МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том VIII

Математика

Выпуск 3

К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова. Теория вероятностей и математическая статистика

Издательство Московского университета 2013 год

УДК 519.2
ББК 22
С 56

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том VIII. Математика. Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова. Теория вероятностей и математическая статистика. / Под редакцией А.Н.Ширяева, А.В.Лебедева. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. — 144 с.

ISBN 978—5—211—05652—7

ISBN 978—5—211—05652—7

Выпуск посвящается 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова

Предисловие

Кафедра теории вероятностей была образована на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова в 1935 году. Ее возглавил великий русский ученый, академик А.Н.Колмогоров (1903–1987). Впоследствии кафедра стала одним из основных центров по подготовке специалистов и по научным исследованиям в области теории вероятностей и математической статистики в нашей стране. Многие поколения советских и российских ученых в этой области науки считают себя питомцами этой кафедры. А.Н.Колмогоров руководил кафедрой с 1935 по 1966 год. С 1966 по 1995 год ею заведовал академик Б.В.Гнеденко (1912–1995). С 1996 года заведующим кафедрой теории вероятностей является академик РАН, профессор А.Н.Ширяев.

На кафедре также работали такие всемирно известные ученые, как А.Я.Хинчин, В.И.Гливенко, Е.Е.Слуцкий, Е.Б.Дынкин, Р.Л.Добрушин, И.В.Гирсанов, А.Д.Соловьев, Я.Г.Синай, А.Д.Вентцель, М.И.Фрейдлин, С.А.Молчанов и др.

В 2013 году кафедра насчитывает 40 сотрудников, из них: профессоров — 18, доцентов — 12, старших преподавателей — 3, ассистентов — 7.

Помимо преподавания предметов вероятностного цикла на механико-математическом факультете (общие потоки математиков и механиков, экономический поток, вечернее отделение), кафедра осуществляет обучение теории вероятностей и математической статистике на факультетах: химии, геологии, психологии, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, наук о материалах.

В 2012 году сотрудниками кафедры было издано 6 книг (учебных пособий).

На кафедре ведутся обширные и разнообразные исследования в области теории вероятностей и ее приложений. Эти исследования регулярно поддерживаются грантами РФФИ. В качестве основных направлений можно назвать следующие.

1. Теория вероятностей и математическая статистика (общие вопросы, предельные теоремы и их уточнения, теория статистических выводов).

2. Теория случайных процессов и стохастическое исчисление (предельные теоремы, семимартингалы, стохастические дифференциальные уравнения, броуновское движение, процессы Леви, ветвящиеся процессы, случайные блуждания, граничные задачи, теория экстремальных значений).

3. Применения к задачам математической физики, математической биологии, теории информации, теории массового обслуживания, актуарной и финансовой математики и др.

Результаты исследований 2012 года опубликованы в виде 78 научных статей и докладывались на научных конференциях в России и за рубежом (всего 66 докладов на 32 конференциях).

16–21 июня 2003 года под эгидой Российской Академии наук и Московского университета проводилась Международная конференция «Колмогоров и современная математика», посвященная 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова. Основная нагрузка по организации конференции легла на сотрудников кафедры теории вероятностей во главе с А.Н.Ширяевым (вице-председателем оргкомитета конференции). Число участников конференции составило почти 1000 человек. Сотрудниками кафедры было сделано 15 докладов. Сборник тезисов конференции составил 916 страниц.

26–30 июня 2012 года состоялась Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения академика Б.В.Гнеденко. Конференция была организована кафедрой на механико-математическом факультете МГУ при финансовой поддержке РФФИ и других спонсоров. Семь основных секций конференции отразили научные интересы и достижения Б.В.Гнеденко в различных областях теории вероятностей и ее приложений, истории математики и математического образования. В докладах конференции представлены итоги развития его идей и результатов. Количество участников составило 188 человек, из них зарубежных — 42, из МГУ — 41. Всего было сделано 170 докладов, из них сотрудниками МГУ — 31. По итогам конференции издан сборник тезисов объемом 400 страниц, его электронный вариант представлен на сайте кафедры.

Кафедра ведет активную работу со студентами, привлекая их к науке. На кафедре регулярно проводятся Колмогоровские студенческие олимпиады.

20 апреля 2013 года, в ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова, была проведена XII Колмогоровская студенческая олимпиада по теории вероятностей. В олимпиаде приняли участие 43 студента механико-математического факультета, физического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. Задачи и результаты всех Колмогоровских олимпиад представлены на сайте кафедры.

Студенты и аспиранты кафедры регулярно выступают на ежегодной Международной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «Ломоносов», проходящей в МГУ имени М.В.Ломоносова. В 2013 году на подсекции «Теория вероятностей и математическая статистика» ими было представлено 22 доклада из 40.

В 2013 году на кафедре обучается 28 аспирантов, из них 8 участвует в грантах РФФИ сотрудников. В 2012 году состоялось 8 защит кандидатских диссертаций аспирантов и выпускников кафедры в МГУ. В том числе, ассистент кафедры А.Т.Абакирова в 2012 году защитила кандидатскую диссертацию на тему «Стохастические версии неравенства Пуанкаре и логарифмического неравенства Соболева».

26 марта 2013 года ассистент Д.А.Шабанов защитил докторскую диссертацию «Экстремальные и вероятностные задачи теории гиперграфов». Защита докторской диссертации доцента Е.Б.Яровой «Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий» состоится 21 июня 2013 года.

Заслуги сотрудников кафедры отмечены руководством МГУ. Упомянем лишь последние события. В 2012 году профессору Е.В.Булинской присвоено звание заслуженного профессора МГУ, старшему преподавателю В.В.Козлову присвоено звание заслуженного преподавателя МГУ, профессор Г.И.Фалин получил премию имени М.В.Ломоносова за педагогическую деятельность. Ассистент Д.А.Шабанов стал победителем конкурса работ талантливых студентов, аспирантов и молодых ученых МГУ (конкурс О.В.Дерипаска) за 2012 год и получил стипендию МГУ для молодых преподавателей и научных сотрудников, добившихся значительных результатов в педагогической и научно-исследовательской деятельности, на 2013 год.

С более подробной и текущей информацией о кафедре теории вероятностей можно ознакомиться на ее сайте (http://www.math.msu.su/department/probab), а с публикациями и другой деятельностью сотрудников — в системе ИСТИНА (Наука-МГУ) (http://istina.imec.msu.ru/organizations/department/275918/workers/).

В настоящем выпуске представлен ряд статей сотрудников, аспирантов и студентов кафедры по теории вероятностей, математической статистике, случайным процессам и их приложениям, а также методике преподавания.

От безграничной делимости к компенсаторному подходу к предельным теоремам для семимартингалов[1]

Ширяев А.Н.[2]

Монография “Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин” (1949) Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова знаменовала не только создание общей теории слабой сходимости сумм независимых случайных величин, но и открыла путь к отысканию предельных теорем для зависимых величин. В 1960-70-е гг. большое развитие получила теория мартингалов и семимартингалов, включая теорию предельных теорем для таких процессов. Цель настоящей статьи состоит в описании “компенсаторного” подхода в предельных теоремах для семимартингалов, где сходимость выражается в терминах сходимости триплетов предсказумых характеристик, что обобщает условия Гнеденко и Колмогорова.

1 Предельные теоремы в схеме серий

1. Начальным источником предельных теорем для семимартингалов, представленных в настоящем изложении[3], является книга Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]: “Предельные распределения для сумм независимых случайных величин” (1949, Гостехиздат; английские издания: 1954, 1968, Addison-Wesley). Мы показываем, как основные результаты этой книги, опирающиеся на понятие безграничной делимости, допускают естественное распространение на широкий класс стохастических последовательностей и процессов, имеющих семимартингальную структуру.

2. В основе нашего метода лежит понятие *компенсатора*, являющегося “предсказуемым” процессом, который компенсирует рассматриваемые объекты до мартингалов. Оказывается, что компенсаторы являются теми характеристиками, которые определяют слабую сходимость. Мы ограничиваемся по большей части формулировками результатов. По поводу их доказательств см. книги [2], [3].

3. Начнем с современной версии одного из основных результатов книги Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова относительно слабой сходимости в схеме серий независимых случайных величин.

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту Правительства РФ 11G34.31.0073 и гранту РФФИ № 11-01-00949.

[2]Ширяев Альберт Николаевич, albertsh@mi.ras.ru, академик РАН, главный научный сотрудник Математического института им. В.А.Стеклова РАН; профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Статья представляет собой переработанный доклад автора на конференции “Теория вероятностей и ее приложения” (26–30 июня 2012 г.), посвященной столетию со дня рождения Б. В. Гнеденко.

Предполагается, что (при каждом $n \geq 1$) заданы вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathsf{P}^n)$ и последовательность независимых случайных величин $(\xi^n_k)_{1\leq k\leq K^n}$, принимающих значения в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $K^n \leq \infty$. Беря тензорное произведение пространств $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathsf{P}^n)$, $n \geq 1$, всегда можно предполагать, что рассматриваемая схема серий независимых (при каждом n) случайных величин $(\xi^n_k)_{1\leq k\leq K^n}$, $n \geq 1$, определена на некотором едином полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Мы ограничимся схемой серий, для которой выполнены следующие условия:

$$\sum_{1\leq k\leq K^n} |\mathsf{E} h(\xi^n_k)| < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{1\leq k\leq K^n} \mathsf{E}(|\xi^n_k|^2 \wedge 1) < \infty, \tag{2}$$

где $n \geq 1$ и $h = h(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — некоторая функция "урезания", которая ограничена и удовлетворяет условию $h(x) = x$ в окрестности точки $x = 0$.

Условия (1) и (2) являются достаточными для определенности величин

$$S^n = \sum_{1\leq k\leq K^n} \xi^n_k \tag{3}$$

(сходимость ряда (3) обеспечивается, в силу (1) и (2), теоремой о "трех рядах"). Если $K^n < \infty$, то можно положить $\xi^n_k = 0$ для $k > K^n$, и, тем самым, в (3) всегда можно считать, что $K^n = \infty$.

Предельное поведение величин S^n может быть произвольным: достаточно положить $\xi^n_k = 0$ для $k \geq 2$, а ξ^n_1 выбрать имеющими произвольное распределение. Однако, если все индивидуальные слагаемые ξ^n_k становятся "малыми" равномерно по k при $n \uparrow \infty$ и если S^n сходятся по распределению, то предельное распределение необходимым образом является *безгранично делимым.*

Упомянутое свойство равномерной малости величин ξ^n_k формулируется следующим образом: схема серий величин называется *инфинитезимальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$\lim_n \sup_{k\geq 1} \mathsf{P}(|\xi^n_k| > \varepsilon) = 0.$$

Следующий результат можно извлечь из книг [1], [2].

