Кафедра теории вероятностей

Теория случайных процессов. Лектор – профессор А.В.Булинский
(весенний семестр 2016 года)

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Обязательные задачи к лекции 1

1. Пусть случайная величина ξ задает распределение числа потомков частицы в модели Гальтона – Ватсона и $\mathsf{P}(\xi = m) = p_m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Показать, что вероятность p вырождения популяции равна нулю тогда и только тогда, когда $p_0 = 0$. Доказать следующее утверждение. Если $p_0 > 0$, то $p = 1$ при $\mathsf{E}\xi \le 1$, а при $\mathsf{E}\xi > 1$ имеем $p < 1$.

2. Пусть в модели Гальтона – Ватсона $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2$ и $\mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4$. Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше $1/2$.

3. Пусть $X, X_1, \ldots$ и $Y, Y_1, \ldots$ – независимые последовательности, каждая из которых состоит из неотрицательных, независимых, одинаково распределенных величин, причем $0 < \mathsf{E}X$ и $\mathsf{E}Y < \infty$. Определим процесс восстановления $Z = \{Z(t), t \ge 0\}$, построенный по последовательности $X_1, X_2, \ldots$, и введем процесс Спарре Андерсена

$$M(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{Z(t)} Y_j, \quad t \ge 0,$$

где C_0 и c – положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Нарисовать график траектории процесса $M = \{M(t), t \ge 0\}$. Доказать, что $\lim_{t\to\infty} M(t)/t$ существует п.н., и найти этот предел.

4. Пусть $Z = \{Z(t), t \ge 0\}$ – процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных, независимых, одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \ldots$ таких, что $\mathsf{E}X_1 = \mu \in (0, \infty)$ и $varX_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \overset{law}{\to} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

Обязательные задачи к лекции 2

1. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

2. Найти ковариационную функцию процесса $Z = \{Z(t), t \ge 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \ge 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ, случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N.

3. Пусть $N = \{N(t), t \ge 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ (т.е. процесс восстановления, построенный по независимым величинам $X_1, X_2, \ldots$, имеющим экспоненциальное распределение с параметром λ). Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найти условную плотность распределения вектора $(S_1, \ldots, S_n)$ при условии, что $N(t) = n$.

4. Пусть $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ – пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\lambda\,\mu(\cdot)$, где λ – положительная константа, а μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\{x_i\}$ – ансамбль случайных точек в $\mathbb{R}^d$, образующих этот процесс. Для $z \in \mathbb{R}^d$ введем случайную величину $Y(z) := \inf_{i\in\mathbb{N}} \|z - x_i\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^d$ (иначе говоря, рассматривается расстояние от точки z до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найти функцию распределения величины $Y(z)$ и ее математическое ожидание.

Обязательные задачи к лекции 3

1. Пусть независимые величины $X_{L,1}, X_{L,2}, \ldots, X_{L,n}$ равномерно распределены в кубе $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^d$. Для $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ положим $Z_{L,n}(B) = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_B(X_{L,j})$. Пусть $B_1, \ldots, B_k$ – ограниченные попарно непересекающиеся борелевские подмножества $\mathbb{R}^d$. Доказать, что для любых $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, k$, справедливо соотношение

$$\mathsf{P}(Z_{L,n}(B_1) = m_1, \ldots, Z_{L,n}(B_k) = m_k) \to \mathsf{P}(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_k) = m_k)$$

при $L, n \to \infty$, если $n/L^d \to \lambda > 0$. Здесь $N(\cdot)$ – пространственный точечный пуассоновский процесс в $\mathbb{R}^d$ с мерой интенсивности $\lambda\,\nu_d(\cdot)$, где $\nu_d(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.

2. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, т.е. процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин $X, X_1, X_2, \ldots$ таких, что $X \sim Exp(\lambda)$. Положим $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найти функционал Лапласа процесса $Y = \{Y(B) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{I}_B(S_n),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$.

3. Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы независимые пуассоновские процессы $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}, \ldots, N_k = \{N_k(t), t \geq 0\}$, причем N_k имеет интенсивность $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$. Доказать, что процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, где $X(t) = \sum_{k=1}^m N_k(t)$, является пуассоновским (т.е. процессом с независимыми приращениями, обладающим определенными свойствами). Найти его интенсивность и ковариационную функцию.

