

Программа курса „Математическая статистика“

лектор — доцент Д. А. Шабанов

версия от 09.11.2016

1. Основная задача математической статистики. Примеры статистических моделей.
2. Вероятностно-статистическая модель, понятия наблюдения и выборки. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливленко–Кантелли.
3. Виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Три знаменитых теоремы: закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема (напоминание).
4. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер в \mathbb{R}^n . Теорема Александрова (б/д). Теорема о наследовании сходимости.
5. Лемма Слуцкого. Примеры применения.
6. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Основные свойства гауссовских случайных векторов, критерий независимости компонент. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).
7. Вероятностно–статистическая модель. Параметрическая статистическая модель. Моделирование выборки из неизвестного распределения, принадлежащему параметрическому семейству.
8. Параметрическая статистическая модель. Запас параметрических моделей, напоминание о распределении сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.
9. Статистики и оценки. Общая идея построения хороших статистик, примеры: выборочные усреднения, порядковые статистики и L -оценки, выборочные квантили, M -оценки. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры. Наследование асимптотических свойств при взятии непрерывной функции.
10. Методы нахождения оценок, общий принцип подстановки. Метод моментов, состоятельность оценки метода моментов.

11. Выборочные квантили и выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили. Примеры.
12. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический. Допустимые оценки.
13. Доминируемое семейство распределений, условия его регулярности. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки.
14. Метод максимального правдоподобия. Примеры. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности состоятельного решения уравнения правдоподобия.
15. Теорема Бахадура (б/д). Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.
16. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ -алгебры. Теорема Радона–Никодима (б/д) и обоснование существования условного математического ожидания. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ -алгебра порождена счетным разбиением.
17. Основные свойства условного математического ожидания (10 штук).
18. Условное математическое ожидание $E(\xi|\eta = y)$. Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.
19. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе. Байесовская оценка, априорные и апостериорные плотности. Теорема о байесовской оценке, ее оптимальность в байесовском подходе к сравнению оценок.
20. Достаточные статистики. Теорема Колмогорова–Блэкуэлла–Рао об улучшении несмещенных оценок и ее многомерное следствие. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке.
21. Критерий факторизации Неймана–Фишера, доказательство для дискретного случая. Примеры, вычисление оптимальной оценки параметра в случае выборки из $U(0, \theta)$.
22. Теорема о пересчете условного математического ожидания по двум мерам. Доказательство критерия факторизации Неймана–Фишера в общем случае.
23. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.
24. Доверительные интервалы и доверительные области. Метод центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок. Примеры.

25. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Теорема о наилучшей оценке в классе линейных оценок (б/д). Несмещенные оценки для параметров линейной регрессионной модели.
26. Линейная гауссовская модель. Достаточные статистики в линейной гауссовской модели. Оптимальные оценки параметров в линейной гауссовской модели, их распределения.
27. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского случайного вектора. Доверительные интервалы и эллипсоиды для параметров гауссовской линейной модели. Примеры.
28. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия (критическое множество, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго родов, функция мощности). Сравнения критериев: наиболее мощные и равномерно наиболее мощные критерии. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
29. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев. Примеры. Теорема о монотонном отношении правдоподобия (б/д). Построение равномерно наиболее мощных критериев для односторонних альтернатив. Пример построения равномерно наиболее мощного критерия в случае отсутствия монотонного отношения правдоподобия.
30. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез.
31. Линейные гипотезы в линейной гауссовской модели, F -критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели. Условный (обобщенный) метод наименьших квадратов, вычисление статистики для F -критерия с его помощью.
32. Проверка простых непараметрических гипотез в дискретном случае. Статистика хи-квадрат Пирсона в схеме Бернулли с m исходами. Теорема Пирсона. Критерий согласия хи-квадрат. Теорема об обобщенной статистике хи-квадрат, проверка сложной гипотезы для схемы Бернулли с ее помощью.
33. Проверка простых непараметрических гипотез в непрерывном случае. Теорема о сходимости статистики D_n , критерий Колмогорова для проверки простой гипотезы о виде функции распределения.

Список литературы

- [1] А.А. Боровков, *Математическая статистика*, 4-е изд., Лань, Спб., 2010.
- [2] А.Н. Ширяев, *Вероятность-1*, 5-е изд., МЦНМО, М., 2011.

- [3] Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, *Математическая статистика*, Книжный дом “Либроком”, М., 2014.
- [4] Э. Леман, *Теория точечного оценивания*, Наука, М., 1991.
- [5] Б.А. Севастьянов, *Курс теории вероятностей и математической статистики*, 2-е изд., Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2004.
- [6] Ю.Н. Тюрин, *Математическая статистика. Записки лекций*, электронная версия.