

## Вопросы по курсу теории вероятностей.

Весенний семестр 2016 г.

Лектор – В. В. Сенатов

1. Вероятностное пространство как математическая модель эксперимента со случайными исходами. Частота события, ее свойства. Устойчивость частот реальных случайных событий. Математические модели экспериментов со случайными исходами. Операции над реальными событиями и операции над множествами, являющимися моделями этих событий. Измеримые пространства. Меры, их свойства. Пространства с мерами. Вероятностные пространства. Простейшие свойства вероятности.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Построение простейших вероятностных пространств, урновые схемы. Элементы комбинаторики. Биномиальное распределение как распределение вероятностей числа успехов в схеме выбора с возвращением.
3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость попарная и в совокупности. Построение вероятностных пространств для сложных экспериментов; прямое произведение вероятностных пространств.
4. Дискретные случайные величины. Распределение случайной величины (вектора). Функция распределения. Совместное распределение. Маргинальные распределения для данного совместного распределения. Независимость случайных величин в элементарном случае (три эквивалентных определения).
5. Математическое ожидание случайной величины и его вычисление через распределение вероятностей. Свойства математического ожидания. Дисперсия, ее свойства. Ковариация, коэффициент корреляции. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел (ЗБЧ) в форме Чебышева. ЗБЧ в форме Бернулли как аналог устойчивости частот.
6. Вероятностная модель эксперимента с произвольным множеством исходов. Аксиоматика Колмогорова. Основные свойства вероятности. Пределы последовательностей событий. Связь между счетной аддитивностью и непрерывностью вероятности. Минимальная сигма-алгебра. Продолжение меры. Теорема Каратеодори (без доказательства). Борелевские множества.
7. Случайные величины. Замкнутость множества случайных величин относительно арифметических операций и относительно предельного перехода. Борелевские функции от случайных величин. Распределение вероятностей, порожденное случайной величиной. Функция распределения случайной величины. Взаимно однозначное соответствие между распределениями и функциями распределения.
8. Абсолютно непрерывные распределения; плотности распределений. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, экспоненциальное, Коши, нормальное). Сингулярные и дискретные распределения. Пример сингулярного распределения

(распределение Кантора). Примеры дискретных распределений (Бернулли, биномиальное, Пуассона). Теорема Лебега (без доказательства). Совместное и маргинальные распределения совокупности случайных величин. Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной. Независимость случайных величин.

9. Математическое ожидание случайной величины, интеграл Лебега, его основные свойства. Формула замены переменных в интеграле Лебега. Вычисление математических ожиданий функций от случайной величины по ее распределению вероятностей. Интеграл Римана – Стильбеса. Моменты. Смысл параметров нормального закона. Связь между существованием моментов и поведением «хвостов» функции распределения случайной величины.
10. Виды сходимости на множестве случайных величин. Сходимость по вероятности. Неравенство Чебышева. ЗБЧ. Сходимость почти наверное. Неравенство Колмогорова. Сходимость рядов независимых случайных величин. Усиленный ЗБЧ. Связь между сходимостью по вероятности и сходимостью почти наверное.
11. Виды сходимости на множестве функций распределения. Сходимость в основном. Множество функций распределения и его замыкание в смысле сходимости в основном. Компактность замыкания множества функций распределения. Слабая сходимость. Метризуемость слабой сходимости; метрика Леви. Критерий слабой относительной компактности.
12. Связь между сходимостью в метрике Леви и равномерной сходимостью. Сходимость по распределению. Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их функций распределения.
13. Суммы независимых случайных величин. Формула свертки. Свёртки двух равномерных распределений на  $(0, 1)$  и многократные свёртки экспоненциального распределения. Поведение функций распределения ненормированных и нецентрированных сумм случайных величин при росте числа слагаемых (независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией). Нормированные суммы случайных величин. Формулировка центральной предельной теоремы (ЦПТ). Локальная форма ЦПТ для плотностей.
14. Характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин. Примеры характеристических функций. Взаимная однозначность соответствия между распределениями и их характеристическими функциями; формулы обращения (для функций распределения и для плотностей, без доказательств). Взаимная непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. Связь между производными характеристической функции и моментами ее функции распределения. Разложение характеристической функции в отрезок ряда Тейлора. Другие свойства характеристических функций.
15. Доказательство ЦПТ для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями (метод характеристических функций). ЗБЧ в форме Хинчина.
16. Различия в ЗБЧ и ЦПТ для одинаково и различно распределенных слагаемых.
17. Теорема Берри – Эссеена (без доказательства). Условие Ляпунова.

18. Схема серий. Теорема Пуассона.

### Литература

1. Ширяев А.Н. Вероятность. Т. 1, 2. М.: МЦНМО, 2004. (В Т. 2 только гл. IV, параграфы 2 (п. 1) и 3 (п. 2))
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Едиториал УРСС, 2005.
3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.

### Дополнительная литература

1. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009.