ВТОРАЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"
(IV–V курс)

Задача 1. (10) На столе лежат белая и черная шляпы с лотерейными билетами. Белая шляпа "лучше" в том смысле, что при вытаскивании из нее билета вероятность получить выигрышный билет выше, чем для черной шляпы. На другом столе лежат также белая и черная шляпы с лотерейными билетами, причем белая "лучше" в указанном выше смысле. Предположим, что билеты из обеих белых шляп объединили в одну большую белую шляпу, а билеты из двух черных шляп объединили в одну большую черную шляпу. Верно ли, что большая белая шляпа "лучше" большой черной в указанном выше смысле?

Задача 2. (8) Пусть $A, B, C_1, \ldots, C_n$ — события из некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\mathsf{P}(C_i) > 0$, $\mathsf{P}(A \mid C_i) \geqslant \mathsf{P}(B \mid C_i)$, причем $\bigcup_{i=1}^n C_i = \Omega$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$?

Задача 3. (4) Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты на 15-местный ряд в кинотеатре. Считая, что все 15! их возможных расположений по этим местам равновероятны, вычислить математическое ожидание числа пар соседей противоположного пола. (Например, при расположении "м,м,м,м,м,м,м,д,м,д,д,д,д,д,д" имеется 3 пары соседей противоположного пола.)

Задача 4. (3) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ — σ-алгебра, включающая все множества нулевой вероятности из $\mathcal{F}$, X — случайная величина. Известно, что для любой случайной величины Y, независимой с $\mathcal{G}$, случайные величины X и Y независимы. Верно ли, что X $\mathcal{G}$-измерима?

Задача 5. (7) Каково максимально возможное значение дисперсии случайной величины X, принимающей значения из отрезка $[0, 1]$?

Задача 6. **а)** (9) Последовательность случайных величин X_n сходится по вероятности к X. Верно ли, что последовательность S_n/n, где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, сходится по вероятности к X?

б) (4) Верно ли то же самое при дополнительном предположении $|X_n| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$?

Задача 7. (2) Пусть случайный вектор X^n имеет равномерное распределение на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. (Равномерное распределение характеризуется тем свойством, что оно инвариантно относительно ортогональных преобразований.) Пусть Y^n — проекция X^n на первую координатную ось. Доказать, что последовательность $\sqrt{n}Y^n$ слабо сходится к случайной величине, имеющей стандартное нормальное распределение.

Задача 8. (2) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые бернуллиевские случайные величины с распределением $\mathsf{P}(X_n = -1) = 1/3$, $\mathsf{P}(X_n = +1) = 2/3$. Можно ли найти вероятностную меру Q эквивалентную P такую, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ математическое ожидание по мере Q случайной величины X_n равно 0? (Меры P и Q называются эквивалентными, если множества меры 0 для них совпадают, т.е. $\mathsf{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{P}(A) = 0$.)

Задача 9. (2) На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (см. рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью 1/2, независимо от других мостов. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты? (В случае, показанном на рисунке 2, можно перейти с одного берега на другой; в случае же, показанном на рисунке 3, нельзя перейти с одного берега на другой.)

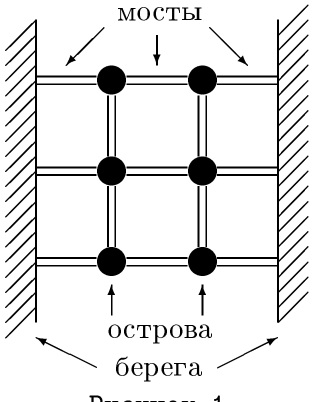

Рисунок 1

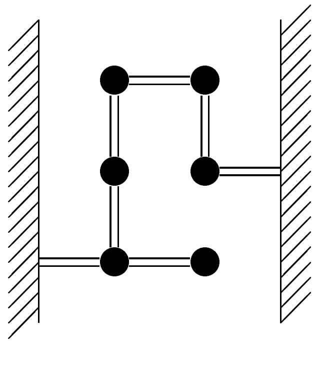

Рисунок 2

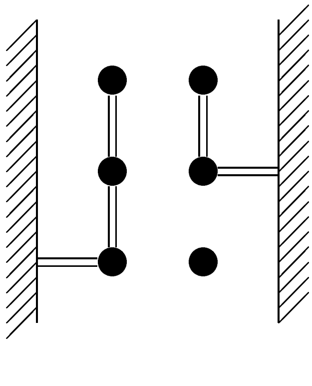

Рисунок 3

Число в скобках указывает число решивших данную задачу (всего было 13 участников).