ИНФОРМАЦИЯ О ПЯТОЙ "КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Кафедра теории вероятностей Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при благотворительной поддержке научного центра "Физматкнига" провела пятую "Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей". (Предыдущие олимпиады проводились в 2001, 2003, 2004 и 2005 годах; см. [1], [2], [3], [4]). Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: `http://mech.math.msu.su/probab`. Решения задач первых четырех олимпиад, а также описание некоторых современных тем теории вероятностей и ее приложений, с которыми связана часть задач, можно найти в статье [5].

Олимпиада была проведена 16 апреля 2006 г. раздельно для II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 2 студента I курса, 44 студента II курса и 41 студент III–V курсов Механико-математического факультета Московского Государственного Университета, факультета ВМиК Московского Государственного Университета, Московского Физико-Технического Института, Санкт-Петербургского Государственного Университета, Вологодского Государственного Педагогического Университета и Киевского Национального Университета.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, а затем коэффициент решаемости, т.е. дробь, в числителе которой стоит число студентов (со всех курсов), решивших задачу, а в знаменателе — общее число ее решавших.

Задача 1. (II; $\frac{38}{46}$) В руке зажаты 6 травинок так, что их концы выступают сверху и снизу. Верхние концы случайным образом разбиваются на пары и попарно связываются между собой. То же делают и с нижними концами. Какова вероятность того, что в результате этой операции все 6 травинок окажутся связанными в одно кольцо?

Задача 2. (III–V; $\frac{9}{41}$) Пусть X, Y — независимые гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Найти $\mathsf{E}(X \mid XY)$.

Задача 3. (II–V; $\frac{18}{87}$) Существует ли вероятностное пространство и случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ на нем со свойствами:

- все X_n гауссовские со средним 0 и дисперсией 1;
- $X_n I(X_n \le 0) = X_m I(X_m \le 0)$ для любых n, m;
- случайные величины $I(X_n \in [a_n, b_n])$, $n \in \mathbb{N}$ независимы для любых $a_n, b_n \ge 0$?

Задача 4. (II–V; $\frac{28}{87}$) Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем X имеет непрерывное распределение, т.е. $\mathsf{P}(X = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $X + Y$ имеет непрерывное распределение?

Задача 5. (II–V; $\frac{16}{87}$) Пусть X — случайная величина с $\mathsf{E}X^2 < \infty$. Найти $\inf \mathsf{E}ZX$ по всем неотрицательным случайным величинам Z с $\mathsf{E}Z^2 \le 1$.

Задача 6. (II–V; $\frac{34}{87}$) **a)** Из колоды в 52 карты извлекаются (без возвращения) карты до момента появления червового туза. Найти математическое ожидание этого момента (например, если червовый туз лежит на первом месте, то этот момент равен 1).

б) Найти математическое ожидание момента появления первого туза.

в) Найти математическое ожидание момента появления первой карты червовой масти.

Задача 7. (II–V; $\frac{14}{87}$) Пусть X — случайная величина, f и g — возрастающие ограниченные функции. Доказать, что случайные величины $f(X)$ и $g(X)$ положительно коррелированы.

Задача 8. (II–V; $\frac{11}{87}$) Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на множестве натуральных чисел, P — вероятностная мера на $\mathcal{A}$. Верно ли, что P можно продолжить до вероятностной меры на σ-алгебре всех подмножеств натуральных чисел?

Задача 9. (II–V; $\frac{0}{87}$) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные строго положительные случайные величины. Положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} X_n/S_n = 0$ п.н.?

Задача 10. (III–V; $\frac{1}{41}$) Пусть B — броуновское движение, выходящее из 0, $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $f(0) \neq 0$. Доказать, что $\mathsf{P}\big(\min_{t\in[0,1]}(B_t + f(t)) = 0\big) = 0$.

Задача 11. (II–V; $\frac{0}{87}$) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{P}(X_n \neq 0) > 0$. Положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n \in [a,b]) = 0$ для любых a, b.

Победители среди студентов II курса

Первая премия

Бутковский Олег Александрович
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6.75 решенных задач)

Калинин Максим Юрьевич
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6.75 решенных задач)

Вторая премия

Пермяков Дмитрий Алексеевич
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4.75 решенных задач)

Третья премия

Кузнецов Степан Львович
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенных задачи)

Мешин Юрий Сергеевич
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенных задачи)

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Дорошенко Вадим Валерьевич
Студент V курса Механико-математического факультета Киевского Национального Университета (7 решенных задач)
Научный руководитель — А.С. Олийнык

Раскин Михаил Александрович
Студент III курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач)
Научный руководитель — Н.К. Верещагин

Третья премия

Каменов Андрей Александрович
Студент II курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4.25 решенных задач)
Научный руководитель — А.Н. Ширяев

Клепиков Константин Викторович
Студент V курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4.25 решенных задач)
Научный руководитель — Ю.Н. Тюрин

Халипов Петр Викторович
Студент III курса Механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4.25 решенных задач)
Научный руководитель — Е.В. Булинская

Оргкомитет пятой
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":
член-корр. РАН, профессор А.Н. Ширяев (председатель),
аспирант А.Г. Агапов,
аспирант С.В. Дильман,
аспирант И.Н. Медведев,
к.ф.-м.н. А.С. Мищенко,
к.ф.-м.н. А.В. Селиванов,
аспирант Ф.А. Устинов,
к.ф.-м.н. А.С. Черный,
к.ф.-м.н. А.П. Шашкин.

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о второй Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

[3] Информация о третьей Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **49** (2004), вып. 3, с. 621–623.

[4] Информация о четвертой Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **50** (2005), вып. 2, с. 411–413.

[5] *A.S. Cherny.* Kolmogorov students' competitions on probability theory. Препринт, доступен на сайте `mech.math.msu.su/~cherny`.

18 апреля 2006 г.