ИНФОРМАЦИЯ О ПЯТНАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова провела пятнадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих Колмогоровских олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (http://mech.math.msu.su/probab).

Олимпиада прошла 22 апреля 2017 г. раздельно для младших (не прошедших еще в полном объеме курс теории вероятностей) и старших курсов. Продолжительность олимпиады составила 5 часов.

В олимпиаде приняли участие 31 студент младших курсов, и 27 студентов старших курсов. Среди участников — студенты ведущих математических факультетов российских университетов:

- МГУ — 39 участников,
- МФТИ — 10 участников,
- ВШЭ — 4 участника,
- СПБГУ – 4 участника.

Задачи олимпиады

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись "н.о.р." означает "независимые одинаково распределенные".

Задача 1. (1-2) Пусть X и Y — две случайные величины. Покажите, что их совместная функция распределения $F_{X,Y}(x,y) = \mathsf{P}(X \le x, Y \le y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \le F_{X,Y}(x,y) \le \min(F_X(x), F_Y(y)),$$

где $F_X(x) = \mathsf{P}(X \le x), F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \le y)$ — одномерные (маргинальные) функции распределения. В каких случаях неравенства превращаются в равенства для всех $x, y \in \mathbb{R}$?

Задача 2. Три человека играют в следующую игру. В начале игры каждому вручается "монета". Вероятность выпадения орла на монете i-го участника равна p_i (таким образом, монеты неправильные). Каждый независимо от других бросает свою "монету". Если выпадает решка, он выбывает из игры, а если выпадает орел, то проходит в следующий раунд, где оставшиеся в игре опять бросают свои монеты и т.д. Если после некоторого раунда в игре остается только один участник, то игра заканчивается и этот участник получает приз. Если после некоторого раунда ни одного участника в игре не остается, то игра также заканчивается, но приз получает организатор игры (четвертое лицо). Найдите вероятность того, что приз достанется участнику номер 1, если $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$.

Задача 3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна 1/6. Докажите, что кубик правильный (все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

Задача 4. Пусть $(A_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность независимых в совокупности событий, про которые известно, что $\mathsf{P}(A_n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда из условия $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ следует, что $\mathsf{P}(A_n \text{б.ч.}) = 1$ (событие $\{A_n \text{б.ч.}\}$ означает, что произошло бесконечное число событий в последовательности $(A_n, n \in \mathbb{N})$).

Задача 5. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Пусть $N = \sup\{k \ge 1\colon X_k \le X_{k-1} \le \cdots \le X_1\}$. Найдите а) распределение N; б) плотность X_N.

Задача 6. В отрезок $[0, 1]$ случайно, независимо и равномерно бросаются 6 точек. С вероятностью 1 они разбивают отрезок на 7 интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_7$. Найдите плотность длины центрального интервала Δ_4.

Задача 7. Случайная величина X имеет конечные математическое ожидание и дисперсию. Пусть μ — это медиана распределения X[1]. Докажите, что

$$|\mathsf{E}X - \mu| \leq \sqrt{\mathsf{D}X},$$

если а) случайная величина имеет плотность, непрерывную и положительную в окрестности μ, б) **(3-6)** нет дополнительных ограничений на распределение X.

Задача 8. На плоскости рассматривается стандартное точечное пуассоновское поле интенсивности 1[2]. Обозначим через Z_0 — множество точек плоскости, расстояние которых до начала координат меньше, чем до любой из точек поля. Найдите математическое ожидание площади Z_0.

Задача 9. **(3-6)** Пусть X, Y — н.о.р. случайные величины. Докажите, что

$$\mathsf{E}\frac{XY}{X^2 + Y^2} \geq 0.$$

Победители среди младших курсов

Первая премия

Бесман Д.В.

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Малышева С.В.

Студентка III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (7 решенных задач).

Вторая премия

Симарова Е.Н.

Студентка III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (6,5 решенных задач).

Третья премия

Каспарянц Г.Г.

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6 решенных задач).

Победители среди старших курсов

Первая премия

Матушкин А.Д.

Студент IV курса факультета инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института (8,5 решенных задач), научный руководитель — М.Е. Жуковский.

Вторая премия

Брсоян В.Н.

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач), научный руководитель — И.В. Родионов.

---

[1] т.е. $\mu = \min\{x : F(x) \geq 1/2\}$, где $F(x)$ — функция распределения с.в. X

[2] т.е. такой счетный набор точек $(X_i, i \in \mathbb{N})$, что для каждого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^2$ конечной меры меры Лебега $mes(B)$ число точек поля внутри B, $N(B)$, имеет пуассоновское распределение $Pois(mes(B))$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ для любых непересекающихся борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$ конечной меры Лебега случайные величины $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ независимы в совокупности

Каргальцев С.А.

Студент III курса факультета инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института (7 решенных задач).

Шайхеева Т.М.

Студентка IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач), научный руководитель — Д.А. Шабанов.

Третья премия

Зозуленко М.А.

Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6,5 решенных задач), научный руководитель — В.И. Богачев.