ВТОРАЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"
(II–III курс)

Задача 1. (28) На столе лежат белая и черная шляпы с лотерейными билетами. Белая шляпа "лучше" в том смысле, что при вытаскивании из нее билета вероятность получить выигрышный билет выше, чем для черной шляпы. На другом столе лежат также белая и черная шляпы с лотерейными билетами, причем белая "лучше" в указанном выше смысле. Предположим, что билеты из обеих белых шляп объединили в одну большую белую шляпу, а билеты из двух черных шляп объединили в одну большую черную шляпу. Верно ли, что большая белая шляпа "лучше" большой черной в указанном выше смысле?

Задача 2. (24) Пусть $A, B, C_1, \ldots, C_n$ — события из некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\mathsf{P}(C_i) > 0$, $\mathsf{P}(A \mid C_i) \geqslant \mathsf{P}(B \mid C_i)$, причем $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$?

Задача 3. (6) Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты на 15-местный ряд в кинотеатре. Считая, что все 15! их возможных расположений по этим местам равновероятны, вычислить математическое ожидание числа пар соседей противоположного пола. (Например, при расположении "м,м,м,м,м,м,м,д,м,д,д,д,д,д,д" имеется 3 пары соседей противоположного пола.)

Задача 4. а) (10) Пусть K — единичная окружность, P — вероятностная мера на K такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathsf{P}$, где φ_α обозначает поворот K на угол α, а $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ обозначает образ меры P при отображении φ_α, т.е. $(\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1})(A) = \mathsf{P}(\varphi_\alpha^{-1}(A))$. Доказать, что P совпадает с нормированной мерой Лебега.

б) (6) Доказать то же самое, предполагая лишь, что существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ и $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathsf{P}$.

Задача 5. а) (23) Пусть X — случайная величина такая, что $\mathsf{P}(X \neq 0) > 0$. Предположим, что для некоторых чисел a и b случайные величины aX и bX совпадают по распределению (т.е. их функции распределения совпадают). Верно ли, что $a = b$?

б) (14) Верно ли то же самое при дополнительном предположении $a, b \geqslant 0$?

Задача 6. (2) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ — σ-алгебра, включающая все множества нулевой вероятности из $\mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$ — событие. Известно, что для любого события B, независимого с $\mathcal{G}$, события A и B независимы. Верно ли, что $A \in \mathcal{G}$?

Задача 7. (3) Каково максимально возможное значение дисперсии случайной величины X, принимающей значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$?

Задача 8. (3) На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (см. рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью $1/2$, независимо от других мостов. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты? (В случае, показанном на рисунке 2, можно перейти с одного берега на другой; в случае же, показанном на рисунке 3, нельзя перейти с одного берега на другой.)

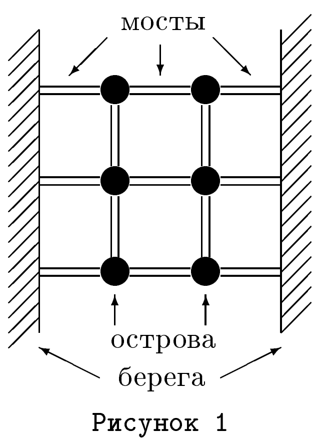

Рисунок 1

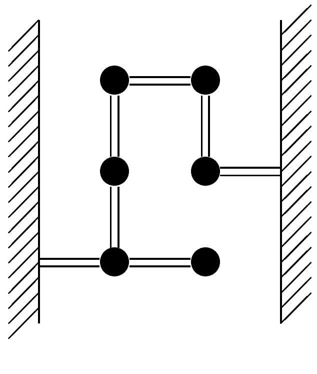

Рисунок 2

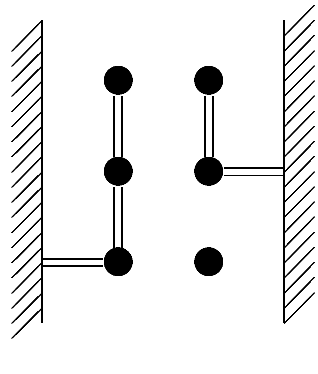

Рисунок 3

Число в скобках указывает число решивших данную задачу (всего было 29 участников).