

# Вопросы к экзамену по курсу «Математическая статистика»

лектор — доцент Д. А. Шабанов

осенний семестр 2016

1. Вероятностно-статистическая модель, понятия наблюдения и выборки. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливленко–Кантелли.
2. Виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема Александрова (б/д). Теорема о наследовании сходимости.
3. Лемма Слуцкого. Примеры применения.
4. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Основные свойства гауссовских случайных векторов, критерий независимости компонент. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).
5. Вероятностно-статистическая модель. Параметрическая статистическая модель. Моделирование выборки из неизвестного распределения, принадлежащему параметрическому семейству.
6. Статистики и оценки. Общая идея построения хороших статистик, примеры: выборочные усреднения, порядковые статистики, выборочные квантили,  $M$ -оценки. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры. Наследование асимптотических свойств при взятии непрерывной функции.
7. Методы нахождения оценок, общий принцип подстановки. Метод моментов, состоятельность оценки метода моментов.
8. Выборочные квантили и выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили. Примеры.
9. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический. Допустимые оценки.
10. Доминируемое семейство распределений, условия его регулярности. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценок.

11. Метод максимального правдоподобия. Примеры. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия.
12. Теорема об асимптотической нормальности состоятельного решения уравнения правдоподобия. Теорема Бахадура (б/д). Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.
13. Условное математическое ожидание случайной величины относительно  $\sigma$ -алгебры. Теорема Радона–Никодима (б/д) и обоснование существования условного математического ожидания. Явный вид условного математического ожидания в случае, если  $\sigma$ -алгебра порождена счетным разбиением.
14. Основные свойства условного математического ожидания (10 штук).
15. Условное математическое ожидание  $E(\xi|\eta = y)$ , существование и основные свойства. Связь с  $E(\xi|\eta)$ . Вычисление  $E(f(\xi, \eta)|\eta)$  в случае независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
16. Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.
17. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе. Байесовская оценка, априорные и апостериорные плотности. Теорема о байесовской оценке, ее оптимальность в байесовском подходе к сравнению оценок.
18. Достаточные статистики. Теорема Колмогорова–Блэкуэлла–Рао об улучшении несмещенных оценок и ее многомерное следствие. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке.
19. Критерий факторизации Неймана–Фишера, доказательство для дискретного случая. Примеры, нахождение оптимальной оценки параметра  $\theta > 0$  в случае выборки из  $U(0, \theta)$ .
20. Формула пересчета условных математических ожиданий по двум мерам. Критерий факторизации Неймана–Фишера в общем случае.
21. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе. Пример: нахождение оптимальных оценок параметров по выборке из  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ .
22. Доверительные интервалы и доверительные области. Метод центральной статистики, пример построения для  $U(0, \theta)$ . Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок. Пример построения для  $Bin(1, \theta)$ .

23. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Лемма об оптимальности в классе несмещенных линейных оценок. Несмещенная оценка для параметра дисперсии в линейной регрессионной модели.
24. Линейная гауссовская модель. Полная достаточная статистика в линейной гауссовской модели. Оптимальные оценки параметров в линейной гауссовской модели. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского случайного вектора. Распределения оптимальных оценок в линейной гауссовской модели.
25. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Доверительные интервалы и области для параметров гауссовской линейной модели. Пример гауссовской линейной модели: выборка из нормального распределения.
26. Проверка статистических гипотез, общие принципы и основные понятия: гипотеза, критерий, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго родов, функция мощности. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
27. Сравнение критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана–Пирсона для проверки простых гипотез. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев.
28. Семейства с монотонным отношением правдоподобия. Монотонность функции мощности для таких семейств. Теорема о монотонном отношении правдоподобия. Примеры: проверка гипотез с односторонними альтернативами для бернуллиевских и нормальных выборок.
29. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез.
30. Линейные гипотезы в линейной гауссовской модели,  $F$ -критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели. Пример: проверка однородности двух нормальных выборок.
31. Критерии согласия в дискретном случае. Статистика хи-квадрат Пирсона в полиномиальной схеме Бернулли с  $m$  исходами. Теорема Пирсона о сходимости статистики хи-квадрат. Критерий согласия хи-квадрат, его состоятельность.
32. Критерии согласия в непрерывном случае. Теорема Колмогорова о сходимости статистики  $\hat{D}_n$  (только первая часть док-ва). Критерий Колмогорова для проверки простой гипотезы о виде функции распределения, его состоятельность.

## Список литературы

- [1] А.А. Боровков, *Математическая статистика*, 4-е изд., Лань, Спб., 2010.
- [2] А.Н. Ширяев, *Вероятность-1*, 5-е изд., МЦНМО, М., 2011.

- [3] Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, *Математическая статистика*, Книжный дом “Либроком”, М., 2014.
- [4] Э. Леман, *Теория точечного оценивания*, Наука, М., 1991.
- [5] Б.А. Севастьянов, *Курс теории вероятностей и математической статистики*, 2-е изд., Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2004.
- [6] Ю.Н. Тюрин, *Математическая статистика. Записки лекций*, электронная версия.