Задача 1

Пусть случайные величины X и U независимы, а U распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Доказать, что дробная часть $\{X+U\}$ распределена так же, как U.

Решение. Если X — константа, то утверждение очевидно. Обозначая F_X функцию распределения X, по теореме Фубини для любого $y \in (0,1)$ имеем

$$\mathsf{P}(\{X+U\} < y) = \mathsf{E} I\Big\{\{X+U\} < y\Big\} = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E} I\Big\{\{x+U\} < y\Big\} dF_X(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\Big\{\{x+U\} < y\Big\} dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} y dF_X(x) = y.$$

Задача 2

Пусть последовательность случайных величин $\{T_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ принимающих только натуральные значения, такова, что $T_n \to \infty$ п.н., $n \to \infty$, а случайные величины $X_1, X_2, \ldots,$ заданные на том же вероятностном пространстве, что и $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, сходятся по распределению к случайной величине X. а) Верно ли, что $X_{T_n} \to X$ по распределению, когда $n \to \infty$? б) Тот же вопрос, если последовательности $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы.

Решение.

а) Неверно. Рассмотреть последовательность независимых $X_1, X_2, \ldots,$ принимающих значения ± 1 с равными вероятностями, и положить $T_0 = 1$, $T_n = \inf\{k > T_{n-1} : X_k = 1\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $X_{T_n} \equiv 1$.

б) Верно. Воспользуемся, например, характеристическими функциями. Имеем

$$\mathsf{E} e^{itX_{T_n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} e^{itX_k} I\{T_n = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} e^{itX_k} \mathsf{P}(T_n = k),\ t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\left|\mathsf{E} e^{itX_{T_n}} - \mathsf{E} e^{itX}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} (\mathsf{E} e^{itX_k} - \mathsf{E} e^{itX}) \mathsf{P}(T_n = k)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \mathsf{P}(T_n = k) + \mathsf{P}(T_n > N) \sup_{k > N} |\mathsf{E} e^{itX_k} - \mathsf{E} e^{itX}|,\ \ N \in \mathbb{N}.$$

Для любого $\delta > 0$ выбором N можно верхнюю грань во втором слагаемом сделать меньше δ. Но при фиксированном N первое слагаемое стремится к нулю.

Задача 3

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, принимающие значения -1 и 1, и $\mathsf{P}(X_1 = 1) = p$. Обозначим Y_n — число серий одного знака в последовательности $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Доказать, что существует предел $\lim_{n\to\infty} Y_n/n$ (по вероятности) и найти его.

Решение. Пусть $\xi_n = I\{X_n X_{n+1} = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ т.е. ξ_n равно 1, когда между точками n и $n+1$ начинается новая серия, и 0 иначе. Положим $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n$. Тогда $|Y_n - Z_n| \le 1$, так что можно заменить Y на Z. Последовательности $\{\xi_1, \xi_3, \ldots\}$ и $\{\xi_2, \xi_4, \ldots\}$ состоят из н.о.р. случайных величин, равных 1 и 0 с вероятностями $2pq$ и $1 - 2pq$ соответственно, так что

$$\frac{Z_n}{n} = n^{-1} \sum_{1 \le k \le n,\, k \text{ четно}} \xi_i + n^{-1} \sum_{1 \le k \le n,\, k \text{ нечетно}} \xi_i \to 2pq.$$

Задача 4

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots$ гауссовские и $X_n \to X$ п.н., $n \to \infty$. Доказать, что сходимость имеет место и в среднем квадратическом.

Решение. Пусть $a_n = \mathsf{E}X_n$, $\sigma_n^2 = \mathsf{D}X_n$. Рассматривая абсолютные величины характеристических функций, видим, что $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0$. Поэтому $X_n - a_n \to N(0, \sigma^2)$ по распределению. Но тогда последовательность a_n также имеет предел, так что $\lim_{n\to\infty} X_n = X \sim N(a, \sigma^2)$. Можно сразу считать, что $a_n = a = 0$. Заметим, что

$$\mathsf{E}(X_n - X)^4 \leq 16(\mathsf{E}X_n^4 + \mathsf{E}X_n^4) \leq 48(\sigma_n^4 + \sigma^4) \leq C$$

для некоторого $C > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для произвольного $M > 0$ имеем

$$\mathsf{E}(X_n - X)^2 \leq \mathsf{E}(X_n - X)^2 I\{|X_n - X| \leq M\} + \mathsf{E}(X_n - X)^2 I\{|X_n - X| > M\} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}(X_n - X)^2 I\{|X_n - X| \leq M\} + \frac{C}{M^2}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю по теореме Лебега, а второе можем сделать сколь угодно малым, выбирая M.