Теорема 1. *Предположим, что схема серий (ξ^n_k) независимых (при каждом n) случайных величин является инфинитезимальной; положим $S^n = \sum_k \xi^n_k$. Пусть X^n при каждом n является $\mathbb{R}^d$-значной безгранично делимой случайной величиной с характеристиками (b^n, c^n, F^n) относительно непрерывной функции урезания h. Предполагается, что X^n независимы от (ξ^n_k) при каждом $n \geq 1$.*

Пусть

$$\widetilde{c}^n = (\widetilde{c}^{n,ij}), \qquad \widetilde{c}^{n,ij} = c^{n,ij} + \int h^i(x) h^j(x)\, F^n(dx).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(a) *Если* $\mathrm{Law}(S^n + X^n) \to \mu$ *слабо, то μ является безгранично делимым распределением.*

(b) *Для того чтобы* $\mathrm{Law}(S^n + X^n)$ *сходились слабо к $\mu = \mu(b, c, F)$, где $\mu(b, c, F)$ — безгранично делимое распределение с триплетом (b, c, F), необходимо и достаточно, чтобы* *выполнялись следующие условия:*

$$b^n + \sum_k \mathsf{E} h(\xi_k^n) \to b, \tag{4}$$

$$\widetilde{c}^{n,ij} + \sum_k \Big\{ \mathsf{E} h^j h^i(\xi_k^n) - \mathsf{E} h^j(\xi_k^n) h^i(\xi_k^n) \Big\} \to \widetilde{c}^{ij}, \tag{5}$$

$$F^n(g) + \sum_k \mathsf{E} g(\xi_k^n) \to F(g), \qquad g \in C_2(\mathbb{R}^d), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{c}^{ij} = c^{ij} + \int h^j(x) h^i(x)\, F(dx), \qquad F(g) = \int g(x)\, F(dx)$$

и $C_2(\mathbb{R}^d)$ есть множество всех ограниченных непрерывных функций из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, которые равны 0 в окрестности 0.

Замечание. Напомним, что характеристическая функция $\varphi = \varphi(u)$ безгранично делимого распределения $\mu = \mu(a, b, F)$ дается формулой Колмогорова–Леви–Хинчина

$$\varphi = \exp \psi_{b,c,F}, \tag{7}$$

где

$$\psi_{b,c,F} = iu \cdot b - \frac{1}{2} u \cdot c \cdot u + \int (e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x))\, F(dx) \tag{8}$$

и

$b \in \mathbb{R}^d$,

c — симметричная неотрицательно определенная матрица размера $d \times d$,

F — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^d$ с $F(\{0\} = 0$ и $\int (|x|^2 \wedge 1)\, F(dx) < \infty$.

2 Элементы стохастического анализа

1. Прежде чем перейти к формулировкам аналога условий (4)–(6) и теоремы 1, введем ряд необходимых нам понятий стохастического исчисления для мартингалов и семимартингалов.

Пусть $X = (X_k)_{k\geq 0}$ есть стохастическая последовательность, заданная на (дискретном по времени) фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}, \mathsf{P})$, такая, что $\mathsf{E}|X_k| < \infty$, случайные величины X_k являются $\mathcal{F}_k$-измеримыми для всех $k \geq 0$ и $X_0 = 0$.

Очевидным образом,

$$X_k = \sum_{l\leq k} \mathsf{E}(\Delta X_l \,|\, \mathcal{F}_{l-1}) + \sum_{l\leq k} \big(\Delta X_l - \mathsf{E}(\Delta X_l \,|\, \mathcal{F}_{l-1})\big),$$

где $\Delta X_l = X_l - X_{l-1}$. Если обозначить

$$A_k = \sum_{l\leq k} \mathsf{E}(\Delta X_l \,|\, \mathcal{F}_{l-1}), \qquad M_k = \sum_{l\leq k} \big(\Delta X_l - \mathsf{E}(\Delta X_l \,|\, \mathcal{F}_{l-1})\big),$$

то при $k \geq 1$ получим представление

$$X_k = A_k + M_k, \tag{9}$$

где A_k являются $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримыми (иначе — предсказуемыми) и $(M_k)_{k\geq 0}$ есть мартингал ($\mathsf{E}|M_k| < \infty$, $\mathsf{E}(M_{k+1} \,|\, \mathcal{F}_k) = M_k$, $k \geq 0$).

Если переписать (9) в виде $X_k - A_k = M_k$, то можно сказать, что A_k играют роль *компенсатора*, поскольку они "компенсируют" X_k до мартингала. Это объясняет, почему последовательность $A = (A_k)_{k\geq 0}$ называют *компенсатором* последовательности $X = (X_k)_{k\geq 0}$.

Представление (9) называется *разложением Дуба.* В классе таких разложений с предсказуемым процессом A и $A_0 = 0$ такое представление *единственно.*

Несмотря на очевидность разложения (9), оно имеет на самом деле нетривиальный характер. Действительно, пусть $X_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, где $(\xi_k)_{k\geq 0}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{P}(\xi_k = \pm 1) = 1/2$, $X_0 = 0$. Для $|X_k|$, как можно увидеть из разложения Дуба, имеет место представление

$$|X_k| = \sum_{1\leq l\leq k} (\operatorname{sgn} X_{l-1})\Delta X_l + L_k(0), \tag{10}$$

где $\Delta_l = X_l - X_{l-1}$ и

$$L_k(0) = \sharp\{0 \leq l \leq k-1 \colon X_l = 0\}$$

есть число нулей последовательности $(X_l)_{0\leq l\leq k-1}$ ("дискретное локальное время").

Напомним, что непрерывным аналогом представления (9) является формула Танака для броуновского движения $(|B_t|)_{t\geq 0}$:

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn} B_s \, dB_s + L_t(0),$$

где $L_t(0)$ — локальное время броуновского движения в нуле:

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon)\, ds.$$

Из представления (10) можно получить асимптотическую формулу

$$\mathsf{E} L_k(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} k}. \tag{11}$$

В самом деле, из (10) следует, что

$$\mathsf{E}|X_k| = \mathsf{E} L_k(0). \tag{12}$$

Поскольку $X_k/\sqrt{k} \sim \mathcal{N}(0,1)$, то можно заключить, что $\mathsf{E}|X_k| \sim \sqrt{(2/\pi)k}$, что вместе с (12) приводит к формуле (11).

Без предположения $\mathsf{E}|X_l| < \infty$ можно записать, что

$$\Delta X_l = \Delta X_l I(|\Delta X_l| \leq a) + \Delta X_l I(|\Delta X_l| > a)$$

для всякого $a > 0$. Тогда для $X_k^a = \sum_{1\leq l\leq k} \Delta X_l I(|\Delta X_l| \leq a)$ мы имеем представление

$$X_k^a = A_k^a + M_k^a,$$

где

$$A_k^a = \sum_{1\le l\le k} \mathsf{E}\big(\Delta X_l I(|\Delta X_l|\le a)\,|\,\mathcal{F}_{l-1}\big),$$
$$M_k^a = \sum_{1\le l\le k} \Big[\Delta X_l I(|\Delta X_l|\le a) - \mathsf{E}\big(\Delta X_l I(|\Delta X_l|\le a)\,|\,\mathcal{F}_{l-1}\big)\Big].$$

Следовательно, для любого $a>0$

$$X_k = A_k^a + M_k^a + \sum_{1\le l\le k} \Delta X_l I(|\Delta X_l|\le a). \tag{13}$$

2. Представления (9), (13) для дискретного времени хорошо объясняют их приводимые далее аналоги для случая непрерывного времени, играющие важную роль в дальнейшем анализе.

Введем сначала несколько определений.

a) Стохастическим базисом называется вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, наделенное некоторым потоком $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ сигма-алгебр таких, что $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ при $s\le t$ и (непрерывность справа) $\mathcal{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$).

b) Момент остановки $T=T(\omega)$ есть отображение $\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$.

c) Предсказуемая σ-алгебра $\mathcal{P}$ есть σ-алгебра подмножеств в $\Omega\times\mathbb{R}_+$, порождаемая всеми непрерывными слева процессами, рассматриваемыми как отображения на $\Omega\times\mathbb{R}_+$.

Напомним следующий важный результат, известный как *разложение Дуба–Мейера.*

Теорема 2. *Если $X=(X_t)_{t\ge0}$ является субмартингалом класса (D),*[4] *то существует единственный (с точностью до неразличимости) возрастающий интегрируемый предсказуемый процесс A с $A_0=0$, такой, что $X-A$ является равномерно интегрируемым мартингалом.*

Следствие. *Пусть процесс X принадлежит классу $\mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ (возрастающих, т.е. неубывающих, локально интегрируемых процессов). Тогда существует единственный (с точностью до неразличимости) процесс, называемый компенсатором процесса X и обозначаемый A, такой, что:*

(i) *$X-A$ является локальным мартингалом;*

(ii) *$\mathsf{E}X_T=\mathsf{E}A_T$ для всех конечных моментов остановки T;*

(iii) *$\mathsf{E}\int_0^\infty H_s\,dA_s = \mathsf{E}\int_0^\infty H_s\,dX_s$ для всех неотрицательных предсказуемых процессов H.*

Пример 1. Рассмотрим простейший точечный процесс $X_t=I(t\ge\theta)$, где θ есть $(0,\infty]$-значная случайная величина, заданная на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, с функцией распределения G на $(0,\infty]$.

Лемма 1. *Компенсатор процесса X задается формулой*

$$A_t=\alpha(t\wedge\theta),\quad \textit{где}\quad \alpha(t)=\int_{(0,t]}\frac{G(ds)}{G([s,\infty])}.$$

[4]Класс Дирихле (D) есть множество $\{X_T\colon T$ — произвольные конечные моменты остановки$\}$ случайных величин X_T, которые равномерно интегрируемы.

Пример 2. Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения G, имеющей плотность g. Введем эмпирический процесс

$$Z_t^n = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq n} I(\xi_i \leq t).$$

Положим $X_t^n = nZ_t^n$. Ясно, что процесс $X^n = (X_t^n)_{t\geq 0}$ является точечным процессом (с единичными скачками).

Лемма 2. *Компенсатор A процесса X^n относительно фильтрации $\mathbb{F}^{X^n}$ задается формулой*

$$A_t^n = \int_0^t (n - X_s^n) \frac{g(s)}{G([s,\infty])}\, ds.$$

Оба процесса X и X^n в примерах 1 и 2 являются субмартингалами с разложениями Дуба–Мейера вида $X_t = A_t + M_t$, $A_t \geq 0$, $A \in \mathcal{P}$, $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$. Это подсказывает, что естественно следующее определение.

Определение 1. Каждый стохастический процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ с $\mathcal{F}_0$-измеримыми значениями X_0, допускающий представление в виде $X_t = A_t + M_t$, где $A \in \mathcal{V}$ (процессы ограниченной вариации с $\mathcal{F}_t$-измеримыми A_t), $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ (локальные мартингалы с $\mathcal{F}_t$-измеримыми M_t), называется *семимартингалом.*

Семимартингал X, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, называется *специальным семимартингалом*, если существует представление $X = X_0 + A + M$ с предсказуемым ($\mathcal{P}$-предсказуемым) процессом A. (В классе представлений с предсказуемыми A такие представления единственны. Всякий процесс X с ограниченными скачками является специальным семимартингалом [2].)

3. Для формулировки предельных теорем (и вообще для общей теории) полезно ввести понятие характеристик семимартингалов.

