Вариант 1

1. Задана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, где σ — неизвестный параметр. Рассмотрим статистики $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$, $Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Докажите, что оценка $T = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Z/Y$ является асимптотически нормальной оценкой σ, и найдите ее асимптотическую дисперсию.

2. $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ, причем λ принимает значения 1 и 2 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Найдите $\widehat{\theta}$ — байесовскую оценку λ. Будет ли оценка $\widehat{\theta}$ состоятельной?

3. $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на множестве $\{1, 2, \ldots, \theta\}$. Найдите оценку параметра θ по методу максимального правдоподобия. Проверьте полученную оценку на несмещенность и состоятельность.

4. $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами (a, σ^2). а) Найдите эффективную оценку параметра a при известном σ^2 или докажите, что ее не существует. б) Найдите эффективную оценку параметра σ^2 при известном a или докажите, что ее не существует.

5. $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Сравните в равномерном подходе относительно квадратичной функции потерь оценки $\overline{X}$ и $X_{(n)}$.