Задача 5

Пусть X – положительная случайная величина, причем $\mathsf{E}X^2 < \infty$, а функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ выпукла вверх. Тогда справедливо неравенство $\mathsf{E}Xf(X) \leq f(\mathsf{E}X^2/(\mathsf{E}X)^2)$.

Решение. Пусть случайная величина X имеет плотность p_X. Введем функцию $p_Y(x) = xp_X(x)/\mathsf{E}X$; это плотность положительной случайной величины. Для случайной величины Y с такой плотностью по неравенству Иенсена $\mathsf{E}f(Y) \leq f(\mathsf{E}Y)$, после раскрытия интеграла получаем требуемое неравенство.

Задача 6

Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р. случайные величины, не равные тождественно нулю. Доказать существование такой функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что радиус сходимости степенного ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$ (с вероятностью 1) равен 0 или 1 в зависимости от того, конечно ли $\mathsf{E}h(|X_1|)$, и привести пример такой функции.

Решение. По формуле Адамара радиус сходимости — это число, обратное к $\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$. По лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}(|X_n|^{1/n} > a$ беск. часто) равна 0 или 1 в зависимости от того, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_n|^{1/n} > a) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X| > a^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\ln|X| > n \ln a).$$

Если $a \leq 1$, то общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. Если же $a > 1$, то сходимость такого ряда, как известно, эквивалентна конечности математического ожидания $\mathsf{E}\ln(|X| + 1)$.

Задача 7

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н.о.р. k-мерные случайные векторы с распределением $N(a, B)$ (где $a \in \mathbb{R}^k$, а матрица B строго положительно определена; все параметры неизвестны). Построить оценки максимального правдоподобия а) для a; б) для B.

Решение. Составим логарифмическую функцию правдоподобия (с точностью до константы)

$$L(a, B) = n \ln \det B + \sum_{j=1}^{n} (B^{-1}(X_j - a), X_j - a).$$

а) для любой положительно определенной матрицы Q имеем

$$\frac{\partial}{\partial a^i}\sum_{j=1}^n (Q(X_j-a), X_j-a) = \sum_{j=1}^n Q(X_j-a)^{(i)} = 0,\ i=1,\dots,n,$$

(верхние индексы в скобках обозначают компоненты вектора), следовательно, $\hat a = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j = \overline{X}$.

б) Обозначим $Q = B^{-1}$, тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$n\ln\det Q - \sum_{j=1}^n (QY_j, Y_j),$$

где $Y_j = X_j - \overline{X}$.

Найдем производную по диагональному элементу матрицы Q, например, по q_{11} :

$$\frac{\partial}{\partial q_{11}}(n\ln\det Q - \sum_{j=1}^n (QY_j, Y_j)) = n\frac{(\det Q)'_{q_{11}}}{\det Q} - \sum_{j=1}^n (Y_j^{(1)})^2 =$$

$$= \frac{n}{\det Q}M_{11} - \sum_{j=1}^n (Y_j^{(1)})^2 = nb_{11} - \sum_{j=1}^n (Y_j^{(1)})^2,$$

где M_{11} — алгебраическое дополнение элемента q_{11}.

Аналогично для внедиагонального элемента, скажем для q_{12}, с учетом симметричности матрицы имеем

$$\frac{\partial}{\partial q_{12}}(n\ln\det Q - \sum_{j=1}^n (QY_j, Y_j)) = n\frac{(\det Q)'_{q_{12}}}{\det Q} - 2\sum_{j=1}^n Y_j^{(1)}Y_j^{(2)} =$$

$$= 2\frac{n}{\det Q}M_{12} - 2\sum_{j=1}^n Y_j^{(1)}Y_j^{(2)} = 2nb_{12} - 2\sum_{j=1}^n Y_j^{(1)}Y_j^{(2)}.$$

Приравнивая частные производные к нулю и сокращая на 2, видим, что получилось матричное уравнение

$$n\hat B = \sum_{j=1}^n Y_jY_j^T,$$

откуда находится $\hat B$.