4. Доказать, что у пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$ не существует непрерывной модификации (т.е. не существует процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ такого, что для каждого $t \geq 0$ верно равенство $X(t) = N(t)$ п.н., причем с вероятностью единица траектории процесса X непрерывны на $\mathbb{R}_+$).

Обязательные задачи к лекции 4

1. Пусть $Z = \{Z(t), t \in T\}$ – случайный процесс с независимыми приращениями, образованный действительными случайными величинами ($T \subset \mathbb{R}$). Иначе говоря, для любого $n \in \mathbb{N}$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ ($t_k \in T$, $k = 0, \ldots, n$) независимы величины $Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \ldots, Z(t_n) - Z(t_{n-1})$. Обозначим $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – естественную фильтрацию Z, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z(v), v \leq t, v \in T\}$. Выяснить, какие из следующих определений эквивалентны данному:

а) для каждых $u, s, t \in T$ таких, что $u \leq s < t$, независимы $Z(t) - Z(s)$ и $\mathcal{F}_u$;

б) для каждых $u, t \in T$ таких, что $u < t$, независимы $Z(t) - Z(u)$ и $\mathcal{F}_u$;

в) для каждых $u, s, t \in T$ таких, что $u \leq s < t$, независимы $Z(t) - Z(s)$ и $Z(v)$, где $v \leq u$, $v \in T$;

г) для любого $n \in \mathbb{N}$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ ($t_k \in T$, $k = 0, \ldots, n$) независимы величины $Z(t_1) - Z(t_0), \ldots, Z(t_n) - Z(t_{n-1})$.

2. Привести пример процесса $X = \{X(t), t \in T\}$ ($T \subset \mathbb{R}$), не являющегося процессом с независимыми приращениями.

3. Пусть $\xi, \xi_1, \ldots$ – независимые одинаково распределенные величины, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть τ – марковский момент относительно естественной фильтрации процесса $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Предположим, что $\mathsf{E}|\xi| < \infty$ и $\mathsf{E}\tau < \infty$. Доказать, что тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно первое тождество Вальда: $\mathsf{E}S_\tau = \mathsf{E}\tau\mathsf{E}\xi$, где $S_{\tau(\omega)}(\omega) := \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} \xi_k(\omega)$, если $\tau(\omega) < \infty$, и $S_{\tau(\omega)}(\omega) := 0$, если $\tau(\omega) = \infty$. Сохранится ли тождество Вальда для интегрируемых ξ и τ, когда случайная величина τ принимает значения в $\mathbb{N}$ и не зависит от последовательности $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4^***.** Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ (как процесс восстановления). Доказать, что $\tau := \gamma\, S_1$, где константа $\gamma \in (0,1)$, не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса N (S_1 – длина промежутка до первого скачка процесса N).

Обязательные задачи к лекции 5

1. Построить пример случайного процесса $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$, показывающий, что условие $\mathsf{E}|X(t) - X(s)|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}$, справедливое для некоторых констант $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и всех $s, t \in [a,b]$, теоремы Колмогорова о существовании непрерывной модификации невозможно ослабить, допустив $\beta = 0$.

2^***.** Доказать, что для каждого $a > 0$ величина $\tau_a(\omega) := \inf\{t \geq 0 : W(t,\omega) = a\}$ является п.н. конечным марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,N(n)} = T$, где $N(n) \in \mathbb{N}$ и $\delta_n := \max_{k=0,\ldots,N(n)-1}(t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$ при $n \to \infty$. Положим $U_n := \sum_{k=0}^{N(n)-1}(W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k}))^2$. Найти предел в среднем квадратическом величин U_n, когда $n \to \infty$.

4. Доказать, что п.н. у траекторий винеровского процесса на любом отрезке $[0,T]$ неограничена вариация.

Обязательные задачи к лекции 6

1. Пусть последовательность положительных чисел $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Доказать, что тогда $|W(t_n)| \to \infty$ п.н. при $n \to \infty$.

2. Пусть τ_a – момент первого достижения уровня a винеровским процессом, где $a \geq 0$. При $a > 0$ найти плотность распределения величины τ_a и ее математическое ожидание. Доказать, что процесс $\{\tau_a, a \geq 0\}$ имеет стационарные независимые приращения.