Пусть $X = (X^1, \dots, X^d)$ есть d-мерный семимартингал (каждая компонента X^i — семимартингал), заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathsf{P})$.

Будем называть функцию $h = h(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *функцией урезания*, если она ограничена и имеет вид $h(x) = x$ в окрестности нуля. Положим

$$\check{X}(h)_t = \sum_{s\leq t} \bigl[\Delta X_s - h(\Delta X_s)\bigr],$$
$$X(h) = X - \check{X}(h)$$

(выражение в квадратных скобках не равно нулю, только если $|\Delta X_s| > b$ для некоторого $b > 0$). Процесс $X(h)$ является процессом с ограниченными скачками. Следовательно, это специальный семимартингал и для него имеет место (каноническое) разложение

$$X(h) = X_0 + B(h) + M(h)$$

с предсказуемым $B(h)$; см. [2].

Зафиксируем функцию урезания $h > 0$.

Следующий набор (B, C, ν) называется *триплетом* предсказуемых характеристик семимартингала X (относительно функции урезания h):

(i) $B = (B^i)_{i\leq d}$ — предсказуемый процесс с $B^i = B^i(h)$;

(ii) $C = (C^{ij})_{i,j\le d}$ — непрерывный матричнозначный процесс с $C^{ij} = \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$ (здесь $X^{i,c}$ — непрерывная мартингальная составляющая процесса X^i и $\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$ — предсказуемый процесс такой, что $X^{i,c}X^{j,c} - \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$);

(iii) $\nu = \nu(\omega; dt, dx)$ — предсказуемая случайная мера на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ (компенсатор меры скачков μ^X процесса X):

$$\mu^X(\omega; dt, dx) = \sum_s I(\Delta X_s(\omega) \neq 0)\varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt, dx),$$

где ε_a обозначает меру Дирака в точке a.

Тем самым, $\mu^X - \nu$ является $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$-мерой, т.е.

$$\begin{aligned}
&W * \mu^X - W * \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}},\\
&(W * \mu^X)_t = \int_{[0,t]\times E} W(\omega; s, x)\, \mu^X(\omega; ds, dx),\\
&(W * \nu)_t = \int_{[0,t]\times E} W(\omega; s, x)\, \nu^X(\omega; ds, dx).
\end{aligned}$$

4. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть X есть d-мерный семимартингал с характеристиками $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ (относительно функции урезания h). Тогда имеет место следующее* каноническое представление *для X:*

$$X = X_0 + B + X^c + h(x) * (\mu^X - \nu) + (x - h(x)) * \mu^X, \tag{14}$$

где X^c — непрерывная мартингальная составляющая процесса X. Более подробно,

$$\begin{aligned}
X_t = X_0 + B_t + X^c_t &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\big(\mu^X(\omega; ds, dx) - \nu(\omega; ds, dx)\big)\\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (x - h(x))\, \mu^X(\omega; ds, dx).
\end{aligned}$$

Разложение (14) называется разложением *Леви–Ито.*

Следствие. *Если семимартингал X имеет независимые приращения, то триплет $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ является детерминированным.*

Замечание. Процессы X с независимыми приращениями не обязательно являются семимартингалами. Они будут таковыми, если для каждого $u \in \mathbb{R}^d$ функция $t \rightsquigarrow \mathsf{E}e^{iu\cdot X_t}$ имеет конечную вариацию на конечных t-интервалах.

Теорема 4. *Процесс X со значениями в $\mathbb{R}^d$ является процессом со стационарными независимыми приращениями тогда и только тогда, когда он является семимартингалом с триплетом характеристик вида*

$$B_t(\omega) = bt, \quad C_t(\omega) = ct, \quad \nu(\omega; dt, dx) = dt\, K(dx),$$

где $b \in \mathbb{R}^d$, c — симметричная неотрицательно определенная $d\times d$-матрица, K — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (|x|^2 \wedge 1)\, K(dx) < \infty$ и $K(\{0\}) = 0$.

Более того, для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $u \in \mathbb{R}^d$ справедлива формула Колмогорова–Леви–Хинчина:

$$\mathsf{E}e^{iu\cdot X_t} = \exp\bigg\{ t\bigg[iu\cdot b - \frac{1}{2}u\cdot c\cdot u + \int \big(e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)\big)\, K(dx)\bigg]\bigg\}.$$

Для семимартингала с триплетом $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ положим

$$A(u)_t = iu \cdot B_t - \frac{1}{2} u \cdot C_t \cdot u + \int \bigl(e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)\bigr)\, \nu([0,t]\times dx),$$
$$G(u) = \mathcal{E}(A(u)),$$

где для всякого семимартингала $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$

$$\mathcal{E}(Y)_t = e^{Y_t - Y_0 - \langle Y^c, Y^c\rangle/2} \prod_{s\leq t} (1 + \Delta Y_s) e^{-\Delta Y_s}.$$

Процесс $\mathcal{E}(Y) = (\mathcal{E}(Y)_t)_{t\geq 0}$ называется *стохастической экспонентой*: он удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\mathcal{E}(Y)_t = \mathcal{E}(Y)_{t-}\, dY_t.$$

Отметим, что для процесса A ограниченной вариации выполнено равенство

$$G(u) = e^{A_t} \prod_{s\leq t} (1 + \Delta A_s) e^{-\Delta A_s}.$$

Следующая теорема является мартингальной версией представления Колмогорова–Леви–Хинчина для семимартингалов.

Теорема 5. *Пусть функция $G(u) = \mathcal{E}(A(u))$ не обращается в нуль (т.е. $\Delta A(u) \neq -1$ для всех u). Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *X есть семимартингал с триплетом (B, C, ν);*

(b) *для каждого $u \in \mathbb{R}^d$*

$$M_t \equiv \frac{e^{iu\cdot X}}{G(u)} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Следствие. *Если X — процесс с независимыми приращениями, то функция $G(u) = \mathcal{E}(A(u))$ является детерминированной и*

$$\mathsf{E} \frac{e^{iu\cdot X}}{G(u)} = \mathsf{E} M_t \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{E} e^{e^{i}u\cdot X} = G(u) \cdot 1,$$

что и есть формула Колмогорова–Леви–Хинчина.

5.

Пример 3. Пусть $X = N$ — точечный процесс с

$$N_t = \sum_n I(t \geq T_n), \qquad T_0 = 0, \quad T_n < T_{n+1}, \quad \lim_n T_n = \infty,$$

с компенсатором $A = (A_t)_{t\geq 0}$. Здесь $B(h) = h(1)A$, $C = 0$,

$$\nu(\omega; dt, dx) = dA_t(\omega) \otimes \varepsilon_1(dx) \tag{15}$$

($\varepsilon_1(dx)$ обозначает меру Дирака в точке $x = 1$).

Пример 4. Рассмотрим эмпирический процесс размера n:

$$Z_t^n = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le n} I(z_i \le t),$$

где $(z_i)_{i \ge 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения G.

Компенсатор A^n процесса $X^n = nZ^n$ (относительно $(\mathcal{F}_t^{Z^n})_{t \ge 0}$) задается формулой

$$A_t^n = \int_0^t (n - X_s^n) \frac{g(s)}{G([s, \infty])}\, ds, \quad \text{где } g = G'. \tag{16}$$

Компенсатор точечного процесса $\overline{X}_t^n = nZ_{t/n}^n$ задается формулой

$$\overline{A}_t^n = \int_0^t \left(1 - \frac{\overline{X}_s^n}{n}\right) \frac{g(s/n)}{G([s/n, \infty])}\, ds.$$

Пример 5. Рассмотрим процесс

$$V_t^n = \sqrt{n}\big(Z_t^n - G((0, t])\big),$$

где $G = \operatorname{Law} Z$ — функция распределения из примера 2. Характеристиками процесса V^n являются (B^n, C^n, ν^n), где

$$\begin{aligned} B_t^n &= -\int_0^t V_s^n \frac{g(s)}{G([s, \infty])}\, ds, \\ C_t^n &= 0, \\ \nu^n(\omega; dt, dx) &= \left[n - \sqrt{n} \frac{V_t^n(\omega)}{G([t, \infty])}\right] g(t)\, dt \otimes \varepsilon_{1/\sqrt{n}}(dx). \end{aligned}$$

6. Будем говорить, что семейство $\sigma = (\sigma_t)_{t \ge 0}$ случайных величин σ_t, $t \ge 0$, заданных на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathsf{P})$, образует замену времени, если

1) каждый момент σ_t является моментом остановки;

2) $\sigma_0 = 0$;

3) каждая траектория $t \rightsquigarrow \sigma_t$ является возрастающей непрерывной справа функцией со скачками, равными единице.

Это понятие замены времени позволяет строить широкие классы процессов.

Так, предположим, что $\sigma_t < \infty$ (P-п.н.), и положим

$$Y_t = \sum_{1 \le k \le \sigma_t} \eta_k \equiv \sum_{k \ge 1} \eta_k I(\tau_k \le t), \tag{17}$$

где $\tau_k = \inf\{t \colon \sigma_t \ge k\}$ и (η_k) — некоторая последовательность случайных величин. Если σ_t принимает значения в $\overline{\mathbb{N}}$, то полагаем

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \sum_{1 \le k \le \sigma_t \wedge n} \eta_k \equiv \sum_{1 \le k \le n} \eta_k I(\tau_k \le t), \\ Y_t &= \mathsf{P}\text{-}\lim_n Y_t^n. \end{aligned} \tag{18}$$

Следующая теорема описывает структуру семимартингалов вида $(Y_t)_{t \ge 0}$.

Теорема 6. *Пусть h — некоторая функция урезания. Формулы* (17), (18) *определяют семимартингалы тогда и только тогда, когда для всех $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\sum_{1\le k\le\sigma_t} \big|\mathsf{E}\big(h(\eta_k)\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\big)\big| \overset{\mathsf{P}\text{-}п.н.}{<} \infty, \qquad \sum_{1\le k\le\sigma_t} \mathsf{E}\big(|\eta_k|^2 \wedge 1\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\big) \overset{\mathsf{P}\text{-}п.н.}{<} \infty. \tag{19}$$

При этих условиях характеристики (B, C, ν) процесса Y (относительно h) задаются формулами

$$\begin{aligned} B_t &= \sum_{1\le k\le\sigma_t} \mathsf{E}\big(h(\eta_k)\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\big), \\ C_t &= 0, \\ \nu([0,t]\times g) &= \sum_{1\le k\le\sigma_t} \mathsf{E}\big(g(\eta_k) I(\eta_k \ne 0)\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\big) \end{aligned}$$

для любых борелевских функций $g \ge 0$.

3 Предельные теоремы для семимартингалов

1. Приведем теперь ряд утверждений о сходимости семимартингалов, которые являются непосредственными обобщениями изложенных в [1] классических предельных теорем для схемы серий независимых (построчно) случайных величин. Мы ограничивается лишь только формулировками, полные доказательства можно найти в [2], [3].