Задача 8

Кронекеровским (или *тензорным*) произведением квадратных матриц $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ и $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ называется матрица $A\otimes B$ порядка n^2, составленная из блоков $a_{ij}B$, $1\le i,j\le n$. а) Доказать, что если симметричные A и B неотрицательно определены, то $A\otimes B$ также неотрицательно определена. б) **(3-5)** Если при этом A и B невырожденные, то это же верно и для $A\otimes B$.

Решение. а) Пусть векторы $(X_1,\dots,X_n)$ и $(Y_1,\dots,Y_n)$ центрированы, независимы и имеют матрицы ковариаций A и B. Случайный вектор

$$(X_1Y_1,\dots,X_1Y_n, X_2Y_1,\dots,X_2Y_n,\dots,X_nY_1,\dots,X_nY_n)$$

имеет матрицу ковариаций $A\otimes B$.

б) Предположим обратное. Пусть векторы $X \sim N(0, A)$ и $Y \sim N(0, B)$ независимы. По предположению существуют такая матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, не равная нулю, что $\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} X_i Y_j = 0$ п.н. По теореме Фубини, обозначая p_Y плотность Y, имеем

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} X_i Y_j = 0\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathsf{P}\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} X_i y_j = 0\right) p_Y(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j\right) = 0\right) p_Y(y) dy.$$

Заметим, что так как X обладает плотностью, то вероятность под знаком интеграла равна нулю для любых $y \in \mathbb{R}^n$, кроме обладающих свойством

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j = 0, \; i = 1 \ldots, n.$$

Но это условие задает собственное подпространство в $\mathbb{R}^n$ (не все коэффициенты равны нулю), поэтому интеграл от p_Y по нему равен нулю.

Задача 9

Класс $\mathcal{B}$ подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ назовем *возрастающим*, если из соотношений $B_1 \in \mathcal{B}$ и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ следует, что $B_2 \in \mathcal{B}$. Доказать, что для каждого возрастающего класса $\mathcal{B}$ средняя мощность множеств, составляющих его, не меньше $n/2$.

Решение. Отождествим подмножества $\{1, \ldots, n\}$ с векторами $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ (подмножеству соответствуют те индексы, при которых стоит 1). Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — н.о.р. случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с равными вероятностями. Тогда утверждение равносильно тому, что

$$\mathsf{E} \sum_{i=1}^n X_i \le \mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \Big| X \in \mathcal{B}\Big),$$

так что в силу линейности достаточно убедиться в неравенстве

$$\mathsf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \le \mathsf{P}(X_1 = 1 | X \in \mathcal{B}).$$

Это неравенство утверждает, что в классе $\mathcal{B}$ векторов вида $(1, y_2, \ldots, y_n)$ не меньше, чем векторов вида $(0, y_2, \ldots, y_n)$, но последнее очевидно.

Задача 10

Пусть $\{\xi_{k,i}, \, k \in \mathbb{N}, \, i = 1, \ldots, 2^k\}$ — независимые случайные величины, причем $\xi_{k,i} \sim N(0, k^{-2})$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \ldots, 2^k$ положим $I_{k,i} = [(i-1)/2^k, i/2^k)$. Пусть $S(t) = \sum_{k,i: t \in I_{k,i}} \xi_{k,i}$. Найти $\mathsf{P}(\sup_{t \in [0,1)} S(t) < \infty)$.

Решение. Из полуинтервалов $I_{1,1} = [0, 1/2)$ и $I_{1,2} = [1/2, 1)$ выберем тот, которому соответствует большее значение $\xi_{1,i}$, $i = 1, 2$. Пусть, например, это первый полуинтервал. Его разбиению на два меньших полуинтервала соответствуют две случайных величины $\xi_{2,1}$ и $\xi_{2,2}$. Из них снова выберем большую и соответствующий полуинтервал длины $1/4$. Так получается последовательность вложенных интервалов, имеющая общую точку $t_0 = t_0(\omega)$. Тогда сумма $S(t_0) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k$, где независимые случайные величины $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ распределены следующим образом: $\eta_k = \max\{\zeta_k^{(1)}, \zeta_k^{(2)}\}$, где $\zeta_k^{(i)} \sim N(0, k^{-2})$ и независимы. Легко проверить, что $\mathsf{E}\eta_k = c_1/k$ и $\mathsf{D}\eta_k = c_2/k^2$, где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Но тогда ряд $\sum_{k=1}^\infty \eta_k$ с вероятностью единица расходится, и искомая вероятность равна 0.