ОДИННАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Решения задач

Задача 1. Пусть $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$. Вектор $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$ — это значения случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, упорядоченные по возрастанию. Доказать, что $\sum_{i=1}^n f(X_{(i)})(X_{(i)}-X_{(i-1)})\to\int_0^1 f(x)dx$ при $n\to\infty$, с вероятностью единица (здесь $X_{(0)}:=0$).

Решение. Это риманова интегральная сумма (без последнего слагаемого), поэтому достаточно доказать, что диаметр разбиения $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$ стремится к нулю п.н. Диаметр разбиения — монотонная (по n) последовательность случайных величин, так что достаточно доказать сходимость по вероятности. Но

$$\mathsf{P}(\text{ диаметр больше } 3/m)\le$$

$$\mathsf{P}\left(\cup_{i=1}^m\left\{X_1\notin\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right],\ldots,X_n\notin\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right]\right\}\right)\le m(1-1/m)^n\to 0,\ n\to\infty.$$

Задача 2. Летящий в пространстве по случайной прямой метеорит сталкивается с неподвижной шарообразной планетой. Точка пересечения указанной прямой с перпендикулярным ей центральным сечением планеты равномерно распределена на этом сечении. Найти математическое ожидание угла падения.

Решение. Пусть этот угол равен ξ. Можно считать, что радиус планеты равен 1. Тогда косинус рассматриваемого угла равен расстоянию от центра планеты до точки пересечения прямой с перпендикулярным центральным сечением. Поэтому

$$\mathsf{P}(\cos\xi<x)=x^2,\ x\in(0,1).$$

Следовательно, плотность этой случайной величины равна $2xI(0<x<1)$, и мы имеем

$$\mathsf{E}\xi=\mathsf{E}\arccos(\cos\xi)=\int_0^1 2\arccos x x dx=||x=\cos t||=\int_0^{\pi/2}2t\cos t\sin t dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}t\sin 2t dt==-t\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{4}.$$

Задача 3. Пусть X — интегрируемая случайная величина, и $\varphi(x)=\mathsf{E}|X-x|$, $x\in\mathbb{R}$. Верно ли, что функция φ однозначно определяет распределение X, если **а)** X имеет непрерывную плотность, **б)** X необязательно имеет непрерывную плотность.

Решение (общее для обоих пунктов). Пусть F — функция распределения X. Имеем

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\int_{\mathbb{R}}\frac{|z-x-h|-|z-x|}{h}dF(z).$$

Дробь под интегралом ограничена и стремится к $sgn(x-z)$ для всех $z \neq x$. Поэтому, если в точке x функция F непрерывна, то φ дифференцируема в x (по теореме Лебега) и ее производная равна

$$\int_{\mathbb{R}} sgn(x-z)dF(z) = \int_{-\infty}^{x} dF(z) - \int_{x}^{\infty} dF(z) = \mathsf{P}(X \leq x) - \mathsf{P}(X \geq x) = 2F(x) - 1.$$

Если известно, что есть непрерывная плотность, то эту производную можно взять просто дифференцированием интеграла по верхнему пределу.

Задача 4. Случайным образом выбирается перестановка n элементов. Найти математическое ожидание суммы квадратов длин ее циклов.

Решение. Пусть Z — рассматриваемая случайная величина, а Y_k — это длина того цикла, в который входит элемент k. Тогда $Z = Y_1 + \ldots + Y_k$. Следовательно,

$$\mathsf{E}Z = n\mathsf{E}Y_1 = n\sum_{k=1}^{n} k\mathsf{P}(Y_1 = k).$$

Всего перестановок $n!$. Перестановок, при которых $Y_1 = k$, имеется $C_{n-1}^{k-1}(k-1)!(n-k)! = (n-1)!$. Таким образом

$$\mathsf{E}Z = n\sum_{k=1}^{n} k\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 5. Пусть $S_0 = 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, где н.о.р. случайные величины $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и q, и $p < q$. Доказать, что $\mathsf{E}(\sup_{n\geq 0} S_n)^2 < \infty$.