I. *Сходимость к общим процессам с независимыми приращениями.*

А. *Конечномерная сходимость.*

Теорема 7. *Предположим, что X^n, $n \ge 1$, являются семимартингалами, $X_0 = 0$, с триплетами $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ и X является процессом с независимыми приращениями без фиксированных точек разрыва (эквивалентно, $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) = 0$ для всех t). Пусть $D \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что*

$$\begin{aligned} &\sup_n \nu^n\big(\{s\} \times \{|x| > \varepsilon\}\big) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,\ \varepsilon > 0, \\ &B^n_t \xrightarrow{\mathsf{P}} B_t \quad \text{для всех } t \in D, \\ &\widetilde{C}^n_t \xrightarrow{\mathsf{P}} \widetilde{C}_t \quad \text{для всех } t \in D, \\ &\qquad \text{где } \widetilde{C}^{ij}_t = C^{ij}_t + (h^i h^j) * \nu_t - \textstyle\sum_{s\le t} \Delta B^i_s \Delta B^j_s \text{ и} \\ &\qquad \widetilde{C}^n \text{ определяется аналогичным образом,} \\ &g * \nu^n_t \xrightarrow{\mathsf{P}} g * \nu_t \quad \text{для всех } t \in D,\ g \in C_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Тогда $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$ (слабая сходимость конечномерных распределений вдоль D), т.е.

$$\mathrm{Law}(X^n_{t_0}, \ldots, X^n_{t_l}) \to \mathrm{Law}(X_{t_0}, \ldots, X_{t_l}) \quad \text{для } (t_0, \ldots, t_l) \in D.$$

Следствие. *Рассмотрим треугольную схему серий $X^n_t = \sum_{1\le k\le K^n} \xi^n_k$ с*

$$\begin{aligned} &\sum_{1\le k\le K^n} \big|\mathsf{E}\big(h(\xi^n_k)\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}\big)\big| \overset{п.н.}{<} \infty, \\ &\sum_{1\le k\le K^n} \mathsf{E}\big(|\xi^n_k|^2 \wedge 1\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}\big) \overset{п.н.}{<} \infty. \end{aligned}$$

Предположим, что μ — безгранично делимое распределение на $\mathbb{R}^d$ с характеристикам (b, c, F), и пусть $\tilde{c}^{ij} = c^{ij} + \int h^i(x)h^j(x)\,F(dx)$. Пусть также

$$\sup_{1\le k\le K^n} \mathsf{P}^n\big(|\xi_k^n| > \varepsilon \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon > 0,$$

и

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le k\le K^n} \mathsf{E}^n\big[h(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big] \xrightarrow{\mathsf{P}} b,\\
&\sum_{1\le k\le K^n} \big[\mathsf{E}^n(h^j h^i(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n) - \mathsf{E}^n(h^j(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n)\mathsf{E}^n(h^i(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n)\big] \xrightarrow{\mathsf{P}} \tilde{c}_{ij},\\
&\sum_{1\le k\le K^n} \mathsf{E}^n\big[g(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big] \xrightarrow{\mathsf{P}} F(g) \quad \text{для всех } g \in C_2(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

(Здесь $C_2(\mathbb{R}^d)$ — множество всех непрерывных ограниченных функций из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, равных нулю в окрестности нуля.) Тогда имеет место слабая сходимость

$$\mathcal{L}(Z^n) \to \mu.$$

B. *Функциональная сходимость.*

Теорема 8. *Предположим, что X — процесс с независимыми приращениями без фиксированных моментов разрыва и D — плотное подмножество в $\mathbb{R}_+$. Условия*

$$\begin{aligned}
\sup_{s\le t} |B_s^n - B_s| &\xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,\\
\sup_{s\le t} |\widetilde{C}_s^n - C_s| &\xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,\\
\sup_{s\le t} |g * \nu_s^n - g * \nu_s| &\xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,\ g \in C_2(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

обеспечивают слабую функциональную сходимость $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Следствие. (Применение к схеме серий.) *Рассмотрим треугольную схему серий (ξ_k^n), и положим $X_t^n = \sum_{1\le k\le\sigma_t^n} \xi_k^n$. Пусть X — процесс с независимыми приращениями без фиксированных моментов разрывов с характеристиками (B, C, ν). Если*

$$\sup_{s\le t} \Bigg| \sum_{1\le k\le\sigma_s^n} \mathsf{E}^n\big[h(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big] - B_t \Bigg| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \ge 0$$

и существует плотное подмножество $D \subseteq \mathbb{R}_+$ такое, что для всех $t \in D$

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le k\le\sigma_t^n} \Big\{\mathsf{E}^n\big[h^j h^i(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big] - \mathsf{E}^n\big[h^j(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big]\mathsf{E}^n\big[h^i(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big]\Big\} \xrightarrow{\mathsf{P}} \tilde{C}_{ij},\\
&\sum_{1\le k\le\sigma_t^n} \mathsf{E}^n\big[g(\xi_k^n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\big] \xrightarrow{\mathsf{P}} g * \nu_t \quad \text{для всех } g \in C_2(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

то $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

II. *Центральная предельная теорема*: *мартингальный случай.* Пусть X^n есть локальный мартингал. Приведем условия, при которых такие мартингалы сходятся к непрерывному гауссовскому процессу X с независимыми приращениями и характеристиками $(0, C, 0)$.

Отметим, что предположение "X является мартингалом" сводится к тому, что

$$\big(|x|^2 \wedge |x|\big) * \nu_t^n < \infty \quad \text{для всех } t \geq 0,$$
$$B^n = [h(x) - x] * \nu^n.$$

Теорема 9. *Если X^n является локальным мартингалом с $|\Delta X^n| \leq K$ и D есть плотное подмножество в $\mathbb{R}_+$, то следующие условия равносильны:*

(a) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$;

(b) $[X^{i,n}, X^{j,n}]_t \xrightarrow{\mathsf{P}} C_t^{ij}$ *для всех* $t \in D$;

(c) $\langle X^{i,n}, X^{j,n}\rangle_t \xrightarrow{\mathsf{P}} C_t^{ij}$ *и* $\nu^n([0,t] \times \{|x| > \varepsilon\}) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ *для всех* $t \in D$, $\varepsilon > 0$.

III. *Сходимость к точечному процессу.* Пусть X — точечный процесс с компенсатором $A_t = \mathsf{E}X_t$. Простые вычисления показывают, что A является компенсатором X и триплет (B, C, ν) процесса X имеет вид

$$B_t = h(1)A_t, \quad C_t = 0, \quad \nu(dt, dx) = dA_t \otimes \varepsilon_1(dx).$$

Теорема 10. *Пусть X^n — точечные процессы с компенсаторами A^n и $D \subset \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Условие $A_t^n \xrightarrow{\mathsf{P}} A_t$ для всех $t \in D$ обеспечивает слабую сходимость*

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X.$$

(b) *Если к тому же D — всюду плотное множество в $\mathbb{R}_+$, то сходимость $A_t^n \xrightarrow{\mathsf{P}} A_t$ для всех $t \in D$ обеспечивает слабую сходимость $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

В рамках общей теории сходимости семимартингалов (X^n к X) естественно рассмотреть

$$\text{конечномерную сходимость } X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$$

и

$$\text{функциональную сходимость } X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

где X^n и X — семимартингалы.

Теорема 11. *Для сходимости $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$ достаточными являются условия*

$$B_t^n - B_t \circ X^n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,$$
$$\widetilde{C}_t^n - \widetilde{C}_t \circ X^n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,$$
$$g * \nu_t^n - (g * \nu_t) \circ X^n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } t \in D,\ g \in C_2(\mathbb{R}^d).$$

(Мы рассматриваем X^n как отображение $\Omega^n \to \Omega = D(\mathbb{R}^d)$, так что процессы $B \circ X^n$ и т.д. корректно определены.)

Для функциональной сходимости $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ достаточными являются (более сильные) условия

$$\sup_{t \le N} |B_t^n - B_t \circ X^n| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } N > 0,$$
$$\sup_{t \le N} |\widetilde{C}_t^n - \widetilde{C}_t \circ X^n| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } N > 0,$$
$$\sup_{t \le N} |g * \nu_t^n - (g * \nu_t) \circ X^n| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{для всех } N > 0,\ g \in C_2(\mathbb{R}^d).$$

Завершая наше изложение основных результатов о сходимости семимартингалов, подчеркнем еще раз, что все условия сходимости выражены с терминах компенсаторных характеристик (B^n, C^n, ν^n). Приведенные выше условия полезно сравнить с условиями (4)–(6), являющимися условиями Гнеденко–Колмогорова в схеме серий.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.*, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 264 с.

[2] *Жакод Ж., Ширяев А.Н.*, Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Наука, 1994. 542 с., 366 с.

[3] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.*, Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Системы управления запасами с ограничениями[1]

Булинская Е.В.[2], Шахгильдян К.Д.[3]

Цель работы – исследование системы с периодическим пополнением запасов. Предполагается, что возможно взаимодействие с двумя поставщиками. Один из них доставляет заказы немедленно, а другой ненадежен, т.е. доставляет заказы немедленно лишь с вероятностью $p \in (0, 1)$, а с вероятностью $q = 1 - p$ происходит задержка на один период. Сначала рассматривается возможность любого размера заказов у каждого из поставщиков. Далее вводится дополнительное предположение: бюджет заказчика в каждый из рассматриваемых периодов ограничен. Устанавливается оптимальная политика заказов, минимизирующая дисконтированные средние издержки для любого заданного горизонта планирования.

1 Введение

Возникновение математической запасов обычно связывается с появлением в 1951 году работы [2] и в 1955 работы [4]. Подробнее об истории и возникших ранее моделях можно прочитать в [3]. Модели управления запасами с несколькими источниками пополнения всегда привлекали внимание исследователей, особенно в связи с изучением сетей снабжения. Обзор результатов, полученных до 2003 года можно найти в статье [13]. За прошедшее десятилетие интерес к данной проблематике возрос. При этом рассматривались как системы с непрерывным мониторингом (см., например, [1], [15]), так и системы с периодическим контролем уровня запасов, среди них отметим работы [6], [7], [9], [11], результаты которых обобщаются в данной статье. Чтобы избежать значительного увеличения объема, мы включили лишь случай бюджетных ограничений, оставив до следующей публикации ограничения на возможности поставщиков. Кроме того, планируется изучить другие виды целевой функции по аналогии с [8], [10], [12], а также различные типы входящих процессов, не только флуктуирующую среду, как в [14], но и случайную.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ № 13-01-00653.

[2]Булинская Екатерина Вадимовна, ebulinsk@yandex.ru, профессор кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Шахгильдян Ксения Дмитриевна, ksy-shakhgildyan@yandex.ru, аспирантка кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

2 Описание модели

Мы изучаем однопродуктовую систему с периодическим пополнением запасов, предназначенную для удовлетворения будущего спроса. Предположим, что требования на продукт поступают периодически (раз в день, неделю, месяц и т.д.). Для простоты будем считать, что размеры требований задаются последовательностью $\{\xi_k\}_{k\ge1}$ независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин (н.о.р. с.в.). Общую функцию распределения обозначим $F(t)$. Предполагается также, что существуют плотность распределения $\phi(t)>0$ для $t\in(0,\infty)$ и математическое ожидание $\mu=\mathsf{E}\xi_k$. Пусть x_k – уровень запасов в конце k-го периода, $k\ge1$. Дополнительно считаем, что неудовлетворенный спрос откладывается до прибытия очередной партии продуктов. Поэтому x_k может быть отрицательным, в этом случае $|x_k|$ – размер дефицита. Обозначим $x_0=x$ начальный уровень запасов и n горизонт планирования.

