ИНФОРМАЦИЯ О ШЕСТОЙ "КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

В ознаменование дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при финансовой поддержке инвестиционного банка "Barclays Capital"провела шестую "Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей"(информацию о предыдущих олимпиадах см. в [1]—[5]). Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей (http://mech.math.msu.su/probab).

Олимпиада была проведена 14 апреля 2007 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 58 студентов I–II курсов и 41 студент III–V курсов механико-математического факультета и факультета ВМиК Московского Государственного Университета, а также математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, механико-математического факультета Самарского Государственного Университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского Государственного Педагогического Университета, механико-математического факультета Киевского Национального Университета, физико-технического факультета Киевского Политехнического Института.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число студентов III–V курса, решивших эту задачу.

Задача 1. (I-V; 46, 28) В корзине M зеленых яблок и N красных. Выбираем по одному яблоку без возвращения, до тех пор, пока не достанем все зеленые. Чему равна вероятность, что после этого ни одного яблока в корзине не останется?

Задача 2. а) (I-V; 33, 34) Пусть X и Y — случайные величины на одном вероятностном пространстве, и распределения величин $X+Y$ и X совпадают. Следует ли отсюда, что $Y=0$ п.н.?

б) (I-V; 9, 11) Тот же вопрос, если известно, что $Y \geq 0$.

в) (III-V; 3) Тот же вопрос, что в а), если известно, что Xи Y независимы.

Задача 3. а) (I–II; 40) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такие события, что $\mathsf{P}(A_j) = 1/2$, $j=1,2,3,4$. Доказать, что $\max_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_jA_k) \geq 1/6$.

б) (I–II; 45) Доказать, что оценка в предыдущем пункте неулучшаема.

в) (III-V; 9) Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин, не сходящаяся к нулю п.н. при $n \to \infty$. Доказать, что существуют $\varepsilon > 0$, строго возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и последовательность событий $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, такие, что $A_k \supseteq A_{k+1}$, $\mathsf{P}(A_k) > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ и $|\xi_n(\omega)| \geq \varepsilon$ при $\omega \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Задача 4. а) (I–II; 14) Имеются 2 случайных вектора (X, Y) и (Z, U), принимающие конечное число значений, причем распределения случайных величин Y и Z совпадают. Доказать, что на некотором вероятностном пространстве существует случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3), такой, что совместное распределение первых двух его компонент такое же, как у случайного вектора (X, Y), а последних двух — такое же, как у (Z, U).

б) (III–V; 1) Та же задача, что в пункте а), без предположения, что векторы принимают конечное число значений.

Задача 5. (I–V; 25, 26) Пусть $\xi \sim N(0,1)$. Доказать, что $\mathsf{P}(|\xi| \geq x) \leq e^{-x^2/2}$ для любого $x \geq 0$.

Задача 6. (I–V; 2, 3) 100 паровозов выехали из города по одноколейке, каждый с постоянной скоростью. Когда движение установилось, то из-за того, что быстрые догнали идущих впереди более медленных, образовалось несколько караванов (групп, движущихся рядом, со скоростью лидера каравана). Найти среднее и дисперсию их числа. Скорости различных паровозов независимы и одинаково распределены, а функция распределения скорости непрерывна.

Задача 7. (I–V; 5, 9) Двадцать человек сидят за круглым столом. Перед одним из них стоит тарелка. Он выбирает (равновероятно) одного из двух своих соседей и передает ему тарелку. Затем тот так же выбирает своего соседа, передает ему тарелку, и т.д. (на каждом шаге соседи выбираются независимо). Для каждого сидящего за столом существует вероятность, что он окажется последним, кто получит тарелку. Найти множество тех людей, для которых эта вероятность максимальна.

Задача 8. (I–V; 0, 2) В целых точках прямой расположены планеты, на которых живут цивилизации. Каждый день между любыми двумя цивилизациями с вероятностью p_n происходит межпланетный конфликт (p_n зависит только от расстояния между точками, где они живут, и все конфликты случаются независимо). Назовем участок прямой (интервал, соединяющий две соседних целых точки) безопасным, если по разные стороны от него нет пары цивилизаций в состоянии конфликта. Доказать, что с вероятностью единица безопасных участков либо нет, либо их бесконечное число.

Задача 9. (III–V; 2) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши со сдвигом $a \in \mathbb{R}$ и растяжением $\sigma > 0$ (т.е. $\mathsf{E}e^{itX_1} = e^{iat - \sigma|t|}$, $t \in \mathbb{R}$). Построить состоятельные по вероятности (при $n \to \infty$) оценки параметров a и σ.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 18 апреля 2007 г.

Победители среди студентов II курсов

Первая премия

Трепалин Андрей Сергеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7,5 решенных задач).

Вторая премия

Воробьев Александр Леонидович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Муравлев Алексей Анатольевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Смирнов Сергей Николаевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Третья премия

Девятов Ростислав Андреевич

Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6,5 решенных задач).

Житлухин Михаил Валентинович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6,5 решенных задач).

Штейнер Сергей Михайлович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6,5 решенных задач).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Алиев Амир Фикрет оглы

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев (7,5 решенных задач).

Вторая премия

Раскин Михаил Александрович

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Н.К. Верещагин (6,5 решенных задач).

Третья премия

Бутковский Олег Александрович

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.В. Булинский (6 решенных задач).

Карташов Юрий Николаевич

Студент V курса механико-математического факультета Киевского Национального Университета, научный руководитель — А.М. Кулик (6 решенных задач).

Леонов Глеб Михайлович

Студент IV курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, научный руководитель — И.А. Ибрагимов (6 решенных задач).

Мешин Юрий Сергеевич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Ю.Н. Тюрин (6 решенных задач).

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о второй студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

[3] Информация о третьей студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **49** (2004), вып. 3, с. 621–623.

[4] Информация о четвертой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **50** (2005), вып. 2, с. 411–413.

[5] Информация о пятой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **51** (2006), вып. 3, с. 631–633.

19 апреля 2007 г.

Оргкомитет шестой
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":

член-корреспондент РАН, профессор А.Н. Ширяев (председатель),
к.ф.-м.н., ассистент П.А. Виленкин,
к.ф.-м.н. С.В. Дильман,
аспирантка Н.Ю. Крыжановская,
аспирант А.В. Куликов,
аспирант М.М. Мусин,
аспирант С.П. Прохоренков,
аспирант Ф.А. Устинов,
к.ф.-м.н., ассистент А.П. Шашкин.