ИНФОРМАЦИЯ О ЧЕТВЕРТОЙ ”КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ”

В ознаменование дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при благотворительной поддержке ООО ”Левиофан-Технолог”, научного центра ”Физматкнига” и организационной поддержке попечительского совета механико-математического факультета провела четвертую ”Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей”. (Первая, вторая и третья подобные олимпиады проводились в 2001 г., в 2003 г. и в 2004 г.; см. [1], [2], [3].) Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: `http://mech.math.msu.su/probab`.

Олимпиада была проведена 16 апреля 2005 г. раздельно для II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 4 студента I курса, 52 студента II курса и 54 студента III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК Московского Государственного Университета, а также Московского Физико-Технического Института, Вологодского Государственного Педагогического Университета, Киевского Национального Университета, Киевского Политехнического Института, Самарского Государственного Университета, Санкт-Петербургского Государственного Университета и Томского Политехнического Университета.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, а затем коэффициент решаемости, т.е. дробь, в числителе которой стоит число студентов (со всех курсов), решивших задачу, а в знаменателе — общее число ее решавших.

Задача 1. (II; $\frac{49}{56}$) Стрелки́ А и Б по очереди стреляют в мишень (первым стреляет А). Стрелок А попадает в мишень с вероятностью p_A, а стрелок Б — с вероятностью $p_Б$ (результаты разных выстрелов независимы). Побеждает тот, кто первым попадет в мишень. Найти вероятность победы А.

Задача 2. (II-V; $\frac{52}{110}$) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим $Y_n = \frac{X_n+X_{n+1}}{1+|X_n+X_{n+1}|}$, $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Доказать, что существует константа c такая, что $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} c$.

Задача 3. (III-V; $\frac{15{,}5}{54}$) Пусть X — равномерно распределенная на отрезке $[0,\pi]$ случайная величина. Найти $\mathsf{E}(X \mid \sin X)$.

Задача 4. (II-V; $\frac{56}{110}$) Пусть X, Y, Z — независимые случайные точки на окружности, имеющие равномерное распределение (т.е. $\mathsf{P}(X \in A, Y \in B, Z \in C) = \mu(A)\mu(B)\mu(C)$, где μ — нормированная мера Лебега). Найти вероятность того, что треугольник XYZ является остроугольным.

Задача 5. **а)** (II-V; $\frac{84{,}5}{110}$) Пусть X, Y, ξ — независимые случайные величины, причем $\mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\xi = 1) = 1/2$. Доказать, что $|X + \xi Y|$ и $|Y + \xi X|$ совпадают по распределению (т.е. их функции распределения совпадают).

б) (II-V; $\frac{13{,}5}{110}$) Пусть X, Y, Z, ξ, η — независимые случайные величины, причем $\mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\xi = 1) = 1/2$, $\mathsf{P}(\eta = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = 1/2$. Доказать, что $|X + \xi|Y + \eta Z||$ и $||X + \xi Y| + \eta Z|$ совпадают по распределению.

Задача 6. **а)** (II-V; $\frac{9}{110}$) Пусть X — ограниченная случайная величина на некотором вероятностном пространстве, λ — число из полуинтервала $(0,1]$. Обозначим $u_\lambda(X) = \inf \mathsf{E}(ZX)$, где inf берется по множеству $\mathcal{D}_\lambda$ случайных величин Z таких, что $0 \le Z \le \lambda^{-1}$ и $\mathsf{E}Z = 1$. Доказать, что существует случайная величина $Z_* \in \mathcal{D}_\lambda$ такая, что $\mathsf{E}(Z_* X) = u_\lambda(X)$.

б) (II-V; $\frac{10{,}5}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные ограниченные случайные величины, λ — число из интервала $(0,1)$ (напомним, что X называется вырожденной, если существует константа c такая, что $X \overset{\text{п.н.}}{=} c$). Верно ли, что $u_\lambda(X+Y) > u_\lambda(X) + u_\lambda(Y)$?

в) (II-V; $\frac{5}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные случайные величины, принимающие конечное число значений, μ — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре полуинтервала $(0,1]$ такая, что $\mu((a,b)) > 0$ для любых $0 < a < b \le 1$. Доказать, что

$$\int_{(0,1]} u_\lambda(X+Y)\mu(d\lambda) > \int_{(0,1]} u_\lambda(X)\mu(d\lambda) + \int_{(0,1]} u_\lambda(Y)\mu(d\lambda). \qquad (*)$$

г) (II-V; $\frac{0}{110}$) Пусть X, Y — независимые невырожденные ограниченные случайные величины, μ — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре полуинтервала $(0,1]$ такая, что $\mu((a,b)) > 0$ для любых $0 < a < b \le 1$. Доказать, что выполнено $(*)$.

Задача 7. (III-V; $\frac{3}{54}$) Пусть B — броуновское движение (винеровский процесс), $t_1, t_2, \dots$ — последовательность положительных чисел, $t_n \to \infty$. Верно ли, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{2t_n \ln\ln t_n}} \overset{\text{п.н.}}{=} 1$?

Задача 8. (II-V; $\frac{4{,}5}{110}$) Пусть X, Y, Z — независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^n$, принимающие конечное число значений. Обозначим через L (случайное) линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, порожденное X и Y. Обозначим через $d(L)$ его размерность. Верно ли, что $\mathsf{P}(Z \in L \mid d(L) = 2) \ge \mathsf{P}(Z \in L \mid d(L) = 1)$?

Победители олимпиады.

Разбор задач, вручение призов всем участникам, а также награждение победителей проводились в рамках дня механико-математического факультета 22 апреля 2005 г.

Победители среди студентов II курса

Первая премия

Раскин Михаил Александрович
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Вторая премия

Алиев Амир Фикрет оглы
Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Третья премия

Будылин Роман Яковлевич
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4,5 решенных задач).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Дремов Владимир Александрович
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Г.Б. Шабат (8 решенных задач).

Вторая премия

Устинов Филипп Александрович
Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев (7,5 решенных задач).

Третья премия

Горовой Сергей Олегович
Студент V курса механико-математического факультета Киеского Национального Университета, научный руководитель — Н.И. Портенко (6,5 решенных задач).

Клепиков Константин Викторович
Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Ю.Н. Тюрин (6 решенных задач).

Шкляев Александр Викторович
Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — И.В. Денисов (6 решенных задач).

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о второй Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

[3] Информация о третьей Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **49** (2004), вып. 3, с. 621–623.

22 апреля 2005 г.

Оргкомитет четвертой
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":
член-корр. РАН, профессор А.Н. Ширяев,
аспирант С.В. Дильман,
к.э.н. С.Е. Касаткин,
аспирант И.Н. Медведев,
аспирант А.С. Мищенко,
студент А.И. Мурашов,
преп. А.В. Селиванов,
к.ф.-м.н. М.А. Урусов,
к.ф.-м.н. А.С. Черный,
студентка Н.В. Шаврова,
аспирант А.П. Шашкин.