Программа курса "Теория случайных процессов"для экономического потока

лектор - проф. Е.В.Булинская, 2016/17 год, осенний семестр

1. Основные этапы развития теории случайных процессов.

2. Случайный элемент со значениями в измеримом пространстве. Распределение случайного элемента.

3. Пространство вещественнозначных функций, цилиндрическая (борелевская) сигма-алгебра.

4. Определение случайного процесса как семейства случайных величин и как одного случайного элемента, их эквивалентность.

5. Конечномерные распределения случайного процесса. Свойства симметрии и согласованности.

6. Распределение случайного процесса однозначно определяется на борелевской сигма-алгебре конечномерными распределениями. Теорема Каратеодори (формулировка).

7. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданным семейством конечно-мерных распределений. Необходимость условий и идея доказательства достаточности.

8. Процессы с независимыми значениями. Существование процесса с независимыми значениями (проверка условий т. Колмогорова). Последовательность н.о.р. с.в.

9. Процессы с независимыми приращениями. Определение. Теорема о необходимых и достаточных условиях существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций.

10. Стационарные процессы (в узком и широком смысле). Определение. Как связаны стационарность в узком и широком смысле?

11. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданным средним и ковариационной функцией.

12. Существование последовательности независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин.

13. Существование гауссовского процесса с $EX(t) = 0$, $cov(X(t); X(s)) = \min(t; s)$. Введенный процесс обладает независимыми приращениями, приращение $X(t) - X(s)$ нормально с параметрами 0 и $t - s$, $s < t$, $X(0) = 0$. Верно и обратное утверждение.

14. Какими свойствами обладает случайный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $\min(s, t)$. Будут ли у этого процесса непрерывные траектории?

15. Эквивалентные процессы. Что это означает для процессов с дискретным и непрерывным временем. Пример эквивалентных процессов, обладающих разными свойствами.

16. Различные определения непрерывности случайных процессов.

17. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями на отрезке $[a, b]$.

18. Теорема Колмогорова о существовании эквивалентного процесса с непрерывными траекториями на конечном отрезке.

19. Следствие теоремы Колмогорова для гауссовского процесса.

20. Явная конструкция винеровского процесса в виде ряда по функциям Шаудера.

21. Лемма о поведении последовательности нормальных (0,1) случайных величин, $P(|\xi_n| = \underline{O}(\sqrt{\ln n})) = 1$. Доказательство с помощью леммы Бореля-Кантелли.

22. Определение функций Шаудера. Эти функции образуют полную ортонормированную систему на отрезке [0,1]. Функции Хаара $S_n(t)$.

23. Лемма о том, что ряд $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n(t)$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке [0,1], если $|a_k| = \underline{O}(k^{\varepsilon})$, $\varepsilon < 1/2$. А, следовательно, функция $S(t)$ непрерывна.

24. Ряд $W(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega) S_n(t)$, где $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ - последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами (0,1), задает винеровский процесс на отрезке [0,1].

25. Построение винеровского процесса на полупрямой.

26. Определение пуассоновского процесса и его явная конструкция как процесса восстановления, построенного по н.о.р. показательным случайным величинам.

27. Измеримые случайные процессы, определение. Сепарабельность процесса $X = \{X(t), t \in T\}$ (относительно класса замкнутых множеств). Теорема о существовании эквивалентного измеримого (по паре переменных) процесса у сепарабельного процесса, который непрерывен с вероятностью 1 в каждой точке множества $T \setminus T_1$, а мера Лебега множества T_1 равна 1. Винеровский процесс измерим.

28. Переформулировка теоремы Фубини на языке математических ожиданий. Теорема Пэли-Винера-Зигмунда о недифференцируемости траекторий винеровского процесса.

29. Определение условного математического ожидания относительно некоторой σ-алгебры и его свойства (без док-ва).

30. Определение марковского процесса (формализация утверждения о том, что при фиксированном настоящем прошлое и будущее независимы). Фильтрация (или неубывающий поток σ-алгебр). Процессы, согласованные с фильтрацией (или адаптированные к ней). Марковский процесс относительно фильтрации.

31. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы относительно некоторой фильтрации. Безобидные (маргингал-разности) и благоприятные последовательности. Марковские моменты и моменты остановки.