Далее мы рассматриваем случай двух поставщиков. В начале каждого периода можно отправить заказ одному из поставщиков или обоим. Предполагается, что размеры заказов зависят от имеющегося уровня запасов. Первый поставщик доставляет заказ немедленно, а второй, будучи ненадежным, доставляет заказ немедленно лишь с вероятностью $p\in(0,1)$ и с вероятностью $q=1-p$ имеет задержку в доставке, равную одному периоду. Таким образом, последовательность $\{x_k\}_{k\ge0}$ является цепью Маркова. Мы учитываем следующие издержки: c_i – цена заказа единицы продукта у i-го поставщика, $i=1,2$, штраф за дефицит и плата за хранение единицы продукта в течение периода равны соответственно r и h. В качестве целевой функции $\mathcal{L}_n$ выбираем ожидаемые дисконтированные издержки за n периодов. Размеры заказов, минимизирующие целевую функцию будут называться оптимальными.

Нетрудно подсчитать, что

$$\mathcal{L}_n(x,\, z_i^{(j)},\, i=1,2,\, j=\overline{1,n})=\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{2}c_iz_i^{(k)}+h\left(x+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{2}z_i^{(j)}+z_1^{(k)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+I_kz_2^{(k)}-\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)^{+}+r\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j-x-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{2}z_i^{(j)}-z_1^{(k)}-I_kz_2^{(k)}\right)^{+}\right],$$

где $z_i^{(j)}$ – это размер заказа в начале j-го периода у i-го поставщика, E обозначает математическое ожидание, $\{I_j\}_{j\ge1}$ – последовательность н.о.р. с.в., принимающих значения 1 и 0 соответственно с вероятностями p и q, и α – коэффициент дисконтирования. Предполагаем здесь, что нет никаких ограничений, т.е. размеры заказов $z_i^{(j)}$, $i=1,2$, $j=\overline{1,n}$, могут принимать любые неотрицательные значения. Кроме того, сумма по пустому множеству равна нулю здесь и далее.

Пусть $f_n(x)$ – минимальные ожидаемые дисконтированные издержки за n периодов, связанные с политикой заказов, т.е.

$$f_n(x)=\min_{z_i^{(j)}\ge0,\, i=1,2,\, j=\overline{1,n}}\mathcal{L}_n(x,z_i^{(j)},\, i=1,2,\;\, j=\overline{1,n}).$$

Ожидаемые издержки за один период равны

$$L(v)=\mathsf{E}[h(v-\xi_1)^{+}+r(\xi_1-v)^{+}],\quad \text{где}\quad a^{+}=\max(a,0),$$

v – размер имеющихся запасов для удовлетворения спроса. Отсюда, согласно принципу оптимальности Беллмана, см., например, [5], мы получаем для $n \geq 1$ следующие рекуррентные соотношения

$$f_n(x) = \min_{z_1 \geq 0,\, z_2 \geq 0} [c_1 z_1 + c_2 z_2 + pL(x + z_1 + z_2) + qL(x + z_1) + \alpha \mathsf{E} f_{n-1}(x + z_1 + z_2 - \xi_1)],$$

где $f_0(x) \equiv 0$ и z_i – размер заказа у i-го поставщика, $i = 1, 2$, на первом шаге n-шагового процесса.

Положим теперь $v = x + z_1$ и $u = v + z_2$, обозначив также

$$G_n(v, u) = (c_1 - c_2)v + qL(v) + c_2 u + pL(u) + \alpha \mathsf{E} f_{n-1}(u - \xi_1).$$

Итак,

$$f_n(x) = -c_1 x + \min_{x \leq v \leq u} G_n(v, u) \quad \text{и} \quad f_0(x) \equiv 0. \tag{1}$$

Параметры $v_n(x)$ и $u_n(x)$, в которых достигается минимум в (1), следующим образом определяют решение компании на первом шаге n-шагового процесса: если начальный уровень запасов равен x, размер заказа у первого поставщика равен $z_1(x) = v_n(x) - x$, а у второго $z_2(x) = u_n(x) - v_n(x)$.

3 Обозначения и предварительные результаты

С помощью математической индукции будет установлено существование оптимального управления, обеспечивающего минимум в (1), и его форма. Для формулировки результатов понадобятся следующие обозначения.

$$\Gamma^\alpha = \{(c_1, c_2) : 0 \leq c_1 \leq r(1-\alpha)^{-1},\ 0 \leq c_2 \leq r(1-\alpha)^{-1}(p + \alpha q)\},$$
$$\Gamma^I = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^\alpha : c_2 \geq (p + \alpha q)c_1\}, \quad \Gamma^{II} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^\alpha : c_2 < c_1 - qr\},$$
$$\Gamma^{III} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^\alpha : (c_1 - qr)^+ \leq c_2 < (p + \alpha q)c_1\},$$
$$\Gamma^{III}_- = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : c_2 < pc_1\}, \quad \Gamma^{III}_\pm = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : c_2 \geq pc_1\}.$$

Кроме того, положим $\Delta_0 = \{0 \leq c_1 \leq r\}$, $\Delta^0 = \{0 \leq c_2 \leq pr\}$, $\Gamma = \{c_1 \geq 0, c_2 \geq 0\}$ и для $k \geq 1$

$$\Delta_k = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : r\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i < c_1 \leq r\sum_{i=0}^{k} \alpha^i\}, \quad A_k = \cup_{i \geq k} \Delta_i,$$
$$\Delta^k = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : r(p + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^i) < c_2 \leq r(p + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i)\}, \quad A^k = \cup_{i \geq k} \Delta^i.$$

Введем частные производные $G_n(v, u)$ по v и u

$$K(v) = c_1 - c_2 + qL'(v), \quad S_n(u) = c_2 + pL'(u) + \alpha \int_0^\infty f'_{n-1}(u - s)\phi(s)\, ds,$$

а также

$$T_n(v) = K(v) + S_n(v), \quad Q(u) = c_2 - \alpha c_1 + pL'(u) + \alpha \int_0^{u - \bar{v}} K(u - s)\phi(s)\, ds,$$

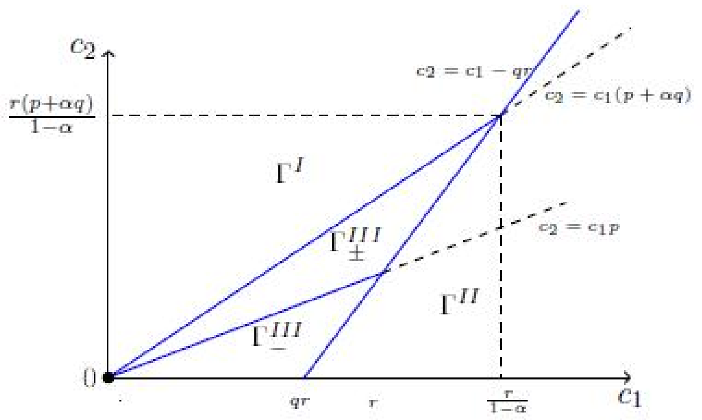

Рис. 1: области, описывающие различные типы заказов

$$R(u) = c_2(1-\alpha) + pL'(u) + \alpha q \int_0^\infty L'(u-s)\phi(s)\,ds, \quad V(v) = c_1(1-\alpha) + L'(v).$$

Будет установлено, что $f_n'(x)$, $n \geq 1$, и все выше определенные функции не убывают. Критические уровни $\bar{v}$, u_n, v_n, $\bar{u}$, $\hat{u}$ и $\hat{v}$, если существуют, являются решениями соответствующих уравнений

$$K(\bar{v}) = 0, \quad S_n(u_n) = 0, \quad T_n(v_n) = 0, \quad Q(\bar{u}) = 0, \quad R(\hat{u}) = 0, \quad V(\hat{v}) = 0.$$

В частности, $F(\bar{v}) = (c_2 + qr - c_1)/q(r+h)$, если $c_2 \geq c_1 - qr$, в противном случае полагаем $\bar{v} = -\infty$. Это значит, что $K(v) > 0$ для всех v при $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$. Аналогичные соглашения верны и для других критических уровней. Так, $F(v_1) = (r - c_1)/(r+h)$ в Δ_0 и $v_1 = -\infty$ в A_1, в то время как $F(u_1) = (pr - c_2)/p(r+h)$ в Δ^0 и $u_1 = -\infty$ в A^1.

Положим также $\Gamma_n^- = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) < 0\}$, $\Gamma_n^+ = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) > 0\}$ и $\Gamma_n^0 = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) = 0\}$.

Поскольку $K(v) < 0$ для $v < \bar{v}$ и $K(v) > 0$ для $v > \bar{v}$, ясно, что $T_n(v) < S_n(v)$ для $v < \bar{v}$ и $T_n(v) > S_n(v)$ для $v > \bar{v}$. Таким образом, установлен следующий результат.

Лемма 1. *Если $(c_1, c_2) \in \Gamma_n^- \cup \Gamma^{II}$, то $\bar{v} < v_n < u_n$, в то время как $\bar{v} > v_n > u_n$ для $(c_1, c_2) \in \Gamma_n^+ \cup \Gamma^I$.*

Лемма 2. *Если $\bar{v} < v_n < u_n$, то оптимально положить $v_n(x) = \max(\bar{v}, x)$ и $u_n(x) = \max(u_n, x)$. В случае $\bar{v} > v_n > u_n$ оптимальное решение $u_n(x) = v_n(x) = \max(v_n, x)$.*

Доказательство очевидно в предположении, что функции $S_n(u)$ и $T_n(v)$ неубывающие. Этот факт будет доказан по индукции в следующем разделе.

А теперь мы установим базу индукции.