Решение. Вероятности $r_k = \mathsf{P}(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k)$ экспоненциально убывают с ростом $k \to \infty$, поэтому второй момент существует. Действительно, при $k \geq 1$

$$r_k = pr_{k-1} + qr_{k+1}.$$

Корни характеристического уравнения равны 1 и p/q, поэтому $r_k = C_1 + C_2(p/q)^k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу усиленного закона больших чисел $\mathsf{P}(S_n \geq 0\text{беск. ч.}) = 0$, поэтому $C_1 = 0$.

Задача 6 (3-5). Пусть $\{M_n, n \geq 0\}$ — неотрицательный мартингал. Доказать, что попав в нуль, он с вероятностью единица из него не выйдет (т.е. $\mathsf{P}(\cup_{k<n}\{M_k = 0, M_n > 0\}) = 0$).

Решение. Рассмотрим марковский момент $\tau = \inf\{k \geq 0 : M_k = 0\}$. При каждом $n \geq 0$ в силу теоремы Дуба $\mathsf{E}(M_n - M_{n\wedge\tau}) = 0$. Случайная величина в скобках неотрицательна, поэтому она равна нулю п.н.

Задача 7. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $X_1^{(n)}, \ldots, X_{n+1}^{(n)}$ — н.о.р. случайные величины, принимающие с равными вероятностями значения $1, \ldots, n$. Пусть τ_n — это первый номер $i \in \{2, \ldots, n+1\}$, для которого в наборе $\{X_1^{(n)}, \ldots, X_i^{(n)}\}$ присутствуют хотя бы два совпадающих значения. Доказать, что последовательность $\tau_n/\sqrt{n}$ сходится по распределению к некоторой случайной величине Y, и найти ее плотность.

Решение. Пусть $x > 0$ и $k = k(n) = [x\sqrt{n}]$. Имеем

$$\mathsf{P}(\tau_n/\sqrt{n} > x) = \mathsf{P}(\tau_n > k) = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) == \exp\left\{\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)\right\}.$$

При $|t| \leq 1/2$ справедливо соотношение $\ln(1-t) = -t + \alpha(t)$, где $|\alpha(t)| \leq ct^2$, $c > 0$. Следовательно, для достаточно больших n

$$-\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{n} + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(\frac{i}{n}\right).$$

Вторая сумма по модулю не больше $cn^{-2}\sum_{i=1}^{k-1} i^2 \leq ck(n)^3/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а первая равна $(k(n)^2 - k(n))/2 \sim x^2/2$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\mathsf{P}(Y > x) = e^{-x^2/2}$, плотность равна $xe^{-x^2/2}$.

Задача 8. Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, тождественно не равные нулю, $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. Тогда радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$ с вероятностью единица равен 1 (это следует из формулы Коши-Адамара и леммы Бореля-Кантелли), и, следовательно, этот ряд п.н. сходится к непрерывной на $[0,1)$ функции $G(z,\omega)$. Можно ли взять распределение X_0 так, чтобы функция G с вероятностью единица была продолжаема до непрерывной на отрезке $[0,1]$?

Решение. Допустим, что взять так X_0 можно. Пусть $\varphi(t,z) = \mathsf{E}e^{itG(z)}$. По нашему предположению эта функция непрерывна по $(t,z) \in \mathbb{R}\times[0,1]$. С другой стороны,

$$\varphi(t,z) = \mathsf{E}e^{itG(z)} = \mathsf{E}\exp\{it\sum_{n=0}^{\infty} z^n X_n\} = \mathsf{E}e^{itX_0}\mathsf{E}\exp\{it\sum_{n=1}^{\infty} z^n X_n\} =$$

$$= \mathsf{E}e^{itX_0}\mathsf{E}\exp\{itz\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}X_n\} = \mathsf{E}e^{itX_0}\varphi(tz,z).$$

Если взять предел при $z \nearrow 1$, то в силу непрерывности

$$\varphi(t,1) = \mathsf{E}e^{itX_0}\varphi(t,1).$$

Так как $\varphi(0,1) = 1$, то левая часть не равна нулю при $|t| \leq \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Но тогда $\mathsf{E}e^{itX_0} = 1$ для таких t, что невозможно (например, так как тогда $\mathsf{E}(1 - \cos X_0 t) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}(X_0 = 2\pi m/t,\, m \in \mathbb{Z}) = 1$).

