ПЯТНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись "н.о.р." означает "независимые одинаково распределенные".

Задача 1. (1-2) Пусть X и Y — две случайные величины. Покажите, что их совместная функция распределения $F_{X,Y}(x,y) = \mathsf{P}(X \le x, Y \le y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \le F_{X,Y}(x,y) \le \min(F_X(x), F_Y(y)),$$

где $F_X(x) = \mathsf{P}(X \le x), F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \le y)$ — одномерные (маргинальные) функции распределения. В каких случаях неравенства превращаются в равенства для всех $x, y \in \mathbb{R}$?

Решение. Положим $A = \{X \le x\}$, $B = \{Y \le y\}$, тогда $F_{X,Y}(x,y) = \mathsf{P}(AB)$. Пользуясь свойствами вероятности, имеем

$$\mathsf{P}(AB) \le P(A) \text{ и } \mathsf{P}(AB) \le \mathsf{P}(B); \text{ т.е. } \mathsf{P}(AB) \le \min(\mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)),$$

таким образом, правое неравенство доказано. Равенство достигается в том случае, когда величины комонотонны. В самом деле, введем обратную функцию $F_X^{-1}(q) = \inf\{x : F_X(x) \ge q\} (0 < q < 1)$. Пусть также U — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0;1]$, а $R(F_X, F_Y)$ класс двумерных распределений, имеющих маргинальные распределения F_X, F_Y. Тогда $(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)) \in R(F_X, F_Y)$ и совместное распределение этих двух величин задается правой границей Фреше.

С другой стороны, поскольку

$$1 \ge \mathsf{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \text{ и } P(AB) \ge 0$$

левая часть неравенства также выполнена. Очевидно, что $(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U)) \in R(F_X, F_Y)$ и совместное распределение этих двух величин задается левой границей Фреше.

Задача 2. Три человека играют в следующую игру. В начале игры каждому вручается "монета". Вероятность выпадения орла на монете i-го участника равна p_i (таким образом, монеты неправильные). Каждый независимо от других бросает свою "монету". Если выпадает решка, он выбывает из игры, а если выпадает орел, то проходит в следующий раунд, где оставшиеся в игре опять бросают свои монеты и т.д. Если после некоторого раунда в игре остается только один участник, то игра заканчивается и этот участник получает приз. Если после некоторого раунда ни одного участника в игре не остается, то игра также заканчивается, но приз получает организатор игры (четвертое лицо). Найдите вероятность того, что приз достанется участнику номер 1, если $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$.

Решение. Событие A_n^{123}: "В начале раунда n все три участника все еще в игре". Его вероятность равна $p_1^{n-1}p_2^{n-1}p_3^{n-1}$.

2. Событие A_n^{12}: "В начале раунда n в игре участники 1 и 2". Его вероятность равна $p_1^{n-1}p_2^{n-1}\left(1 - p_3^{n-1}\right)$.

3. Событие A_n^{13}: "В начале раунда n в игре участники 1 и 3". Его вероятность равна $p_1^{n-1}p_3^{n-1}\left(1 - p_2^{n-1}\right)$.

4. Событие A_n: "1-й участник победил в n-м раунде". Его вероятность P_n по формуле полной вероятности равна

$$\begin{aligned} P_n &= P\left(A_n \middle| A_n^{123}\right) P\left(A_n^{123}\right) + P\left(A_n \middle| A_n^{12}\right) P\left(A_n^{12}\right) + P\left(A_n \middle| A_n^{13}\right) P\left(A_n^{13}\right) \\ &= p_1q_2q_3 \cdot p_1^{n-1}p_2^{n-1}p_3^{n-1} + p_1q_2 \cdot p_1^{n-1}p_2^{n-1}\left(1 - p_3^{n-1}\right) + p_1q_3 \cdot_1^{n-1} p_3^{n-1}\left(1 - p_2^{n-1}\right) \end{aligned}$$

5. Суммируя по $n \geq 1$ получим искомую вероятность того, что в игре победит первый участник:

$$\frac{p_1 q_2 q_3}{1 - p_1 p_2 p_3} + \frac{p_1 q_2}{1 - p_1 p_2} - \frac{p_1 q_2}{1 - p_1 p_2 p_3} + \frac{p_1 q_3}{1 - p_1 p_3} - \frac{p_1 q_3}{1 - p_1 p_2 p_3}.$$

Подставляя числовые значения $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, получим окончательный ответ: $\frac{127}{315}$.