Лемма 3. *Для $n = 1$ существуют четыре типа оптимального поведения, а именно,*
1. *$v_1(x) = u_1(x) = x$ в области $D^0 = A_1 \cap A^1$,*
2. *$v_1(x) = u_1(x) = \max(v_1, x)$ в области $D^1 = \Delta_0 \cap \{c_2 \geq pc_1\}$,*
3. *$v_1(x) = x$, $u_1(x) = \max(u_1, x)$ в области $D^2 = \Delta^0 \cap \{c_2 < c_1 - qr\}$,*
4. *$v_1(x) = max(\bar{v}, x)$, $u_1(x) = \max(u_1, x)$ в области $D^3 = \{(c_1, c_2) : (c_1 - qr)^+ \leq c_2 < pc_1\}$.*

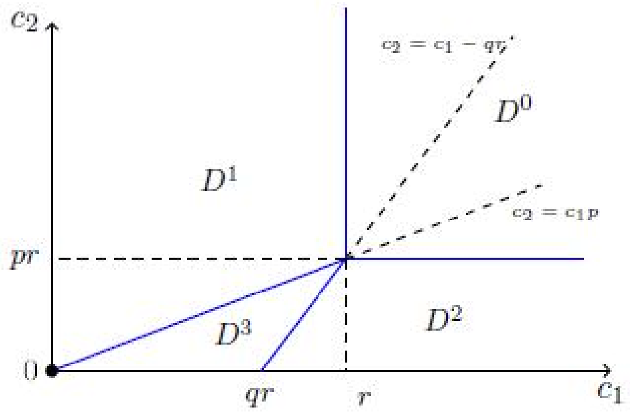

Рис. 2: области, описывающие различные типы заказов при $n = 1$

Доказательство. Поскольку $v_1 = -\infty$ в A_1 и $u_1 = -\infty$ в A^1, очевидно, что в D^0 оптимально ничего не заказывать. В Δ_0 имеет место неравенство $0 \le v_1 \le \bar{t}$, где $F(\bar{t}) = r/(r+h)$. Более того, $u_1 = v_1 = \bar{v}$ при $c_2 = pc_1$. Отсюда немедленно вытекает, что $S_1(\bar{v}) > 0$ при $(c_1, c_2) \in D^1$ и необходимо отправлять заказы только первому поставщику, положив $v_1(x) = \max(v_1, x)$, а $u_1(x) = v_1(x)$. В D^2 верно $\bar{v} = -\infty$ и $0 \le u_1 \le \bar{t}$, поэтому в силу леммы 2 оптимально заказывать только у второго поставщика. Поскольку $S_1(\bar{v}) < 0$ при $(c_1, c_2) \in D^3$, то в этом случае надо посылать заказы обоим поставщикам, как указано в пункте 4 данной леммы. Области D^k, $k = 0, 1, 2, 3$, изображены на рисунке 2. □

Нетрудно показать, что установленный вид оптимального поведения приводит к следующему виду $f_1'(x)$, который будет использоваться в последующем.

Следствие 1. *При $(c_1, c_2) \in D^0$ верно равенство $f_1'(x) = L'(x)$, в то время как*

$$f_1'(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x \le v_1, \\ T_1(x), & x > v_1, \end{cases} \qquad f_1'(x) = -c_1 + K(x) + \begin{cases} 0, & x \le u_1, \\ S_1(x), & x > u_1, \end{cases}$$

соответственно для D^1 и D^2. Наконец, в D^3 получаем

$$f_1'(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x \le \bar{v}, \\ K(x), & \bar{v} < x \le u_1, \\ K(x) + S_1(x), & x > u_1. \end{cases}$$

4 Оптимальное управление

Теперь можно сформулировать первый результат для $n > 1$.

Теорема 1. *При $(c_1, c_2) \in \Gamma^I$ полагаем $u_n(x) = v_n(x) = \max(v_n, x)$. Последовательность v_n, $n \ge 1$, неубывающая и существует $\lim_{n\to\infty} v_n = \hat{v}$, удовлетворяющий соотношению $F(\hat{v}) = (r - c_1(1-\alpha))/(r+h)$. Если дополнительно предположить, что $(c_1, c_2) \in \Delta_k$, $k \ge 0$, то $v_n = -\infty$ для $n \le k$, а v_{k+1} задается соотношением*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha^i F^{(i+1)*}(v_{k+1}) = \frac{r\sum_{i=0}^{k} \alpha^i - c_1}{r+h}, \tag{2}$$

где F^{i*} – i-кратная свертка F с самой собой.

Доказательство. Действуем методом математической индукции по k и n, начиная с Δ_0 и $n = 1$. Используя результаты параграфа 3, приходим к выводу, что $u_1 < v_1 < \hat{v} \leq \bar{v}$ в $\Gamma^I \cap \Delta_0$. Таким образом, $u_1(x) = v_1(x) = \max(v_1, x)$ и

$$f_1'(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x \leq v_1, \\ T_1(x), & x > v_1. \end{cases} \tag{3}$$

Предположив, что $f_m'(x)$, $m \leq n-1$, имеет вид (3), где индекс 1 заменен на m, получаем

$$T_n(v) = V(v) + \alpha \int_0^{v-v_{n-1}} T_{n-1}(v-s)\,ds = T_{n-1}(v) + \alpha H_{n-1}(v), \tag{4}$$

где $H_m(v) = (f_m' - f_{m-1}') * F(v)$ и

$$f_m'(x) - f_{m-1}'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq v_{m-1}, \\ -T_{m-1}(x), & v_{m-1} < x \leq v_m, \\ T_m(x) - T_{m-1}(x), & x > v_m. \end{cases}$$

Следовательно, $T_n(v_{n-1}) = \alpha H(v_{n-1}) < 0$, что дает, в силу (4) и леммы 1, соотношения $v_{n-1} < v_n$ и $u_n < v_n < \hat{v}$. Кроме того,

$$|V(v_n)| = \alpha \int_0^{v_n - v_{n-1}} T_{n-1}(v_n - s)\phi(s)\,ds \leq \alpha T_{n-1}(\hat{v}) F(v_n - v_{n-1}).$$

Ясно, что $T_{n-1}(\hat{v}) \leq \alpha^{n-1}(c_1 + h)$, откуда следует $|V(v_n)| \to 0$, при $n \to \infty$, даже для $\alpha = 1$. Таким образом, справедливо соотношение $\hat{v} = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Теперь нетрудно проверить, что $v_k = -\infty$ в A_k, $k \geq 1$. Тогда вместо (3) мы имеем $f_1'(x) = L'(x)$ и в равенстве (4) интеграл $\int_0^{v-v_{n-1}}$ понимается как $\int_0^{\infty}$, если $v_{n-1} = -\infty$. Следовательно, v_{k+1} задается в области Δ_k с помощью (2). Существование $\lim_{n\to\infty} v_n = \hat{v}$ в Δ_k устанавливается аналогично тому, как это было сделано в Δ_0. □

Теорема 2. *При $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$ полагаем $v_n(x) = x$ и $u_n(x) = \max(u_n, x)$. Последовательность u_n, $n \geq 1$, неубывающая и существует $\lim_{n\to\infty} u_n = \hat{u}$, задаваемый соотношением $pF(\hat{u}) + \alpha q F^{2*}(\hat{u}) = [r(p + \alpha q) - c_2(1-\alpha)]/(r+h)$. Если дополнительно предположить, что $(c_1, c_2) \in \Delta^k$, $k \geq 0$, то $u_n = -\infty$ для $n \leq k$, а u_{k+1} определяется из уравнения*

$$pF(u_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i F^{(i+1)*}(u_{k+1}) = \frac{r(p + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i) - c_2}{r+h}. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma^{II} \cap \Delta^0 = D^2$, из леммы 3 вытекает, что

$$f_1'(x) = -c_1 + K(x) + \begin{cases} 0, & x \leq u_1, \\ S_1(x), & x > u_1, \end{cases} \tag{6}$$

возрастающая функция. То же самое верно для $S_2(u)$ и $T_2(v)$. Более того, $S_2(u) = R(u) + \alpha \int_0^{u-u_1} S_1(u-s)\phi(s)\,ds \geq R(u)$, так как $S_1(u) \geq 0$ для $u \geq u_1$. Это означает, что $u_2 < \hat{u}$, корня уравнения $R(\hat{u}) = 0$. С другой стороны, $u_1 < u_2$ в силу равенства $S_2(u_1) = -c_2/p$.

Предположив теперь, что $u_{m-1} < u_m$ при $m \leq n-1$, а $f_m'(x)$ имеет вид (6), где индексы 1 заменены на m, мы имеем

$$S_n(u) = R(u) + \alpha \int_0^{u-u_{n-1}} S_{n-1}(u-s)\phi(s)\,ds = S_{n-1}(u) + \alpha H_{n-1}(u),$$

где $H_m(u) = (f'_m - f'_{m-1}) * F(u)$ и

$$f'_m(x) - f'_{m-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le u_{m-1}, \\ -S_{m-1}(x), & u_{m-1} < x \le u_m, \\ S_m(x) - S_{m-1}(x), & x > u_m. \end{cases}$$

Из первого представления ясно, что $u_n < \hat{u}$. Второе представление дает $u_n > u_{n-1}$, так как $H_{n-1}(u) < 0$ для $u \le u_{n-1}$.

Сходимость u_n к $\hat{u}$, при $n \to \infty$, может быть доказана аналогично тому, как было установлено в теореме 1, что $v_n \to \hat{v}$.

Ясно, что $\Gamma^{II} \cap \Delta^1 \subset D^0$, поэтому $f'_1(x) = L'(x)$. Следовательно,

$$S_2(u) = c_2 - r(p+\alpha) + (r+h)[pF(u) + \alpha F^{2*}(u)].$$

Последнее выражение показывает, что в $\Gamma^{II} \cap \Delta^1$ существует u_2, удовлетворяющее (5) с $k = 1$. Дальнейшее доказательство проходит по той же схеме, что и в $\Gamma^{II} \cap \Delta^0$ с помощью индукции по k. $\square$

Теперь перейдем к наиболее сложной области Γ^{III}.

Теорема 3. *Если $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}_{\pm}$, то существует такое $n_0(c_1, c_2)$, что $v_n(x) = \max(\bar{v}, x)$ и $u_n(x) = \max(u_n, x)$ для $n \ge n_0$, в то время как при $n < n_0$ берется $u_n(x) = v_n(x) =$* $\max(v_n, x)$. *Если $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}_{-}$, то $n_0 = 1$. Более того, последовательность u_n, $n \ge n_0$, неубывающая и* $\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u}$.

Доказательство. Как и ранее, мы используем индукцию. В лемме 3 было доказано, что при $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}_{-}$ имеет место соотношение $S_1(\bar{v}) < 0$, т.е. $\Gamma^{III}_{-} = \Gamma^{-}_1$ и

$$f'_1(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x \le \bar{v}, \\ K(x), & \bar{v} < x \le u_1, \\ K(x) + S_1(x), & x > u_1. \end{cases}$$

Таким образом, $S_2(u) = Q(u) + \alpha \int_0^{u-u_1} S_1(u-s)\phi(s)\, ds \ge Q(u)$ и $u_2 < \bar{u}$. Кроме того, $S_2(\bar{v}) = -\alpha c_1 + (c_2 - pc_1)/q < 0$. Это означает, что $\Gamma^{-}_1 \subset \Gamma^{-}_2$ и $\Gamma^{+}_2 \subset \Gamma^{+}_1 = \Gamma^{III}_{\pm}$. Граница $\Gamma^0_2 = \{(c_1, c_2) : S_2(\bar{v}) = 0\}$ задает неявно кривую $c_2 = g_2(c_1)$. Точки $c_1 = c_2 = 0$ и $c_1 = r(1+\alpha)$, $c_2 = r(p+\alpha)$ принадлежат Γ^0_2. Далее, в Δ_0

$$g'_2(c_1) = \frac{(p+\alpha q)\phi(\bar{v}) + \alpha \int_0^{\bar{v}-v_1} \phi(\bar{v}-s)\phi(s)\, ds}{\phi(\bar{v}) + \alpha \int_0^{\bar{v}-v_1} \phi(\bar{v}-s)\phi(s)\, ds},$$

поэтому $g'_2(c_1) > 0$ и $g'_2(c_1) \to (p+\alpha q)$ при $c_1 \to 0$.