32. Лемма Дуба о представлении субмартингала в виде суммы мартингала и неубывающей последовательности (дискретное время).

33. Лемма о том, что для неубывающей последовательности марковских моментов τ_i, $i = \overline{1,k}$, случайные величины $Y_i = \sum_{l=1}^{\tau_i} X_l$ образуют мартингал (субмартингал) относительно последовательности сигма-алгебр $\mathcal{F}_i^*$, если $\{X_s\}_{s=\overline{1,n}}$ безобидная (благоприятная) последовательность относительно потока сигма-алгебр $\mathcal{F}_s$, $s = \overline{1,n}$.

34. Неравенства для максимума неотрицательного субмартингала $\{Z_k, \mathcal{F}_k\}$.

35. Лемма Дуба о числе пересечений полосы субмартингалом с дискретным временем.

36. Винеровский процесс является мартингалом. Марковское свойство винеровского процесса.

37. Марковские моменты и строго марковское свойство винеровского процесса.

38. Теорема о распределении максимума винеровского процесса (или принцип отражения).

39. Закон повторного логарифма для винеровского процесса. Следствие: как угодно далеко найдутся нули винеровского процесса.

40. Процесс $Y_t = t \cdot W_{1/t}$, при $t > 0$, и $Y_0 = 0$, является винеровским. Локальный закон повторного логарифма.

41. Лемма: $\sum_{k=1}^{n} |W_{t_k} - W_{t_{k-1}}| \xrightarrow{p} \infty$ при $\max_k(t_k - t_{k-1}) \to 0$, т.е. при измельчении разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ отрезка $[0,T]$.

42. В условиях предыдущей леммы $l.i.m._{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = T$.

43. Почему нельзя определить интеграл от случайной функции по винеровскому процессу как предел интегральных сумм в среднем квадратичном? Пример: при разбиении отрезка $[0,T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и $\max_k(t_k - t_{k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$ получим

$$l.i.m._{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} \Delta_k = \frac{1}{2}(W_T^2 - T), \qquad l.i.m._{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_{k+1}} \Delta_k = \frac{1}{2}(W_T^2 + T),$$

Здесь $\{W_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс, а $\Delta_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$.

44. Прогрессивно измеримые функции, простые функции, удовлетворяющие условию $E\int_0^T f^2(s,\omega)$ ∞. Класс $\mathcal{M}^2$.

45. Интеграл Ито от простых функций и его свойства.

46. Простые функции плотны в $\mathcal{M}^2$.

47. Определение интеграла Ито как предела интегралов от простых функций, его линейность. Интеграл Ито с переменным верхним пределом является мартингалом.

48. Интеграл Ито с переменным верхним пределом – непрерывная функция этого предела.

49. Что такое стохастический дифференциал. Формула замены переменных Ито.

50. Сильное решение стохастического дифференциального уравнения.

51. Теорема существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

52. Теорема единственности.

53. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $R(t,s)$ была корреляционной функцией случайного процесса.

54. Лемма о непрерывности скалярного произведения в пространстве $H = \{\xi : E\xi^2 < \infty\}$. Необходимое и достаточное условие существования предела в среднем квадратичном.

55. Условия непрерывности процесса в среднем квадратичном.

56. Дифференцируемость процесса в среднем квадратичном.

57. Интегрируемость процесса в среднем квадратичном по мере Лебега.

58. Существование эквивалентного процесса интегрируемого потраекторно в предположении, что вторая смешанная производная корреляционной функции непрерывна.

59. Случайная мера - определение. Ортогональная случайная мера. Структурная мера. Процесс с ортогональными приращениями.

60. Теорема о взаимно-однозначном соответствии между ортогональными случайными мерами и процессами с ортогональными приращениями.

61. Стохастический интеграл от неслучайных функций по ортогональной случайной мере.

62. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса (использование результатов функционального анализа).

63. Определение цепи Маркова с непрерывным временем. Теорема о существовании цепи Маркова с заданным начальным распределением и семейством переходных матриц.

64. Однородная цепь Маркова. Условие стандартности переходной матрицы. Лемма о непрерывности вероятностей перехода для стандартных матриц.

65. Инфинитезимальная матрица. Строение цепи Маркова при условии консервативности. Классификация состояний.

66. Системы обратных и прямых дифференциальных уравнений Колмогорова.

67. Эргодическая теорема (идея доказательства).