ИНФОРМАЦИЯ О ТРЕТЬЕЙ ”КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ”

В ознаменование дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при поддержке Франко-Русского Института им. А.М. Ляпунова провела третью ”Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей”. (Первая и вторая подобные олимпиады проводились в октябре 2001 г. и в апреле 2003 г.; см. [1], [2].) Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: `http://mech.math.msu.su/probab`.

Олимпиада была проведена 24 апреля 2004 г. раздельно для II и III–V курсов (продолжительность — 4 часа). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 53 студента II курса и 40 студентов III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК Московского Государственного Университета, а также физико-технического факультета Киевского Политехнического Института, механико-математического факультета Киевского Национального Университета, факультета естественных наук и математики Томского Политехнического Университета и Института Естественных Наук и Экологии г. Москвы.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов II курса, и, наконец, число студентов III–V курса, решивших эту задачу.

Задача 1. (II-V; 49, 39) Пусть A и B — события такие, что $0 < \mathsf{P}(A) < 1$ и $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B \mid A^c)$ (A^c обозначает дополнение к A). Верно ли, что A и B независимы?

Задача 2. **а)** (II-V; 31, 30) На некотором вероятностном пространстве заданы случайные величины X, Y, Z, причем Y стохастически мажорирует X, т.е. $\mathsf{P}(X \leq x) \geq \mathsf{P}(Y \leq x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что $Y + Z$ стохастически мажорирует $X + Z$?

б) (II-V; 6, 23) Верно ли предыдущее утверждение при дополнительном предположении, что X и Z независимы, а также Y и Z независимы?

Задача 3. (II-V; 33, 26) Сто пассажиров купили билеты в 100-местный вагон. При этом каждому пассажиру было выделено свое место. Первые 99 пассажиров расселись в вагоне случайным образом, так что все 100! вариантов рассадки равновероятны. Однако 100-й пассажир решил занять именно свое место. При этом он просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), тот в результате просит пересесть пассажира, занявшего его место (если оно занято), и.т.д. Найти математическое ожидание числа потревоженных пассажиров (100-й пассажир не входит в их число).

Задача 4. (II-V; 14, 16) Имеются 2 игральных кубика с гранями, помеченными числами $1, \ldots, 6$. Можно ли приписать граням каждого из кубиков вероятности выпадения (свои для каждого кубика) так, что при их одновременном бросании сумма выпавших чисел имеет равномерное распределение на множестве $\{2, \ldots, 12\}$?

Задача 5. (II; 0) Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем $\mathsf{E}|X + Y| < \infty$. Верно ли, что $\mathsf{E}|X| < \infty$?

Задача 6. (III-V; 0) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Дано, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} < \infty$ п.н. Верно ли, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \infty$ п.н.?

Задача 7. (II-V; 14, 19) На окружности выбрано борелевское множество A такое, что $\mu(A) = 2/3$, где μ — равномерная вероятностная мера на окружности (т.е. нормированная лебегова мера). Точки множества A закрашены красным цветом, а точки его дополнения — синим. Доказать, что в окружность можно вписать квадрат, у которого по меньшей мере 3 вершины красные.

Задача 8. (II-V; 0, 1) Пусть $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$ — две последовательности случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Дано, что случайные величины X_n и Y_n независимы при каждом $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $X_1 + Y_1,\ X_2 + Y_2, \dots$ сходится по вероятности к нулю. Доказать, что существуют числа $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ такие, что последовательность $X_1 - a_1,\ X_2 - a_2, \dots$ сходится по вероятности к нулю.

Задача 9. (III-V; 3) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, сходящаяся почти наверное к нулю, причем $|X_n| \le 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ — под-σ-алгебры $\mathcal{F}$. Верно ли, что последовательность $\mathsf{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_1), \mathsf{E}(X_2 \mid \mathcal{G}_2), \dots$ сходится почти наверное к нулю?

Задача 10. (II-V; 0, 0) На борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ единичной окружности задана некоторая вероятностная мера μ. Пусть X, Y — независимые случайные точки на окружности, имеющие распределение μ (т.е. $\mathsf{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mu(A)\mu(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{B}$). Обозначим через α величину угла между точками X и Y (так что α принимает значения в отрезке $[0, \pi]$). Доказать, что $\mathsf{P}(\alpha \le 2\pi/3) \ge 1/2$.

Победители олимпиады.

Разбор задач, вручение призов всем участникам, а также награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 28 апреля 2004 г.

Победители среди студентов II курсов

Первая премия

Малыхин Юрий Вячеславович
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5,5 решенных задач).

Вторая премия

Гильмутдинов Эдуард Икрамович
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Москвин Андрей Юрьевич
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Третья премия

Шкляев Александр Викторович
Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4.5 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Гаас Валерий Владимирович
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.М. Зубков (6.5 решенных задач).

Вторая премия

Ендовицкий Павел Александрович
Студент III курса физико-технического факультета Киевского Политехнического Института, научный руководитель — А.А. Дороговцев (6 решенных задач).

Клепиков Константин Викторович
Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Ю.Н. Тюрин (6 решенных задач).

Кузнецов Андрей Юрьевич
Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Г.И. Фалин (6 решенных задач).

Спиридонов Сергей Викторович
студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Г.А. Чечкин (6 решенных задач).

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

28 апреля 2004 г.

Оргкомитет второй
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":
член-корр. РАН, профессор А.Н. Ширяев,
аспирант С.В. Дильман,
аспирант И.Н. Медведев,
аспирант А.С. Мищенко,
аспирант А.В. Селиванов,
к.ф.-м.н. М.А. Урусов,
к.ф.-м.н. А.С. Черный.