Ясно, что в Γ^{-}_2

$$f'_2(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x \le \bar{v}, \\ K(x), & \bar{v} < x \le u_2, \\ K(x) + S_2(x), & x > u_2. \end{cases}$$

Значит, в Γ^{-}_1 разность

$$f'_2(x) - f'_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le u_1, \\ -S_1(x), & u_1 < x \le u_2, \\ S_2(x) - S_1(x), & x > u_2, \end{cases}$$

отрицательна при $x \le u_2$. В $\Gamma^{III}_{\pm} \cap \Delta_0$ оказывается $u_1 < v_1 < \bar{v} < v_2 < u_2$ и разность

$$f_2'(x) - f_1'(x) = \begin{cases} 0, & x \le v_1, \\ -S_1(x), & v_1 < x \le u_2, \\ S_2(x) - S_1(x), & x > u_2, \end{cases}$$

отрицательна при $x \le u_2$. Наконец, в $\Gamma^{III}_{\pm} \cap \Delta_1$

$$f_2'(x) - f_1'(x) = \begin{cases} -T_1(x), & x \le \bar{v}, \\ -S_1(x), & \bar{v} < x \le u_2, \\ S_2(x) - S_1(x), & x > u_2. \end{cases}$$

Эта разность также отрицательна при $x \le u_2$, поскольку в этой области $u_1 = v_1 = -\infty$. Далее, $S_3(u) = S_2(u) + \alpha H_2(u)$ и $S_3(u_2) = \alpha H_2(u_2) < 0$, поэтому $u_2 < u_3$. Ясно, что $S_3(u) \ge Q(u)$ и $u_3 \le \bar{u}$. Сходимость $u_n \to \bar{u}$, при $n \to \infty$, доказывается тем же методом, что и в предыдущих теоремах.

Аналогично мы устанавливаем, что $\Gamma^-_{n-1} \subset \Gamma^-_n$ и $\Gamma^+_n \subset \Gamma^+_{n-1}$. Далее, поскольку последовательности $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ возрастают, существует $n_0(c_1, c_2)$ такое, что $u_{n_0-1} < v_{n_0-1} < \bar{v} < v_{n_0} < u_{n_0}$. Таким образом, при $k \le n_0 - 1$ необходимо отправлять заказы только первому поставщику, в то время как при $k \ge n_0$ добавляются заказы второму поставщику. □

Результаты теоремы 3 можно усилить следующим образом.

Следствие 2. *Пусть* $C_k = \{(c_1, c_2) : c_2 < c_1(p + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^i)(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i)^{-1}\} \cap \Gamma^{III}$, *тогда* $C_1 = \Gamma^-_1$ *и, для* $k \ge 2$,

$$C_k \subset \Gamma^-_k \subset \cup_{i=0}^{k-1} \Delta^i. \tag{7}$$

Другими словами, n_0*, определенное в теореме 3, удовлетворяет соотношениям* $n_0 \le k$ *в* C_k *и* $n_0 > k$ *в* $A^k \cap \Gamma^{III}$.

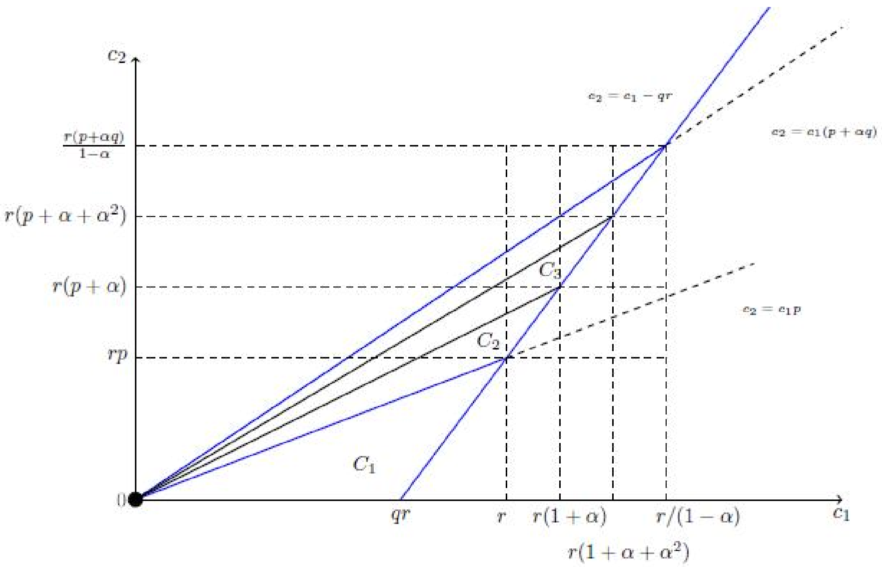

Рис. 3: множества C_k и Δ_k

Доказательство. По определению имеем $C_1 = \Gamma^-_1$. Кроме того, верно представление $C_2 = (C_2 \cap \Delta_0) \cup (C_2 \cap \Delta_1)$. Первое множество $C_2 \cap \Delta_0$ состоит из двух непересекающихся подмножеств $\Gamma^-_1 \cup \Gamma^0_1$ и $\Gamma^+_1 \cap \Delta_0 \cap C_2$. Из доказательства теоремы 3 следует, что $\Gamma^-_1 \cup \Gamma^0_1 \subset \Gamma^-_2$.

Пусть теперь $(c_1, c_2) \in \Gamma_1^+ \cap \Delta_0 \cap C_2$, тогда $S_2(\bar{v}) = S_1(\bar{v}) - \alpha c_1 + \alpha \int_0^{\bar{v}-v_1} T_1(\bar{v}-s)\phi(s)\,ds$. Поскольку $T_1(\bar{v}) = S_1(\bar{v}) = (c_2 - pc_1)/q$, легко получить, что $S_2(\bar{v}) \leq (1+\alpha)S_1(\bar{v}) - \alpha c_1 = [(1+\alpha)c_2 - (p+\alpha)c_1]/q < 0$. Далее, $S_2(\bar{v}) = S_1(\bar{v}) - \alpha c_1 + \alpha \int_0^{\infty} T_1(\bar{v}-s)\phi(s)\,ds$ при $(c_1, c_2) \in C_2 \cap \Delta_1$. Таким образом, получаем то же самое неравенство $S_2(\bar{v}) < 0$. Это означает, что $C_2 \subset \Gamma_2^-$. Второе включение в (7) очевидно, поскольку $S_2(u) > 0$ для всех $u \in A^2$. Как обычно, чтобы установить соотношения (7) для $k > 2$, пользуемся индукцией. $\square$

Замечание. Итак, мы доказали, что при $(c_1, c_2) \notin \Gamma^\alpha$ не надо ничего заказывать при любом горизонте планирования. При $(c_1, c_2) \in \Gamma^I$ отправляются заказы первому поставщику, при $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$ второму, при этом размеры заказов зависят от начального уровня запасов x, горизонта планирования n и штрафа за дефицит r. В Γ^{III} имеется две возможности. Либо отправляется заказ только надежному первому поставщику, либо добавляются заказы ненадежному второму поставщику (в Γ_k^- для $n \geq k$, $k \geq 1$). Следствие 2 показывает, что множества Γ_n^- и Γ_n^+ непусты, более того, $n_0 = k$ при $(c_1, c_2) \in A^{k-1} \cap C_k$. Другими словами, при этих множествах параметров мы можем точно установить первый шаг рекуррентной процедуры, требующий привлечения второго поставщика.

В качестве иллюстрации приведем следующий

Пример. Предположим, что размеры требований имеют показательное распределение с параметром 1, т.е. $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x \geq 0$ и $F(x) = 0$ при $x < 0$.

Тогда при $(c_1, c_2) \in \Gamma_1^+ \cap \Delta_0$ мы получаем

$$S_2(\bar{v}) = q^{-1}\{c_2(1+\alpha) - c_1(p+\alpha) - \alpha(qh + c_1 - c_2)[\ln(qh + qc_1) - \ln(qh + c_1 - c_2)]\},$$

тогда как при $(c_1, c_2) \in \Gamma_1^+ \cap \Delta_1$

$$S_2(\bar{v}) = q^{-1}\{c_2(1+\alpha) - c_1(p+\alpha) - \alpha(qh + c_1 - c_2)[\ln(qh + qr) - \ln(qh + c_1 - c_2)]\}.$$

Остальные параметры модели полагаем равными $r = 6$, $h = 3$, $p = 1/3$ и $\alpha = 1/2$. Значит, неявные уравнения $S_2(\bar{v}) = 0$, задающие границу Γ_2^0 между Γ_2^- и Γ_2^+, имеют вид

$$3c_2 - \frac{5}{3}c_1 - (2 + c_1 - c_2)[\ln(2 + \frac{2}{3}c_1) - \ln(2 + c_1 - c_2)] = 0$$

при $0 \leq c_1 \leq 6$ и

$$3c_2 - \frac{5}{3}c_1 - (2 + c_1 - c_2)[\ln 6 - \ln(2 + c_1 - c_2)] = 0$$

при $6 \leq c_1 \leq 9$, оба выражения совпадают при $c_1 = 6$.

Результаты дополнены рис. 3, представляющим множество Γ^α. Вертикальные пунктирные линии являются границами между множествами Δ_{k-1} и Δ_k, а горизонтальные разделяют Δ^{k-1} и Δ^k, $k \geq 1$. Множество Γ^I – это верхний треугольник (над прямой $c_2 = (p + \alpha q)c_1$, т.е. $c_2 = 2c_1/3$ в нашем примере). Множество Γ^{II} нижний треугольник (под прямой $c_2 = c_1 - qr$, в нашем примере $c_2 = c_1 - 4$) и Γ^{III} лежит между этими двумя множествами. В свою очередь, Γ^{III} – это предел возрастающей последовательности треугольников C_n, $n \geq 1$.

5 Бюджетные ограничения

Теперь мы будем изучать влияние бюджетных ограничений. Предполагается, что в каждый из периодов возможно истратить на заказы не более, чем b. А именно, область оптимизации $D(x, b)$ задается соотношением $c_1 z_1 + c_2 z_2 \leq b$. Переходя к новым переменным

v и u, перепишем $D(x,b) = \{(v,u) : x \le v \le u \le a_2 + \beta x - (\beta-1)v\}$, где $\beta = c_1/c_2$ и $a_i = b/c_i$, $i = 1,2$. Ясно, что область $D(x,b)$ имеет треугольную форму. Угол между прямыми $v = x$ и $u = v$ равен $\pi/4$. Если $\beta < 1$, то $a_2 < a_1$ и угол между $v = x$ и третьей стороной треугольника $u = a_2 + \beta x - (\beta-1)v$ больше $\pi/2$, он равен $\pi/2$, если $\beta = 1$, и в случае $\beta > 1$ он меньше $\pi/2$ (см. рисунок 4).