3. Доказать, что если $0 \leq a < b \leq c < d$, то с вероятностью единица

$$\sup_{t\in[a,b]} W(t) \neq \sup_{t\in[c,d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка $[u,v] \subset \mathbb{R}$ с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина $T^* = T^*(\omega)$ такая, что

$$\sup_{t\in[u,v]} W(t) = W(T^*).$$

4*. Пусть $T := \arg\max_{t\in[0,1]} W(t)$, т.е. $T(\omega)$ – та точка отрезка $[0,1]$, в которой непрерывная траектория $W(t,\omega), t \in [0,1]$, достигает максимума (величина T определена однозначно с точностью до эквивалентности в силу задачи 3). Доказать, что

$$\mathsf{P}(T \le t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}, \quad t \in [0,1].$$

Обязательные задачи к лекции 7

1. Проверить, что определение винеровского процесса $W = \{W(t), t \ge 0\}$ (как процесса с независимыми приращениями) эквивалентно следующему:

1) процесс является гауссовским;

2) $\mathsf{E}W(t) = 0$ при $t \ge 0$;

3) $cov(W(s), W(t)) = \min\{s,t\}$ для $s,t \ge 0$;

4) траектории W непрерывны п.н. на $\mathbb{R}_+$.

2. Пусть $X = \{X(t), t \ge 0\}$ – гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что п.н. его траектории непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и $X(0) = 0$ п.н. Доказать, что найдутся винеровский процесс $W = \{W(t), t \ge 0\}$, константы $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ такие, что $X(t) = at + bW(t)$ п.н. для всех $t \ge 0$.

3. Выяснить, являются ли следующие функции ковариационными функциями некоторых гауссовских процессов:

а) $r(s,t) = \exp\{-\alpha|s-t|\}$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$;

б) $r(s,t) = 2\cos(s-t), \quad s,t \in \mathbb{R}$;

в) $r(s,t) = (1-(s-t)^2)\mathbb{I}\{|s-t| \le 1\} \;\; s,t \in \mathbb{R}$;

г) $r(s,t) = \exp\{ia(s-t) - \frac{(s-t)^2\sigma^2}{2}\}, \quad a \in \mathbb{R},\; \sigma \in \mathbb{R}_+,\; s,t \in \mathbb{R}$.

4. Получить разложение Карунена - Лоэва для винеровского процесса W на отрезке $[0,1]$.

Обязательные задачи к лекции 8

1. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – винеровский процесс. Найти все действительные параметры α, β и γ, для которых процесс $Y = \{Y(t) := \exp\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\}, t \ge 0\}$ является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса W.

2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины такие, что $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X = -1) = 1/2$. Рассмотрим естественную фильтрацию $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ процесса $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Определим $Y_n := (-1)^n\cos(\pi S_n)$, где $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Проверить, что $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал.

3. Доказать, что $(W(t\wedge\tau), \mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ – мартингал ($W = \{W(t), t \ge 0\}$ – винеровский процесс, τ – момент остановки относительно естественной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ процесса W).

4. Привести пример мартингала $X = \{X_n, n \ge 0\}$ и момента остановки τ (относительно естественной фильтрации процесса X), для которых $\mathsf{E}X_\tau \ne \mathsf{E}X_0$.

Обязательные задачи к лекции 9

1. Привести примеры марковских процессов (имеющих конечную функцию среднего), которые являются мартингалами и которые мартингалами не являются.

2. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}$ – марковский процесс, $X(t) : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in T$, $T \subset \mathbb{R}$. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – взаимно однозначное отображение. Доказать, что процесс $Y = \{Y(t), t \in T\}$ является марковским, если $Y(t) = h(X(t))$, $t \in T$. Показать, что это утверждение не обязано выполняться, когда h не взаимно однозначное отображение.

