СПИСОК ЗАДАЧ ПЕРВОЙ "КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Задача 1.(18) Пусть $X = (X^1, X^2)$ — двумерная случайная величина, являющаяся непрерывной, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}^2$ $\mathsf{P}(X = x) = 0$. Верно ли, что ее функция распределения $F(x^1, x^2) = \mathsf{P}(X^1 \leqslant x^1, X^2 \leqslant x^2)$ непрерывна?

Задача 2.(9) Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайные величин, сходящаяся по вероятности (при $n \to \infty$) к случайной величине X. Доказать, что X является вырожденной случайной величиной, т.е. существует $x \in \mathbb{R}$ такое, что $X = x$ п.н.

Задача 3.(7) Привести пример четырех зависимых случайных событий A_1, A_2, A_3, A_4 таких, что любые три из них взаимно независимы.

Задача 4. а)(9) Пусть X, Y — случайные величины с $\mathsf{E}X^2 < \infty$, $\mathsf{E}Y^2 < \infty$ такие, что $\mathsf{E}(X \mid Y) = Y$, $\mathsf{E}(Y \mid X) = X$. Доказать, что $X = Y$ п.н.

б)(0) Пусть X, Y — случайные величины с $\mathsf{E}|X| < \infty$, $\mathsf{E}|Y| < \infty$ такие, что $\mathsf{E}(X \mid Y) \geqslant Y$, $\mathsf{E}(Y \mid X) \geqslant X$. Доказать, что $X = Y$ п.н.

Задача 5.(7) Пусть $(\mathsf{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вероятностных мер на вещественной прямой такая, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mathsf{P}_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Следует ли отсюда слабая сходимость $\mathsf{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \delta_0$, где δ_0 — дельта-мера, сосредоточенная в нуле?

Задача 6.(3) Пусть P, Q — две неотрицательные конечные меры на $\mathbb{R}$, не имеющие атома в нуле (т.е. $\mathsf{P}(\{0\}) = 0$, $\mathsf{Q}(\{0\}) = 0$). Известно, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \big(e^{i\lambda x} - 1\big) \mathsf{P}(dx) = \int_{\mathbb{R}} \big(e^{i\lambda x} - 1\big) \mathsf{Q}(dx).$$

Следует ли отсюда, что $\mathsf{P} = \mathsf{Q}$?

Задача 7.(1) Пусть X — ограниченная случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Пусть $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{H}_n$ — три последовательности σ-алгебр, принадлежащих $\mathcal{F}$. Известно, что существует случайная величина Y такая, что

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} Y, \quad \mathsf{E}(X \mid \mathcal{H}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} Y.$$

Доказать, что $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} Y$.

Задача 8.(6) Случайная величина X называется безгранично делимой, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1^n, \dots, X_n^n$ такие, что $X_1^n + \dots + X_n^n$ совпадает по распределению с X. Доказать, что случайная величина с плотностью распределения $p(x) = |x| I(|x| \leqslant 1)$ не является безгранично делимой.

Число в скобках указывает число решивших данную задачу (всего было 23 участника).