Задача 3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна 1/6. Докажите, что кубик правильный (все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

Решение. Пусть p_i, $i = 1, \ldots, 6$ — вероятность выпадения числа i на кубике. Тогда вероятность того, что выпадет одинаковое число очков при двух бросаниях равна

$$\sum_{i=1}^{6} p_i^2 \geq |\text{неравенство Коши-Буняковского}| \geq \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1} p_i \right)^2 = \frac{1}{6},$$

причем равенство достигается тогда и только, когда вектор $(p_1, \ldots, p_6)$ коллинеарен вектору $(1, \ldots, 1)$. Значит, кубик правильный.

Задача 4. Пусть $(A_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность независимых в совокупности событий, про которые известно, что $\mathsf{P}(A_n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда из условия $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ следует, что $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.}) = 1$ (событие $\{A_n \text{ б.ч.}\}$ означает, что произошло бесконечное число событий в последовательности $(A_n, n \in \mathbb{N})$).

Решение. Из условия следует, что $\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) = 0$. В силу независимости всех событий получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) = \mathsf{P}(\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\overline{A_{n-1}}) \cdot \mathsf{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A_m}\right).$$

Первые $n-1$ множителей положительны, поэтому $\mathsf{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A_m}\right) = 0$ или $\mathsf{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = 1$. Пересечение же по всем $n \in \mathbb{N}$ событий $\{\cup_{m \geq n} A_m\}$ и есть $\{A_n \text{ б.ч.}\}$. Стало быть, оно тоже имеет полную вероятность.

Задача 5. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Пусть $N = \sup\{k \geq 1 \colon X_k \leq X_{k-1} \leq \cdots \leq X_1\}$. Найдите а) распределение N; б) плотность X_N.

Решение. а) Заметим, что в силу независимости и равномерной распределенности случайных величин X_i, все упорядочивания $X_1, \ldots, X_n$ равновероятны, т.е.

$$\mathsf{P}(N \geq n) = \mathsf{P}(X_n \leq X_{n-1} \leq \cdots \leq X_1) = \frac{1}{n!}.$$

б) Заметим, что

$$\mathsf{P}(X_N \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_N \leq x, N = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_n \leq x, X_{n+1} > X_n, X_n < X_{n-1} < \ldots < X_1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \mathsf{P}(X_{n+1} > y, y < X_{n-1} < \ldots < X_1) dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (1-y) \frac{1}{(n-1)!} (1-y)^{n-1} dy = \int_0^x (1-y) e^{1-y} dy.$$

Тем самым, искомая плотность равна $(1-y)e^{1-y}$ при $y \in (0,1)$ и 0, иначе.

Задача 6. В отрезок $[0,1]$ случайно, независимо и равномерно бросаются 6 точек. С вероятностью 1 они разбивают отрезок на 7 интервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_7$. Найдите плотность длины центрального интервала Δ_4.

Решение. Рассмотрим случайные точки $v_1, \dots, v_7$, которые бросаются случайно и равномерно на окружность единичной длины, а затем разрежем окружность в точке v_1, образовав оставшимися точками отрезок $[0,1]$. То же самое можно проделать и для любой другой точки. Отсюда в силу симметрии следует, что длины всех отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_7$ одинаково распределены. Стало быть

$$\mathsf{P}(|\Delta_4| > x) = \mathsf{P}(|\Delta_1| > x) = \mathsf{P}(\min(v_2, \dots, v_7) > x) = (1-x)^6,$$

и искомая плотность равна $6(1-x)^5$ для $x \in (0,1)$ и 0, иначе.

Задача 7. Случайная величина X имеет конечные математическое ожидание и дисперсию. Пусть μ — это медиана распределения X. Докажите, что

$$|\mathsf{E}X - \mu| \leq \sqrt{\mathsf{D}X},$$

если а) случайная величина имеет плотность, непрерывную и положительную в окрестности μ, б) **(3-6)** нет дополнительных ограничений на распределение X.

