ТРЕТЬЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Задача 1. (II-V; 49, 39) Пусть A и B — события такие, что $0 < \mathsf{P}(A) < 1$ и $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B \mid A^c)$ (A^c обозначает дополнение к A). Верно ли, что A и B независимы?

Задача 2. **а)** (II-V; 31, 30) На некотором вероятностном пространстве заданы случайные величины X, Y, Z, причем Y стохастически мажорирует X, т.е. $\mathsf{P}(X \leqslant x) \geqslant \mathsf{P}(Y \leqslant x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что $Y + Z$ стохастически мажорирует $X + Z$?

б) (II-V; 6, 23) Верно ли предыдущее утверждение при дополнительном предположении, что X и Z независимы, а также Y и Z независимы?

Задача 3. (II-V; 33, 26) Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом, так что все 100! вариантов рассадки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), и.т.д. Найти математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в их число).

Задача 4. (II-V; 14, 16) Имеются 2 игральных кубика с гранями, помеченными числами $1, \ldots, 6$. Можно ли приписать граням каждого из кубиков вероятности выпадения (свои для каждого кубика) так, что при их одновременном бросании сумма выпавших чисел имеет равномерное распределение на множестве $\{2, \ldots, 12\}$?

Задача 5. (II; 0) Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем $\mathsf{E}|X + Y| < \infty$. Верно ли, что $\mathsf{E}|X| < \infty$?

Задача 6. (III-V; 0) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Дано, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} < \infty$ п.н. Верно ли, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \infty$ п.н.?

Задача 7. (II-V; 14, 19) На окружности выбрано борелевское множество A такое, что $\mu(A) = 2/3$, где μ — равномерная вероятностная мера на окружности (т.е. нормированная лебегова мера). Точки множества A закрашены красным цветом, а точки его дополнения — синим. Доказать, что в окружность можно вписать квадрат, у которого по меньшей мере 3 вершины красные.

Задача 8. (II-V; 0, 1) Пусть $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ — две последовательности случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Дано, что случайные величины X_n и Y_n независимы при каждом $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots$ сходится по вероятности к нулю. Доказать, что существуют числа $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ такие, что последовательность $X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots$ сходится по вероятности к нулю.

Задача 9. (III-V; 3) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, сходящаяся почти наверное к нулю, причем $|X_n| \leqslant 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ — под-σ-алгебры $\mathcal{F}$. Верно ли, что последовательность $\mathsf{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_1), \mathsf{E}(X_2 \mid \mathcal{G}_2), \ldots$ сходится почти наверное к нулю?

Задача 10. (II-V; 0, 0) На борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ единичной окружности задана некоторая вероятностная мера μ. Пусть X, Y — независимые случайные точки на окружности, имеющие распределение μ (т.е. $\mathsf{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mu(A)\mu(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{B}$). Обозначим через α величину угла между точками X и Y (так что α принимает значения в отрезке $[0, \pi]$). Доказать, что $\mathsf{P}(\alpha \leqslant 2\pi/3) \geqslant 1/2$.

В скобках после каждой задачи указаны курсы, на которых она предлагалась и число решивших ее студентов, сначала второкурсников, затем старшекурсников. Общее количество участников олимпиады по II курсу - 53 человека, по III-V курсам - 40 человек.