3. Доказать, что процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ является пуассоновским процессом интенсивности λ (т.е. N – процесс с независимыми приращениями такой, что $N(0) = 0$ п.н. и $N(t) - N(s) \sim Pois(\lambda(t - s))$ для $0 \leq s \leq t < \infty$) тогда и только тогда, когда N - марковская цепь со значениями в пространстве $\mathbb{Z}_+$ и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для $0 \leq s \leq t < \infty$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ определяются формулой

$$p_{i,j}(s,t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leq j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – однородная цепь Маркова с конечным или счетным числом состояний S (однородность означает, что $p_{i,j}(s,t) = p_{i,j}(s + h, t + h)$ для $0 \leq s \leq t < \infty$, $i, j \in S$ и $h \geq 0$; поэтому пишут $p_{i,j}(t - s)$ вместо $p_{i,j}(s, t)$). Для $i \in S$ положим

$$c_i = gcd\{n \geq 1 : p_{i,i}(n) > 0\},$$

где gcd обозначает наибольший общий делитель. Состояние i называется периодическим с периодом d ($d > 1$), когда $c_i = d$. Если $c_i = 1$, то i – непериодическое состояние. Доказать, что если цепь X неразложима (т.е. для любых $i, j \in S$ ($i \neq j$) найдутся $k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $p_{i,j}(k) > 0$ и $p_{j,i}(m) > 0$), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают.

Обязательные задачи к лекции 10

1*. Доказать, что если однородная цепь Маркова $X = \{X_n, n \geq 0\}$ с конечным числом состояний неразложима и апериодична, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p_{i,j}(n) > 0$ при всех i, j и $n \geq m$.

2. Пусть цепь Маркова имеет пространство состояний $S = \{1, 2\}$, а $p_{1,1} = p_{1,2} = 1/2$, $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = 1$. Является ли цепь неразложимой? Что можно сказать о наличии стационарного распределения и о предельном поведении $\mathsf{P}(X_n = j)$ при $n \to \infty$ для $j \in S$?

3. Построить марковскую цепь $X = \{X_n, n \geq 0\}$, имеющую неединственное стационарное распределение. Показать, что у такой цепи континуум стационарных распределений.

4. Пусть инфинитезимальная матрица $Q = (q_{i,j})$ марковской цепи с пространством состояний $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ имеет вид $q_{i,i+1} = \lambda$ для $i = 0, \ldots, n - 1$ и $q_{k,k-1} = k\mu$ для $k = 1, \ldots, n$, а остальные $q_{i,j}$ при $i \neq j$ равны нулю (λ и μ – положительные параметры). Показать, что такая цепь существует и имеет стационарное распределение. Найти это распределение.

Обязательные задачи к лекции 11

1. Пусть переходная матрица однородной марковской цепи $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с пространством состояний $\{1, \ldots, m\}$ $(m \geq 3)$ имеет вид $p_{i,j} > 0$ при $|i-j| \leq 1$ и $p_{i,j} = 0$ при $|i-j| \geq 2$ (*дискретный вариант процесса рождения и гибели*). Доказать, что такая цепь обратима.

2. Построить пример необратимой марковской цепи $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с конечным пространством состояний.

3. (*Модель Эренфестов*) Пусть имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n $(n \in \mathbb{N})$ с вероятностью $1/k$ выбирается любой из этих k шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n обозначает число шаров в первой урне в момент времени n. Доказать, что $X_0, X_1, \ldots$ образуют однородную цепь Маркова с пространством состояний $\{0, 1, \ldots, k\}$. Проверить, что эта цепь обратима. Найти ее стационарное распределение.

4. Привести пример марковского случайного поля, которое не является гиббсовским и пример гиббсовского поля, которое не является марковским (рассматриваются случайные поля, заданные на некотором конечном множестве и принимающие конечное число значений).

Обязательные задачи к лекции 12

1. Показать, что Z является ортогональной случайной мерой на полукольце $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}Z(A)\overline{Z(B)} = \mu(A \cap B)$ для любых $A, B \in \mathcal{K}$, где μ – (неслучайная) конечная мера на $\mathcal{K}$ ($Z(A)$ входит в комплексное пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ для $A \in \mathcal{K}$).

2. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), t \geq 0\}$, где $W(\cdot)$ – винеровский процесс и параметр $\alpha > 0$. Является ли процесс X стационарным в узком и/или широком смысле?

3. Доказать, что для центрированной стационарной в широком смысле последовательности $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ выполнен закон больших чисел в смысле сходимости в среднем квадратичном, а именно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(0) \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

где $Z(\cdot)$ – спектральная мера упомянутой последовательности.

4. Пусть $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ – стационарная в широком смысле последовательность со средним a и ковариационной функцией $R = R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to a$ в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R(k) \to 0$, $k \to \infty$.

