ДВЕНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Решения задач

Задача 1. Пусть X и Y — н.о.р. неотрицательные случайные величины с конечной дисперсией. Верно ли, что $\mathsf{D}\min\{X,Y\} \le \mathsf{D}X$?

Решение. Неверно. Рассмотреть две бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха p. Тогда их минимум — тоже бернуллиевская случайная величина с вероятностью успеха p^2. Следовательно, неравенство из условия задачи эквивалентно неравенству

$$p^2(1-p^2) \le p(1-p) \Leftrightarrow p(1+p) \le 1,$$

но последнее соотношение не выполняется при p, близких к 1.

Задача 2. Пусть X и Y — дискретные случайные величины на общем вероятностном пространстве, причем известны все условные вероятности $\mathsf{P}(X = x|Y = y)$ и $\mathsf{P}(Y = y|X = x)$ (при всех $x, y \in \mathbb{R}$, для которых они определены). Верно ли, что можно однозначно определить совместное распределение X и Y?

Решение. Неверно. Рассмотреть две совпадающие случайные величины.

Задача 3. На отрезок $[0,1]$ случайным образом бросают n точек. Для каждой из точек равновероятно и независимо от ее положения выбирается направление движения (вправо или влево). Затем точки одновременно начинают движение со скоростью 1. Все столкновения точек абсолютно упругие (т.е. после столкновения каждая из двух точек начинает движение в противоположном направлении с той же скоростью), а при достижении границы отрезка точка к ней прилипает. Найти математическое ожидание момента, когда прилипнет последняя точка.

Решение. Можно сразу считать, что при столкновении точки не отражаются друг от друга, а проходят насквозь, сохраняя скорость. Рассматриваемая случайная величина $\tau = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, где X_i — время, в которое прилипнет i-я точка. Если Z_i — стартовое положение i-й точки, то при $x \in (0,1)$ имеем

$$\mathsf{P}(X_1 \le x) = \mathsf{P}(Z_1 \le x, \text{ движение влево}) + \mathsf{P}(Z_1 \ge 1-x, \text{ движение влево}) = \frac{\mathsf{P}(Z_1 \le x) + \mathsf{P}(Z_1 \ge 1-x)}{2} = x,$$

т.е. распределение равномерное. Поэтому $\mathsf{E}\tau = \int_0^1 x\,dx^n = n/(n+1)$.

Задача 4. Найти $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} (x_1^5 + \ldots + x_n^5)/(x_1^4 + \ldots + x_n^4)dx$.

Решение. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, равномерно распределенные на $[0,1]$. По закону больших чисел

$$\frac{(X_1^5 + \ldots + X_n^5)/n}{(X_1^4 + \ldots + X_n^4)/n} \to \frac{\mathsf{E}X_1^5}{\mathsf{E}X_1^4} = \frac{5}{6}$$

по вероятности, $n \to \infty$. Так как случайные величины в левой части неотрицательны и не превышают 1, то математическое ожидание левой части сходится к тому же пределу.

Задача 5. Вероятностная мера μ на числовой прямой задается следующим образом: $\mu([0,1]) = 1$, $\mu([0,1/3]) = \mu([2/3,1]) = 1/2$, $\mu([0,1/9]) = \mu([2/9,1/3]) = \mu([2/3,7/9]) = \mu([8/9,1]) = 1/4$ и т.д. Пусть случайная величина X имеет распределение μ. Найти дисперсию X.

Решение. Очевидно, $\mathsf{E}X = 1/2$. Далее, пусть случайная величина η не зависит от X и принимает значения 0 и 1 с вероятностями 1/2. Тогда X распределена так же, как случайная величина

$$\eta\frac{X}{3} + (1-\eta)\left(\frac{2}{3} + \frac{X}{3}\right).$$

Возводя в квадрат и взяв математические ожидания обеих случайных величин, получаем равенство

$$\mathsf{E}X^2 = \mathsf{E}(\eta\frac{\mathsf{E}X^2}{9} + (1-\eta)\frac{\mathsf{E}(2+X)^2}{9}),$$

$$18\mathsf{E}X^2 = \mathsf{E}X^2 + 4 + 2 + \mathsf{E}X^2,$$

так что $\mathsf{E}X^2 = 3/8 \Rightarrow \mathsf{D}X = 1/8$.

Задача 6. Пусть $S_0 = 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, где н.о.р. случайные величины $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ принимают значения 1 и -1 с вероятностями $1/2$. Найти математическое ожидание момента $\tau = \inf\{k > 0 : \max_{i\le k} S_i - \min_{i\le k} S_i = m\}$ (при $m \in \mathbb{N}$).

Решение. Назовем размахом случайного блуждания величину $\max_{i\le k} S_i - \min_{i\le k} S_i$, и пусть τ_n — момент, когда размах становится равен n. Пусть в момент τ_{n-1}, для определенности, последний шаг случайного блуждания был вверх и достигнут уровень k. Тогда момент τ_n наступит тогда, когда блуждание первый раз либо выйдет на уровень $k+1$, либо первый раз опустится на уровень $k-n$. Симметричная картина будет, если последний шаг был вниз. Итак, $\tau_n - \tau_{n-1}$ распределено как время выхода симметричного блуждания из полосы $(-1, n)$.

