколько шагов времени. Эволюция одномерных распределений цепи Маркова. Стационарное распределение. Выражение конечномерных распределений через исходные параметры цепи.

23. Определение дискретной цепи Маркова через марковское свойство. Различные формы марковского свойства и проверка их эквивалентности. Вид КМР дискретной цепи Маркова. Уравнение Чепмена-Колмогорова. Однородные и неоднородные по времени цепи Маркова.

Марковские процессы. Марковское свойство. (Лекции + [1, 2])

24. Общее определение марковского процесса. Перечень эквивалентных форм марковского свойства. «Дельта-гамма» форма марковского свойства.

25. Определение переходной функции. Форма марковского свойства, использующая переходную функцию. Марковские процессы, обладающие переходными функциями.

26. Непосредственная проверка марковости, основанная на явном виде конечномерных плотностей и «дельта-гамма» форме марковского свойства. Переходная функция винеровского процесса.

27. Проверка марковости случайного процесса с независимыми приращениями и абсолютно непрерывными КМР. Тот же вопрос для случайных процессов с независимыми приращениями и с дискретным множеством значений. Вид переходной функции пуассоновского процесса. Утверждение о том, что любой процесс с независимыми приращениями является марковским (без доказательства).

Конечномерные распределения марковских процессов. (Лекции + [1])

28. Структура КМР марковских процессов, обладающих переходной функцией. Утверждения в двух ситуациях: а) процесс принимает значения в дискретном множестве; б) все КМР имеют плотности.

29. Процесс Орнштейна-Уленбека, его марковость. Нахождение его переходной функции.

30. Формулировка общего результата о виде КМР марковского процесса, обладающего переходной функцией (без доказательства).

31. Вывод общих уравнений Чепмена-Колмогорова (с использованием общего вида КМР марковского процесса, обладающего переходной функцией). Вид уравнения в случаях дискретного пространства состояний и абсолютно непрерывных переходных функций.

32. Эволюция одномерных распределений. Случаи дискретного пространства состояний и абсолютно непрерывных переходных функций.

33. Семейство марковских операторов и его свойства. Однородные по времени марковские процессы. Примеры. Марковская полугруппа операторов, действующих на конечные заряды.

34. Марковская полугруппа в случае дискретного пространства состояний и дискретного времени. Понятие стационарного распределения.

Многомерное нормальное распределение и гауссовские процессы. (Лекции + [3, 2])

35. Определения процесса броуновского моста.

36. Характеристическая функция нормального распределения. Два определения многомерного нормального распределения. Свойства гауссовских векторов.

37. Гауссовские процессы. Примеры гауссовских процессов.

38. Утверждение о том, что для гауссовских процессов стационарность в широком и узком смыслах эквивалентны.

Интегралы, сходящиеся в среднем квадратичном. (Лекции + [1, 2, 7, 4, 9])

39. Случайные процессы, непрерывные в среднем квадратичном. Скалярное произведение в пространстве $L_2(d\mathsf{P})$. Римановы суммы для процессов, непрерывных в среднем квадратичном. Утверждение о том, как находится математическое ожидание и ковариация от интегралов, сходящихся в среднем квадратичном.

40. Утверждение, что предел в среднем квадратичном последовательности гауссовских с.в. есть гауссовская с.в. Следствие для интегралов от гауссовских процессов.

41. Критерий непрерывности в среднем квадратичном случайного процесса во всех точках отрезка.

Конструкция стохастического интеграла Ито. Мартингалы. (Лекции + [8, 1, 2])

42. Лемма об условных математических ожиданиях для приращений винеровского процесса. Простые функции, неупреждающие к естественной фильтрации винеровского процесса. Интегралы Ито от простых функций и их элементарные свойства. Первый и второй моменты от этих интегралов. Изометрия Ито.

43. Пространство $\mathcal{V}(0, t)$. Схема распространения интеграла Ито с множества простых функций на функции из пространства $\mathcal{V}(0, t)$.

44. Схема доказательства того, что множество простых неупреждающих функций плотно в $\mathcal{V}(0, t)$ (по [8], без обоснования). Свойства интеграла Ито от функций из класса $\mathcal{V}(0, t)$.

45. Определение мартингала. Проверка того, что винеровский процесс является мартингалом относительно своей естественной фильтрации.

46. Понятие стохастически эквивалентных случайных процессов. Теорема об существовании модификации стохастического интеграла (как функции от верхнего предела) в форме мартингала с непрерывными траекториями.

47. Понятие винеровского процесса относительно потока σ-алгебр. Обобщение конструкции интеграла Ито.

48. Процессы Ито (стохастические дифференциалы). Теорема о замкнутости класса процессов Ито при гладких отображениях. Назначение формулы Ито. Алгоритм выписывания формулы Ито. (Без доказательств).

49. Примеры применения формулы Ито. Вычисление $\int_0^t W_s\, dW_s$. Дифференциал от стохастической экспоненты. Пример стохастического дифференциального уравнения (СДУ).

Список литературы

[1] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов

[2] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов

[3] Ширяев А.Н. Вероятность

[4] Миллер В.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах

[5] Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами

[6] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. В двух томах. Том 1. Факты. Модели.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.

[8] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения

[9] Жуковский М.Е., Родионов И.В., Шабанов Д.А. Основы теории случайных процессов