Обязательные задачи к лекции 13

1. Доказать, что стационарный в широком смысле (комплексный) процесс $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $R = R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле. Вывести отсюда, что неотрицательно определенная на $\mathbb{R}$ функция $R = R(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, если она непрерывна в нуле. Привести пример неотрицательно определенной функции $R = R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывной всюду, кроме точки $t = 0$.

2. Доказать, что стационарный в широком смысле центрированный процесс $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ имеет спектральную плотность тогда и только тогда, когда он является *процессом скользящего среднего*. А именно, справедливо (возможно на расширении исходного вероятностного пространства) представление вида $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varepsilon(t-k)$, $t \in \mathbb{Z}$, где ряд сходится в среднем квадратическом, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, а $\{\varepsilon(t), t \in \mathbb{Z}\}$ – центрированный и ортонормированный в L^2 процесс (*белый шум*).

3^*. Пусть $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ – центрированный стационарный в широком смысле действительный процесс с ковариационной функцией $R = R(n)$. В качестве оценки функции R по наблюдениям $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$ возьмем

$$\widehat{R}_N(m) := \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} X(m+k)X(k) \ \text{ при } \ 0 \le m \le N-1,$$

положим $\widehat{R}_N(-m)$, когда $-(N-1) \le m < 0$, и пусть $R(m) = 0$ для остальных $m \in \mathbb{Z}$. Доказать, что если X – гауссовский процесс, то соотношение $\mathsf{E}(R(m) - \widehat{R}_N(m))^2 \to 0$ при $N \to \infty$ равносильно выполнению условия

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} R^2(k) \to 0, \quad N \to \infty.$$

4. Пусть процесс $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ образован независимыми величинами $X(n)$, имеющими распределение $N(0, \sigma^2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть f – спектральная плотность процесса X, а $\widehat{f}_N$ - периодограмма, построенная по наблюдениям $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$. Для каждого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ найти $\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}|\widehat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|^2$.

Обязательные задачи к лекции 14

1. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,N_n} = T$, где $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\lambda \in [0,1]$ и выберем промежуточные точки $\tau_{n,k} := (1-\lambda)t_{n,k-1} + \lambda t_{n,k}$, $k = 1, \dots, N_n$. Предположим, что $\max_{1\le k\le N_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$. Найти предел в среднем квадратическом при $n \to \infty$ интегральных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k})(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})),$$

где W – винеровский процесс.

2. С помощью формулы Ито найти

$$\int_{[0,T]} W(t)dW(t),$$

где W – винеровский процесс.

3. Пусть $Y(t) := \gamma e^{-\alpha t} \int_{[0,t]} e^{\alpha s} dW(s)$, $t \ge 0$, где W – винеровский процесс, $\alpha > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Найти $dY(t)$.

4. Доказать, что процесс $\{I_t(f) := \int_{[0,t]} f(s,\omega)dW(s), t \in [0,T]\}$ является квадратично интегрируемым мартингалом для каждой простой квадратично интегрируемой неупреждающей функции $f = f(s,\omega)$, где $s \in [0,T]$ и $\omega \in \Omega$.

Обязательные задачи к лекции 15

1. Найти сильное решение $V = \{V(t), t \geq 0\}$ уравнения Ланжевена $dV(t) = aV(t)dt + \sigma dW(t)$, где константы $a < 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и W – винеровский процесс.

2. Доказать, что если $V(0)$ не зависит от W и $V(0) \sim N(0, \sigma^2/(2\alpha))$, где $\alpha = -a$, то решение $V = \{V(t), t \geq 0\}$ уравнения Ланжевена является гауссовским процессом с ковариационной функцией $cov(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha|s-t|}$, $s, t \geq 0$.

3. Найти сильное решение уравнения $dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$ с начальным условием $X(0)$ ($X(0)$ не зависит от винеровского процесса W и $\mathsf{E}X(0)^2 < \infty$), константы $\sigma > 0$ и $r \in \mathbb{R}$.

4^*. Доказать, что сильное решение стохастического дифференциального уравнения (при стандартных условиях на коэффициенты) является марковским процессом.

Обязательные задачи к лекции 16

НЕ ПРЕДЛАГАЮТСЯ