

## ИНФОРМАЦИЯ О ТРИНАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова провела тринадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих Колмогоровских олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (<http://mech.math.msu.su/probab>), а также в [1] и по ссылкам там же.

Олимпиада была проведена 19 апреля 2013 г. отдельно для младших (не прошедших еще в полном объеме курс теории вероятностей) и старших курсов (продолжительность — 5 часов). В олимпиаде приняли участие и сдали работы 28 студентов младших курсов и 9 студентов старших курсов механико-математического факультета и факультета ВМК Московского Государственного Университета, а также математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, факультета, факультета управления и прикладной математики Московского Физико-Технического Института, магистратуры Российской Экономической Школы.

### Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи (или пункта) указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, а затем число решивших ее студентов.

**Задача 1.** (I–V; 18) Пусть  $X$  и  $Y$  — н.о.р. неотрицательные случайные величины, каждая из которых принимает два значения,  $EX = 1$ . Найти минимальное значение, которое может принимать вероятность  $P(X + Y < 3)$ .

**Задача 2.** (I–V; 11) Имеется калькулятор, позволяющий вычислять функцию  $\Phi(t) = P(Z \leq t)$ , где  $Z \sim N(0, 1)$  (а также все элементарные функции). Найти  $\int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2} \Phi(t+1) dt$ .

**Задача 3.** (I–V; 6) За бесконечным (в обе стороны) столом сидит счетное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна  $1/2$ . Также с вероятностью  $1/4$  ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью  $1/4$  — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найти вероятность, что сидящий в ряду школьник Вася получит решение задачи.

**Задача 4.** (I–V; 2) Пусть неотрицательная случайная величина  $X$  такова, что  $Law(X) = Law(1 + UX)$ , где  $U$  равномерно распределена на  $[0, 1]$  и не зависит от  $X$ . Доказать, что дисперсия  $X$  конечна.

**Задача 5.** (I–V; 6) Вы имеете право сыграть в такую игру. Есть несимметричная монета, которая выпадает гербом с вероятностью  $1/3$ . Ее бросают до тех пор, пока не выпадет третий герб. После каждого из гербов вы можете прекратить игру и получить столько тугриков, сколько испытаний потребовалось для получения этого герба (не считая предыдущий герб, если он был, но считая текущий). Как следует играть, чтобы математическое ожидание выигрыша было максимально возможным, и чему оно равно?

**Задача 6.** (III–V; 0) Фильтрация  $\{\mathcal{F}_s, s \geq 0\}$  называется непрерывной справа, если  $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$  при любом  $t \geq 0$ . Верно ли, что естественная фильтрация случайного процесса с непрерывными траекториями непрерывна справа?

**Задача 7.** Для случайной величины  $X$ , принимающей целые неотрицательные значения, введем функционал  $H(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n$  (здесь  $p_n = P(X = n)$  и считается, что  $0 \ln 0 = 0$ ). **а)** (I-V; 10) Доказать, что для независимых  $X$  и  $Y$  мы имеем  $H(X + Y) \geq H(X) + H(Y)$ ; **б)** (I-V; 6) при каком дополнительном условии достигается равенство?

**Задача 8.** (I-V; 4) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{3n} C_{k-1}^{n-1} (1/3)^n (2/3)^{k-n}$ .

**Победители олимпиады.**

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 23 апреля 2014 г.

### **Победители среди студентов младших курсов**

#### ***Первая премия***

*Егоров Дмитрий Сергеевич*

Студент III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (5,5 решенных задач).

*Куньявский Павел Евгеньевич*

Студент III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (5,5 решенных задач).

#### ***Вторая премия***

*Брсоян Ваге Норайрович*

Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3,5 решенные задачи).

*Назмутдинов Аскар Флоридович*

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3,5 решенные задачи).

#### ***Третья премия***

*Цыбышев Алексей Евгеньевич*

Студент III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (3 решенные задачи).

*Куделя Виталий Викторович*

Студент II курса факультета ВМК Московского Государственного Университета (2,5 решенные задачи).

### **Победители среди студентов старших курсов**

#### ***Первая премия***

*Почеревин Роман Александрович*

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6 решенных задач), научный руководитель — В.Н. Чубариков.

### *Вторая премия*

*Ерохин Станислав Евгеньевич*

Студент IV курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (5 решенных задач), научный руководитель — Ю.В. Якубович.

### *Третья премия*

*Великанов Дмитрий Михайлович*

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3,5 решенные задачи), научный руководитель — М.А. Бабенко.

*Машников Олег Васильевич*

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3,5 решенные задачи), научный руководитель — А.А. Замятин.

## **Список литературы**

- [1] Информация о двенадцатой “Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей”. — Теор. вероятн. и примен., **58** (2013), вып. 2.

25 апреля 2014 г.

Оргкомитет двенадцатой Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей:

академик РАН, профессор А.Н. Ширяев,  
д.ф.-м.н., ассистент Д.А. Шабанов,  
к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин,  
к.ф.-м.н., ассистент Е.Е. Баштова,  
к.ф.-м.н. В.П. Демичев,  
аспиранты А.Е.Мазур, Ю.А. Малышкин,  
А.Л.Ордин, А.Ю.Хапланов.