Решение. а) Покажем, что $\mu = \operatorname{argmin}_{a\in\mathbb{R}} \mathsf{E}|X-a|$. Действительно, рассмотрим $\mathsf{E}|X-a|$:

$$\mathsf{E}|X-a| = \int\limits_{\mathbb{R}} |x-a|p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} (a-x)p(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} (x-a)p(x)dx.$$

Беря производную по a, получаем выражение

$$\int\limits_{-\infty}^{a} p(x)dx - \int\limits_{a}^{+\infty} p(x)dx,$$

которое равно больше нуля при $a > \mu$ и $a < \mu$, т.е. μ — точка минимума.

Теперь, достаточно заметить, что

$$|\mathsf{E}X - \mu| = |\mathsf{E}(X-\mu)| \leq \mathsf{E}|X-\mu| \leq \mathsf{E}|X - \mathsf{E}X| \leq \sqrt{\mathsf{D}X}.$$

б) Если дисперсия $\mathsf{D}X = \sigma^2 = 0$, то ответ тривиален, т.к. наша с.в. X — константа. Пусть $\sigma^2 > 0$. Тогда для любого $0 < c < \sigma$ имеем

$$\mathsf{P}(X \geq \mathsf{E}X + \sigma + c) = P(X - \mathsf{E}X + \sigma - c \geq 2\sigma) \leq \mathsf{P}((X - \mathsf{E}X + \sigma - c)^2 \geq 4\sigma^2) \leq$$

$$\leq (4\sigma^2)^{-1}\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X + \sigma - c)^2 = (4\sigma^2)^{-1}(\sigma^2 + (\sigma-c)^2) < 1/2.$$

Стало быть, никакое $a > \mathsf{E}X + \sigma$ не может быть медианой. В силу симметрии, то же справедливо для всех $a < \mathsf{E}X - \sigma$. Значит, медиана должна принадлежать отрезку $[\mathsf{E}X - \sigma, \mathsf{E}X + \sigma]$.

Задача 8. На плоскости рассматривается стандартное точечное пуассоновское поле интенсивности 1. Обозначим через Z_0 — множество точек плоскости, расстояние которых до начала координат меньше, чем до любой из точек поля. Найдите математическое ожидание площади Z_0.

Решение. Для фиксированной точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ событие, что она принадлежит Z_0, совпадает с событием, что в круге радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ с центром в (x, y) нет точек поля. Значит,

$$\mathsf{P}((x, y) \in Z_0) = e^{-\pi(x^2+y^2)}.$$

В итоге,

$$\mathsf{E} mes(Z_0) = \mathsf{E} \int_{\mathbb{R}^2} I\{(x, y) \in Z_0\} dxdy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{P}((x, y) \in Z_0) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dxdy =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r dr = |\text{замена } z = \pi r^2| = \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = 1.$$

Справедливость перестановки интеграла и математического ожидания следует из теоремы Фубини.

Задача 9. (3-6) Пусть X, Y — н.о.р. случайные величины (с вероятностью 1 не равные 0). Докажите, что

$$\mathsf{E} \frac{XY}{X^2 + Y^2} \geq 0.$$

Решение. Заметим, что $1/(X^2 + Y^2)$ может быть представлено в виде

$$(X^2 + Y^2)^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(X^2+Y^2)} dt.$$

Отсюда

$$\mathsf{E} \frac{XY}{X^2 + Y^2} = \mathsf{E} \left(XY \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(X^2+Y^2)} dt \right) =$$

$$= \mathsf{E} \left(\int\limits_0^{+\infty} XY e^{-t(X^2+Y^2)} dt \right) = \mathsf{E} \left(\int\limits_0^{+\infty} X e^{-tX^2} Y e^{-tY^2} dt \right) =$$

(в силу одинаковой распределенности и независимости)

$$= \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{E} \left(X e^{-tX^2} Y e^{-tY^2} \right) dt = \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{E} \left(X e^{-tX^2} \right)^2 dt \geq 0.$$

Возможность перестановки интеграла и математического ожидания вытекает из теоремы Фубини.