

Программа курса «Теория случайных процессов», экономический поток 3-го курса механико-математического факультета МГУ, осень 2014.

Лектор: В.Д. Конаков

1. Понятие случайного процесса и его распределения. Пространство вещественнозначных функций, цилиндрическая сигма-алгебра.
2. Определение случайного процесса как семейства случайных величин и как одного случайного элемента, их эквивалентность.
3. Конечномерные распределения. Теорема Каратеодори (б.д.). Теорема Колмогорова (б.д.).
4. Характеристические функции и их основные свойства. Теорема Бохнера (б.д.)
5. Гауссовские случайные векторы, их эквивалентные определения и основные свойства.
6. Процессы с независимыми приращениями (процессы Леви), определение, примеры. Пуассоновский процесс и его свойства.
7. Винеровский процесс, его свойства и различные конструкции.
8. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Мартингалы, связанные с пуассоновским процессом. Примеры.
9. Фильтрации, естественная фильтрация случайного процесса. Моменты остановки и их свойства. Примеры.
10. Теорема об остановке для ограниченных моментов остановки и мартингалов с дискретным временем. Неравенство для субмартингалов.
11. Теорема Дуба об остановке для мартингалов с непрерывным временем и непрерывными справа траекториями. Максимальное неравенство для мартингалов.

12. Гауссовские случайные процессы. Ковариационная функция $K_\xi(s, t)$ случайного процесса ξ и ее свойства. Существование гауссовской случайной функции ξ_t с заданными $M\xi_t = m(t)$ и $K_\xi(s, t) = K(s, t)$.
13. Стационарные процессы в узком и широком смысле. Непрерывность в среднем квадратическом, связь с непрерывностью ковариационной функции. Производная в среднем квадратическом случайного процесса.
14. Стохастическая эквивалентность процессов. Теорема Колмогорова о непрерывной модификации (б.д.). Непрерывность траекторий винеровского процесса.
15. Асимптотика траекторий винеровского процесса: оценка сверху. Квадратическая вариация. Неограниченность траекторий винеровского процесса.
16. Асимптотика траекторий винеровского процесса: оценка снизу. Закон повторного логарифма (б.д.).
17. Марковские процессы с конечным пространством состояний и непрерывным временем. Переходные матрицы, полугрупповое свойство. Стационарное распределение. Эргодическая теорема (б.д.).
18. Инфинитезимальная матрица. Прямая и обратная системы уравнений Колмогорова.
19. Прямая конструкция марковского процесса с конечным пространством состояний.
20. Конструкция стохастического интеграла по броуновскому движению. Класс подынтегральных функций $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Примеры вычисления стохастических интегралов, исходя из определения.
21. Процессы, задаваемые стохастическими интегралами. Мартингалное свойство. Свойство непрерывности.
22. Конструкция стохастического интеграла по броуновскому движению для класса подынтегральных функций $\mathcal{L}_{ad}(\Omega \times L^2[a, b])$. Свойства процессов, задаваемых стохастическими интегралами от функций из $\mathcal{L}_{ad}(\Omega \times L^2[a, b])$.
23. Формула Ито для функций от броуновского движения. Формула Ито в общем случае (б.д.).

24. Применения формулы Ито для вычисления стохастических интегралов.
25. Первое и второе неравенство Гронуола-Беллмана.
26. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ). Решение СДУ. Теорема существования и единственности решения. Примеры неединственности решения.