Задача 9. N детей выбирают водящего в игре. Для этого они становятся в круг, в соответствии со списком фамилий по алфавиту, и каждый(ая) показывает случайное число пальцев (от 0 до 5, с равными вероятностями). Затем по часовой стрелке отсчитывается (считая с того, кто первый в списке) столько шагов, сколько всего пальцев показано. Верно ли, что вероятности всех детей стать водящим одинаковы, если **а)** $N = 3$, **б)** $N = 24$?

Решение. Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — число пальцев, показанное $1, \ldots, N$-м детьми, а $S = X_1 + \ldots + X_N$. Тогда номер ребенка, которому выпало водить, равен $S \mod N + 1$.

а) Положим $\widetilde{X_1} = (X_1 + 1) \mod 6$. Вектор $(\widetilde{X_1}, X_2, X_3)$ распределен так же, как вектор (X_1, X_2, X_3). С другой стороны, так как $(a \mod 6) \mod 3 = a \mod 3$ при целом a, то

$$(\widetilde{X_1} + X_2 + X_3) \mod 3 = (X_1 + 1) \mod 3 + (X_2 + X_3) \mod 3 = (S + 1) \mod 3.$$

Итак, вероятность того, что водящим окажется номер 1, равна вероятности того, что это будет номер 2. Аналогично доказывается, что с первыми двумя вероятностями совпадает третья.

б) Вычислим характеристическую функцию $S:$

$$\mathsf{E}e^{itS} = (\mathsf{E}e^{itX_1})^N = \left(\frac{1 + e^{it} + \dots e^{5it}}{6}\right)^N = \left(\frac{e^{6it-1}}{6^N(e^{it} - 1)}\right)^N$$

для всех t, для которых знаменатель не равен нулю. Далее, $S = S \mod N + [S/N]N$. Имеем

$$\mathsf{E}e^{itS} = \mathsf{E}\exp\{it(S \mod N)\}e^{itN[S/N]}.$$

Если $t = 2\pi/N$, то второй множитель равен нулю, и мы получаем

$$\mathsf{E}e^{2\pi iS/N} = \mathsf{E}\exp\{it(S \mod N)\}.$$

Допустим, что $S \mod N$ равномерно распределена на множестве $\{0, \dots, N-1\}$. Тогда

$$\mathsf{E}\exp\{it(S \mod N)\} = \frac{e^{Nit} - 1}{N(e^{it} - 1)}.$$

При $t = 2\pi i/N$ последнее выражение равно нулю. Значит, $\mathsf{E}e^{2\pi iS/N} = 0$, но это противоречит явному выражению, полученному выше.

Задача 10. Пусть X — случайная величина, $X \geq 0$. Доказать, что $\mathsf{E}X^4\mathsf{E}X^8 \leq \mathsf{E}X^3\mathsf{E}X^9$.

Решение. Рассмотрим случайную величину Y с функцией распределения

$$\mathsf{P}(Y \leq x) = \frac{\mathsf{E}X^3 I\{X \leq x\}}{\mathsf{E}X^3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда при $a \geq 3$ имеем $\mathsf{E}X^a = \mathsf{E}Y^{a-3}$. Следовательно, требуемое неравенство превращается в неравенство $\mathsf{E}Y\mathsf{E}Y^5 \leq \mathsf{E}Y^6$. Но оно сразу следует из неравенства Гельдера.