СЕМНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. (**1-2**) Дано множество из n гирь с весами $\{1, ..., n\}$. Из них составляется случайный набор S (каждая гиря берется с вероятностью p, независимо от прочих). Рассмотрим два события: $A = \{$среди S есть три гири, две из которых вместе весят как третья$\}$, $B = \{$в S есть гиря с нечетным весом$\}$. Докажите, что $\mathsf{P}(AB) \geq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

2. Имеется N монет, все попарно различного веса. Наугад выберем две, взвесим и оставим более тяжелую; из оставшихся $N-2$ выберем еще одну, сравним с оставшейся при первом взвешивании, и т.д. Пусть после m-го взвешивания ($m < N-1$) оставлена монета A. Найти вероятность, что она окажется тяжелее в $m+1$-м взвешивании.

3. Пусть $\{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание ($S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_n, n \geq 1\}$ н.о.р., $\mathsf{P}(\xi_1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_1 = -1) = 1-p$) и $0 < m \leq n < 2N$. Найти условную ковариацию S_m и S_n при условии $S_{2N} = 0$.

4. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность одинаково распределенных (возможно, зависимых) случайных величин с конечным математическим ожиданием, и $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $M_n/n \to 0$ п.н. при $n \to \infty$.

5. Тренер волейбольной команды утверждает, что его команда чаще побеждает, если ее предыдущая встреча тоже была выиграна. Рассмотрим долю тех побед, после которых была одержана победа (их число обозначим Y), среди всех побед кроме последней в турнире (их число обозначим X). Пусть турнир состоит из 5 встреч и команда выигрывает встречу с вероятностью 1/2, независимо от результата прочих игр (т.е. слова тренера неверны). Найти $\mathsf{E}\left(\frac{Y}{X} | X > 0\right)$.

6. Пусть (X, Y) – гауссовский случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$, где $|r| < 1$. Найти а) $\mathsf{E}\max\{X, Y\}$ б) $\mathsf{D}\max\{X, Y\}$.

7. Пусть $X_1, \ldots, X_{50}$ — н.о.р. случайные величины с таким распределением: $\mathsf{P}(X_1 = -1) = 1/9, \mathsf{P}(X_1 = -2/5) = 4/9, \mathsf{P}(X_1 = 1/5) = 4/9$. Найти $\mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_{50} = -17)$.

8. (**3-6**) Пусть случайная величина $X \geq 0$ имеет плотность p, которая непрерывна при $x \geq 0$ и дифференцируема при $x > 0$, причем $p(0) = 0$, $p(x) > 0$ при $x > 0$, $p(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $d(\ln p)/dx$ ограничена снизу при $x > 0$. Доказать, что $X = X_1 + X_2$ по распределению, где X_1 и X_2 независимы и X_1 имеет показательное распределение.

9. (**3-6**) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из одномерного нормального распределения с неизвестными параметрами и $s^2 = \sum_{j=1}^n (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$ – оценка дисперсии. Пусть $\mu_k = n^{-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^k$, $k \in \{3, 4\}$ – выборочные центральные моменты. Выборочные асимметрия и эксцесс – это статистики μ_3/s^3 и $\mu_4/s^4 - 3$. Доказать, что каждая из них не зависит от s^2.

10. Источник излучения, расположенный на плоскости в начале координат, при нормальной работе испускает частицы равномерно и независимо одна от другой во всех направлениях. Если же он испорчен, то лучи, по которым летят частицы, концентрируются около одного (неизвестного) направления. Предложить способ определить по наблюдениям, исправен ли источник. Более точно, указать такие функции $f_n(X_1, ..., X_n)$ (где X_i –оставляемые частицами отметки на единичной окружности), что для исправного источника соотношение $f_n \to \xi$ по распределению выполняется, а для любого неисправного нет, причем ξ – известное распределение.

11. (**3-6**) Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение.
Найти $\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathsf{P}(W_s \leq 1, s \leq t)$.

12. Последовательность случайных величин $X_0, X_1, X_2, \ldots$ такова, что $X_0 = X_1 = 1$, $X_{n+1} = |X_n + \varepsilon_n X_{n-1}|, n \geq 1$, где $\{\varepsilon_n\}$ н.о.р., $\mathsf{P}(\varepsilon_1 = \pm 1) = 1/2$. Найти $\mathsf{P}(\min_{n\geq 1} X_n = 0)$.