Кафедра теории вероятностей

Теория случайных процессов. Лектор – профессор А.В.Булинский
(весенний семестр 2016 года)

ПРОГРАММА

1. Случайные функции (процессы, поля) как семейства случайных элементов. Траектории. Распределение случайного элемента. Независимость случайных элементов. Теорема Ломницкого – Улама (формулировка).

2. Ветвящиеся случайные процессы. Модель Гальтона – Ватсона. Нахождение вероятности вырождения с помощью производящей функции случайной величины, распределение которой описывает число потомков одной частицы.

3. Процессы восстановления. Усиленный закон больших чисел для независимых, неотрицательных, одинаково распределенных величин. Отрицательное биномиальное распределение. Элементарная теорема восстановления.

4. Пуассоновский процесс (т.е. процесс восстановления, построенный по независимым величинам $X, X_1, X_2, \ldots$, где $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$) как процесс с независимыми приращениями. Парадокс времени ожидания.

5. Построение пространственного точечного пуассоновского процесса с σ-конечной мерой интенсивности m.

6. Функционал Лапласа точечного процесса. Характеризация пространственного точечного пуассоновского процесса с помощью функционала Лапласа.

7. Маркированный пуассоновский процесс. Анализ числа клиентов в системе массового обслуживания $M|G|\infty$.

8. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (доказательство необходимости). Условия согласованности на языке характеристических функций для действительных случайных процессов.

9. Теорема, дающая необходимые и достаточные условия существования (действительного) процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ с независимыми приращениями, для которого

$$Law(X(0)) = Q, \quad Law(X(t) - X(s)) = Q_{s,t}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Следствие, показывающее существование пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности λ, определяемого как процесс с независимыми приращениями.

10. Фильтрация, ее расширение. Марковские моменты, примеры, σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, где τ – марковский момент.

11. Строго марковское свойство процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$, имеющего независимые стационарные приращения.

12. Теорема Колмогорова - Ченцова (о непрерывной модификации процесса, заданного на отрезке, и локальном условии Гельдера для траекторий).

13. Построение винеровского процесса на $\mathbb{R}_+$ как процесса с независимыми приращениями (имеющего непрерывную модификацию).

14. Конструкция винеровского процесса, использующая последовательность независимых стандартных гауссовских величин и функции Шаудера.

15. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса (теорема Винера – Зигмунда – Пэли).

16. Принцип отражения. Теорема Башелье.

17. Закон повторного логарифма. Идея доказательства теоремы Хинчина.

18. Действительные и комплексные гауссовские процессы (теорема существования). Фрактальное броуновское движение.

19. Ковариационные функции и их свойства. Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром. Теорема Ароншайна.

20. Дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса в среднем квадратичном. Разложение Карунена - Лоэва.

21. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и примеры. Лемма о получении субмартингала из мартингала с помощью выпуклой функции.

22. Предсказуемые процессы. Разложение Дуба.

23. Дискретный вариант формулы Танаки.

24. Теорема Дуба об остановке или свободном выборе. Задача о разорении игрока.

25. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Определения и примеры. Теорема, утверждающая, что процессы с независимыми приращениями являются марковскими.

26. Марковские цепи с дискретным и непрерывным временем. Переходные вероятности и их четыре свойства. Конечномерные распределения марковской цепи (задаваемые начальным распределением и функциями, обладающими четырьмя свойствами переходных вероятностей).

27. Однородные марковские цепи. Неразложимые и апериодические цепи с конечным числом состояний.

28. Теорема о предельном поведении переходных вероятностей однородной марковской цепи с конечным или счетным пространством состояний и с дискретным или непрерывным временем. Стационарное распределение марковской цепи.

29. Генератор (инфинитезимальная матрица) полугруппы переходных вероятностей стандартной однородной марковской цепи $X = \{X(t), t \geq 0\}$ с конечным или счетным числом состояний.

30. Прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова для конечной стандартной однородной цепи Маркова.

31. Модель Эрланга.

32. Построение аппроксимации вероятностного распределения с помощью марковских цепей. Обратимые марковские цепи. Алгоритм Метрополиса - Хастингса.

33. Марковские и гиббсовские случайные поля, заданные на некотором конечном множестве и принимающие конечное число значений.

34. Процессы, стационарные в узком и широком смыслах. Связь этих понятий.

35. Ортогональные случайные меры и их свойства. Структурная мера.

36. Интеграл по ортогональной случайной мере. Свойства интеграла.

37. Теорема Карунена.

38. Слабая сходимость вероятностных мер. Теорема Прохорова (формулировка).

39. Доказательство теоремы Герглотца. Теорема Бохнера - Хинчина (формулировка). Спектральная плотность.

40. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Периодограмма и ее сглаживание.

41. Определение и простейшие свойства интеграла Ито. Формула Ито (формулировка).

42. Пример обыкновенного (неслучайного) дифференциального уравнения, правая часть которого не удовлетворяет условию Липшица и при этом существует континуум решений с одинаковым начальным условием. Лемма Гронуолла.

43. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

44. Формула Ито для многомерного случая (формулировка). Векторный процесс Ито, генератор этого процесса. Генератор m-мерного винеровского процесса.

45. Формула Дынкина (без доказательства). Исследование возвратности и невозвратности винеровского процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.В.Булинский, А.Н.Ширяев. Теория случайных процессов. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005 (см. там же список литературы, насчитывающий 198 наименований).

[2] А.Н.Ширяев. Вероятность (т.1,2). Москва, МЦНМО, 2007.

Некоторые вопросы программы (например, 2,6,7,12 и др.) не изложены в [1] и [2], а рассматривались на лекциях.