Пусть σ_m — это среднее время выхода симметричного случайного блуждания, начинающего движение из точки m, из полосы (a, b) (здесь $a < 0 < b$, $a \le m \le b$). Тогда

$$\sigma_a = \sigma_b = 0, \quad \sigma_k = 1 + \frac{\sigma_{m-1} + \sigma_{m-1}}{2}, \; a < m < b.$$

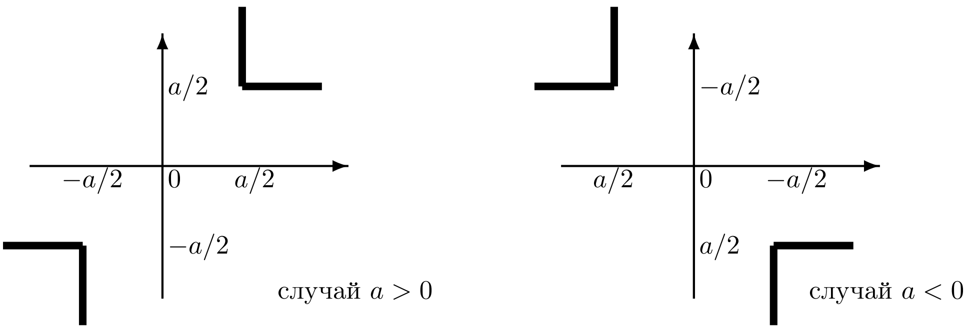
Решение этого разностного уравнения (либо решить непосредственно, либо см. учебник Ширяева) имеет вид

$$\sigma_m = (b - m)(m - a).$$

Следовательно, $\mathsf{E}(\tau_n - \tau_{n-1}) = n$ и $\mathsf{E}\tau_n = n(n+1)/2$.

Задача 7. Пусть X и Y — н.о.р. случайные величины с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\mathsf{E}|X - Y| \le \mathsf{E}|X + Y|$.

Решение (в общем случае). Рассмотрим множества уровня функции $f(x, y) = |x + y| - |x - y|$.



Следовательно, при $x > 0$

$$\mathsf{P}(|X+Y| - |X-Y| \ge x) = \mathsf{P}(X > x/2, Y > x/2) + \mathsf{P}(X < -x/2, Y < -x/2) = \mathsf{P}(X > x/2)^2 + \mathsf{P}(X < -x/2)^2,$$

и

$$\mathsf{P}(|X+Y| - |X-Y| \le -x) = \mathsf{P}(X > x/2, Y < -x/2) + \mathsf{P}(X < -x/2, Y > x/2) = 2\mathsf{P}(X > x/2)\mathsf{P}(X < -x/2).$$

Отсюда видно, что

$$\mathsf{E}(|X+Y| - |X-Y|) = \int_0^\infty (\mathsf{P}(|X+Y| - |X-Y| \ge x) - \mathsf{P}(|X+Y| - |X-Y| \le -x))dx =$$

$$= \int_0^\infty (\mathsf{P}(X > x/2) - \mathsf{P}(X < -x/2))^2 dx \ge 0.$$

Задача 8. Пусть $f(t)$ есть четная 2π - периодическая функция, обладающая следующими свойствами: на отрезке $[0, 2\pi]$ ее график совпадает с графиком квадратного трехчлена, причем $f(0) = 1$. Определить, при каких $f(\pi)$ функция f является характеристической функцией некоторого распределения, и найти это распределение.

Решение. Прежде всего заметим, что если такое распределение есть и ξ — соответствующая случайная величина, то она целочисленная (так как $f(2\pi) = 1 = \mathsf{E}\cos 2\pi\xi$). В силу четности f и того, что $f(0) = f(2\pi) = 1$, имеем

$$f(t) = a(t-\pi)^2 + 1 - a\pi^2 = at^2 - 2a\pi t + 1, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Пусть $p_k = \mathsf{P}(\xi = k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \cos tk$. Вычисляя коэффициенты Фурье, имеем

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(at^2 - 2a\pi t + 1)dt = \frac{8a\pi^3/3 - 4a\pi^3 + 2\pi}{2\pi} = 1 - \frac{2a\pi^2}{3},$$

а при $k \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos tkdt = \frac{1}{k}f(t)\sin tk\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin tkdt =$$

$$= \frac{1}{k^2}f'(t)costkdt\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos tkdt = \frac{4a\pi}{k^2},$$

так как вторая производная постоянна. Следовательно,

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos tkdt = \frac{2a}{k^2}.$$

Видно, что эти числа задают вероятностное распределение, если $a \in [0, 3/2\pi^2]$. При этом $\mathsf{P}(\xi = k) = 4a/k^2$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Остается заметить, что при таких значениях a имеем $f(\pi) = 1 - a\pi^2 \in [-1/2, 1]$.

Задача 9 (3-5). Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Доказать, что его максимум на отрезке $[0, 1]$ с вероятностью единица достигается в единственной точке.

Решение. Пусть для некоторого элементарного исхода условие не выполнено. Тогда найдутся такие рациональные $a, b, c, d \in [0, 1]$, что $a < b \leq c < d$ и $\sup_{t\in[a,b]} W(t) = \sup_{t\in[c,d]} W(t)$. Поэтому достаточно проверить, что для фиксированных a, b, c, d вероятность описанного события равна нулю. Пусть $B(s) = W(c+s) - W(c)$, $s \geq 0$. Тогда B — винеровский процесс, не зависящий от всех значений W до момента s. Обозначая μ совместное распределение величин $\sup_{t\in[a,b]} W(t)$ и $W(c)$, имеем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[a,b]} W(t) = \sup_{t\in[c,d]} W(t)\right) = \mathsf{E}\mathbb{I}\left(\sup_{t\in[a,b]} W(t) = W(c) + \sup_{s\in[0,d-c]} B(t)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{P}\left(x - y = \sup_{s\in[0,d-c]} B(t)\right)\mu(dx\,dy) = 0$$

по теореме Фубини.