

**Программа курса «Теория случайных процессов», экономический  
поток 3-го курса механико-математического факультета МГУ,  
первый семестр 2015 г..**

Лектор: В.Д. Конаков

1. Понятие случайного процесса и его распределения. Пространство вещественнозначных функций, цилиндрическая сигма-алгебра.
2. Сигма-алгебры,  $\pi$ -системы и системы Дынкина, связь между ними.
3. Определение случайного процесса как семейства случайных величин и как одного случайного элемента, их эквивалентность.
4. Конечномерные распределения. Теорема Каратеодори (б.д.). Первая теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями.
5. Условные математические ожидания, их основные свойства.
6. Гауссовские случайные векторы, их эквивалентные определения и основные свойства.
7. Процессы с независимыми приращениями (процессы Леви), определение, примеры. Пуассоновский процесс и его свойства.
8. Винеровский процесс, его свойства и различные конструкции.
9. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Мартингалы, связанные с пуассоновским процессом. Примеры.
10. Фильтрации, естественная фильтрация случайного процесса. Моменты остановки и их свойства. Примеры.
11. Теорема об остановке для ограниченных моментов остановки и мартингалов с дискретным временем. Неравенство для субмартингалов.
12. Теорема Дуба об остановке для мартингалов с непрерывным временем и непрерывными справа траекториями. Максимальное неравенство для мартингалов.

13. Гауссовские случайные процессы. Ковариационная функция  $K_{\xi}(s, t)$  случайного процесса  $\xi$  и ее свойства. Существование гауссовской случайной функции  $\xi_t$  с заданными  $M\xi_t = m(t)$  и  $K_{\xi}(s, t) = K(s, t)$ .
14. Стационарные процессы в узком и широком смысле. Непрерывность в среднем квадратическом, связь с непрерывностью ковариационной функции. Производная в среднем квадратическом случайного процесса.
15. Гильбертовы пространства, связанные со стационарным процессом. Разложение стационарного процесса на сингулярную и регулярную компоненты.
16. Теорема Г. Вольда. Примеры применения.
17. Теорема Бохнера для непрерывного и дискретного случаев («необходимость» б.д.). Спектральная мера стационарного процесса. Ортогональные случайные меры.
18. Интеграл по ортогональной случайной мере. Спектральное разложение стационарного в широком смысле процесса.
19. Стохастическая эквивалентность процессов. Вторая теорема Колмогорова о непрерывной модификации. Непрерывность траекторий винеровского процесса.
20. Квадратическая вариация, ее вычисление для винеровского процесса. Неограниченность (первой) вариации винеровского процесса.
21. Марковские процессы с конечным пространством состояний и непрерывным временем. Переходные матрицы, полугрупповое свойство. Стационарное распределение. Эргодическая теорема (б.д.).
22. Инфинитезимальная матрица. Прямая и обратная системы уравнений Колмогорова.
23. Прямая конструкция марковского процесса с непрерывным временем и конечным пространством состояний.

24. Конструкция стохастического интеграла по броуновскому движению. Класс подынтегральных функций  $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ . Примеры вычисления стохастических интегралов, исходя из определения.
25. Процессы, задаваемые стохастическими интегралами. Мартингальное свойство. Свойство непрерывности.