ШЕСТНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись "н.о.р." означает "независимые одинаково распределенные".

Задача 1. Пусть X – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $c \in \mathbb{R}$ и $\mathsf{P}(X \geq c) = p$. Доказать, что $\mathsf{E}XI\{X \geq c\} \geq \mathsf{E}XI\{B\}$ для любого события $B \in \mathcal{F}$, для которого $\mathsf{P}(B) = p$. [1]

Задача 2. Привести пример такой последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \xi_n = -\infty$ (п.н.), но $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \xi$ для некоторой случайной величины ξ.

Задача 3. Найти $\sup corr(X, \max(X,Y))$ по всем невырожденным распределениям μ с конечным вторым моментом. Здесь X и Y н.о.р. величины с распределением μ.

Задача 4. (1-2) Шары с номерами от 1 до 8 разложены поровну по двум урнам. Случайным образом вынимают один шар из каждой урны. Известно, что математические ожидания номеров шаров совпадают, то же верно и про дисперсии. Шары с какими номерами могут быть в первой урне?

Задача 5. Пусть X - неотрицательная случайная величина с плотностью $q(x)$, имеющая конечное математическое ожидание, и μ – ее распределение. Определим распределение $\mu^*(X)$ как распределение случайной величины с плотностью

$$p(x) = \frac{xq(x)}{\mathsf{E}X}.$$

а) Доказать, что случайная величина Y, имеющая распределение $\mu^*(X)$, стохастически не меньше X (то есть для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\mathsf{P}(Y \geq c) \geq \mathsf{P}(X \geq c)$).

б) Пусть $X_1, ..., X_n$ — независимые копии X и случайная величина Y из предыдущего пункта не зависит от $\{X_2, ..., X_n\}$. Доказать, что $\mu^*(X_1 + \ldots + X_n)$ совпадает с распределением случайной величины $Y + X_2 + \ldots + X_n$.

Задача 6. В левой нижней клетке стандартной шахматной доски 8×8 стоит ладья. Все другие клетки свободны. На каждом ходу выбирается равновероятно и делается один из 14 возможных ходов ладьи.[2] Найти математическое ожидание числа ходов до первого попадания в правую верхнюю клетку.

Задача 7. Пусть $X_1, X_2, ...$ – н.о.р. случайные величины, причем

$$\mathsf{P}(X_1 = 1/2) = \mathsf{P}(X_1 = 3/2) = 1/2.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} X_j$ сходится п.н.

Задача 8. (3-6) Пусть (X,Y) – гауссовский случайный вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$. Найти $cov(\Phi(X), \Phi(Y))$, где Φ есть функция распределения X.

Задача 9. (3-6) Пусть $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$ и $Y = \{Y_t,\, t \geq 0\}$ - два независимых стандартных броуновских движения. Положим $\tau(X) = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1\}$. Найти распределение случайной величины $Y_{\tau(X)}$.

---

[1] Здесь I{B} - индикатор события B, то есть случайная величина, равная единице при $\omega \in B$ и нулю иначе.

[2] Ладья ходит по прямой (по горизонтали или вертикали), в любую сторону на любое расстояние.