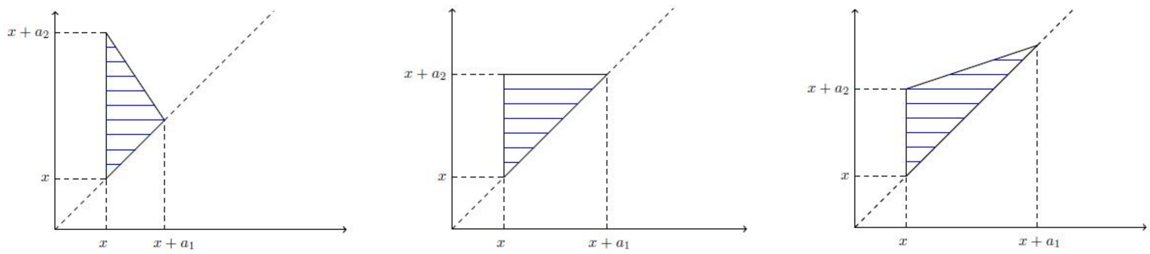

Рис. 4: возможные области $D(x,b)$

Для дальнейшего анализа нам понадобятся функции $B_n(v) = (d/dv)G_n(v, \beta x + a_2 - (\beta-1)v) = K(v) - (\beta-1)S_n(\beta x + a_2 - (\beta-1)v)$, $n \ge 1$. В частности, $B_1(v) = qL'(v) - (\beta-1)pL'(\beta x + a_2 - (\beta-1)v)$ неубывающая функция, поскольку $B_1'(v) = (r+h)[q\phi(v) + p(\beta-1)^2\phi(\beta x + a_2 - (\beta-1)v)] \ge 0$. Кроме того, $B_1(x) = qL'(x) - (\beta-1)pL'(x+a_2)$ и $B_1(x+a_1) = (1-p\beta)L'(x+a_1)$. Следовательно, при $1 - p\beta > 0$ и $x + a_1 < \bar{t}$ функция $B_1(v)$ отрицательна на верхней границе $D(x,b)$, и нетрудно установить следующий результат.

Лемма 4. *При бюджетном ограничении для $n = 1$ оптимально*
1. *Не заказывать ничего в области D^0.*
2. *В D^1 берем*

$$u_1(x) = v_1(x) = \begin{cases} x + a_1, & x \le v_1 - a_1, \\ v_1, & v_1 - a_1 < x \le v_1, \\ x, & x > v_1. \end{cases}$$

3. *В D^2 полагаем $v_1(x) = x$ и*

$$u_1(x) = \begin{cases} x + a_2, & x \le u_1 - a_2, \\ u_1, & u_1 - a_2 < x \le u_1, \\ x, & x > u_1. \end{cases}$$

Здесь v_1 и u_1 такие же, как в предыдущих параграфах.

Для $n > 1$ мы устанавливаем следующий результат.

Теорема 4. *Если $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II} \cap \Delta^k$, $k \ge 0$, то при $n \le k$ оптимально положить $u_n(x) = v_n(x) = x$. Существует возрастающая последовательность $\{u_n\}_{n \ge k+1}$ такая, что $v_n(x) = x$ и*

$$u_n(x) = \begin{cases} x + a_2, & x \le u_n - a_2, \\ u_n, & u_n < x \le u_n, \\ x, & x > u_n, \end{cases}$$

при $n \ge k + 1$.

Доказательство. Как всегда в динамическом программировании, мы действуем по индукции. Начинаем с рассмотрения области $\Gamma^{II} \cap \Delta^k$ при $k = 0$. Согласно лемме 4, получаем

$$f_1'(x) = -c_1 + K(x) + \begin{cases} S_1(x+a_2), & x \le u_1 - a_2, \\ 0, & u_1 - a_2 < x \le u_1, \\ S_1(x), & x > u_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$S_2(u) = c_2 + pL'(u) - \alpha c_1 + \alpha \int_0^\infty K(u-s)\phi(s)\,ds + \alpha \int_0^{u-u_1} S_1(u-s)\phi(s)\,ds +$$

$$+\alpha \int_{u-u_1+a_2}^\infty S_1(u-s+a_2)\phi(s)\,ds$$

и $S_2(u_1) = -\alpha c_2/p < 0$, что влечет соотношение $u_2 > u_1$. Очевидно,

$$f_2'(x) = -c_1 + K(x) + \begin{cases} S_2(x+a_2), & x \le u_2 - a_2, \\ 0, & u_2 - a_2 < x \le u_2, \\ S_2(x), & x > u_2. \end{cases}$$

Теперь надо рассмотреть два случая. Если $a_2 < u_2 - u_1$, то

$$f_2'(x) - f_1'(x) = \begin{cases} S_2(x+a_2) - S_1(x+a_2), & x \le u_1 - a_2, \\ S_2(x+a_2), & u_1 - a_2 < x \le u_1, \\ S_2(x+a_2) - S_1(x), & u_1 < x \le u_2 - a_2, \\ -S_1(x), & u_2 - a_2 < x \le u_2, \\ S_2(x) - S_1(x), & x > u_2. \end{cases}$$

Если же $a_2 > u_2 - u_1$, то

$$f_2'(x) - f_1'(x) = \begin{cases} S_2(x+a_2) - S_1(x+a_2), & x \le u_1 - a_2, \\ S_2(x+a_2), & u_1 - a_2 < x \le u_2 - a_2, \\ 0, & u_2 - a_2 < x \le u_1, \\ -S_1(x), & u_1 < x \le u_2, \\ S_2(x) - S_1(x), & x > u_2. \end{cases}$$

Эти соотношения показывают, что в обоих случаях $f_2'(x) - f_1'(x) < 0$ при $x \le u_2$. Используя представление $S_3(u) = S_2(u) + \alpha H_2(u)$, мы устанавливаем, что $u_2 < u_3$. То же самое верно при любом n. В областях $\Gamma^{II} \cap \Delta^k$, $k > 0$, действуем аналогично. □

Список литературы

[1] *Afanaseva L., Bulinskaya E.*, Multi-supplier systems with seasonal demand. In: B.Vallespir and T.Alix (eds.) Advances in Production Management Systems: New Approaches. Proceedings of the IFIP WG 5.7, Springer, 2010, p. 267–274.

[2] *Arrow K., Harris T., Marschak J.*, Optimal inventory policy // Econometrica, 1951, v. 11, p. 250–252.

[3] *Arrow K., Karlin H., Scarf H.* (eds.), Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford, California: Stanford University Press, 1958.

[4] *Bellman R., Glicksberg I. and Gross O.*, On the optimal inventory equation // Management Science, 1955, v. 2, p. 83–104.

[5] *Bellman R.*, Dynamic Programming. Princeton, New York: Princeton University Press, 1957.

[6] *Bulinskaya E.*, Optimal and asymptotically optimal control for some inventory models. In: A.N.Shiryaev et al. (eds.) Prokhorov and Contemporary Probability Theory, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 33, chapter 8, Berlin: Springer-Verlag, 2012.

[7] *Bulinskaya E. and Shakhgildyan K.*, Inventory Systems with Unreliable Suppliers // Communications in Statistics: Theory and Methods, 2013 (in print).

[8] *Caliskan-Demirag O., Chen Y. and Yang Yi.*, Ordering policies for periodic-review inventory systems with quantity-dependent fixed costs// Operations Research, 2012, v. 60, p. 785–796.

[9] *Fox E.J., Metters R. and Semple J.*, Optimal inventory policy with two suppliers // Operations Research, 2006, v. 54, p. 389–393.

[10] *Huggins E.L., Olsen T-L.*, Inventory control with generalized expediting // Operations Research, 2010, v. 58, p. 1414–1426.

[11] *Johansen S.G., Thorstenson A.*, Optimal base-stock policy for the inventory system with periodic review, backorders and sequential lead times //Int. J. Inventory Research, 2008, v. 1, p. 44-52.

[12] *Li Q., Wu X., Cheung K.L.*, Optimal policies for inventory systems with separate delivery request and order-quantity decision // Operations Research, 2009, v. 57, p. 626–636.

[13] *Minner S.*, Multiple-supplier inventory models in supply chain management: A review // Int. J. Production Economics, 2003, v. 81–82, p. 265–279.

[14] *Papachristos S., Katsaros A.*, A periodic-review inventory model in a fluctuating environment // IIE Transactions, 2008, v. 40, p. 356–366.

[15] *Wang Guicong, Jiang Zhaoliang, Li Zhaoqian, Liu Wenping*, Supplier selection and order splitting in multiple-sourcing inventory systems // Frontiers of Mechanical Engineering in China, 2008, v. 3, p. 23–27.

Некоторые соображения о методике изложения двух основополагающих вопросов теории вероятностей в физико-математических школах

Виноградов О.П.[1]

Предлагается элементарный подход к изучению основополагающих вопросов теории вероятностей (закон больших чисел, независимость событий).

1. Введение. Настоящая работа предназначена для интересующихся преподаванием математики в школе, и в ней предлагается новый, отличный от общепринятого, подход к изучению двух основополагающих вопросов теории вероятностей. А именно, речь пойдет о законе больших чисел и о независимости событий.

2. Закон больших чисел. Возникновение теории вероятностей как науки относится к семнадцатому веку и связано с такими именами, как Галилей, Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Якоб Бернулли. Переломным моментом в развитии теории вероятностей стал 1713 год, когда была опубликована теорема, доказанная Якобом Бернулли. В 1835 году эта теорема и ее обобщения были названы Пуассоном законом больших чисел. Приведем слова академика А.Н. Колмогорова [1]: "Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие закономерности. Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если не находило бы своего осуществления в виде частоты появления какого–либо результата при многократном повторении однородных условий. Поэтому работы Паскаля и Ферма можно рассматривать лишь как предысторию теории вероятностей, а настоящая ее история начинается с закона больших чисел Я. Бернулли ... "

Заметим, что в обычном курсе закон больших чисел изучается только в самом его конце. Поэтому из-за отсутствия времени привести строгое доказательство закона больших чисел в форме Бернулли на уроках в школе не представляется возможным. Часто ограничиваются лишь его нестрогой формулировкой типа: при большом числе бросаний правильной монеты частота выброшенных гербов приблизительно равна 0,5.

В настоящей работе предлагается подход к ознакомлению учащихся с доказательством простейшего варианта (для правильной монеты) закона больших чисел, реализация которого требует совсем немного времени (подробнее см.[2] и [3]). Это доказательство не требует знакомства с такими понятиями, как независимость, математическое ожидание и

[1]Виноградов Олег Павлович, ovinogradov@mail.ru, профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

дисперсия, но требует знакомства с понятием числа сочетаний и с формулой классической вероятности. Оно основано на идее Чебышева, которую он использовал при доказательстве неравенства, носящего его имя.

Приведем доказательство следующих лемм, доступное для школьников, знакомых с понятием числа сочетаний.

Лемма 1. *Для любого натурального n имеет место равенство*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Доказательство. Если мы бросим монету n раз, то все множество 2^n исходов можно разбить на $n+1$ подмножеств таким образом, что в подмножество с номером k входят те и только те исходы, в которых герб выпал ровно k раз ($0 \leqslant k \leqslant n$). Так как общее число исходов 2^n равно сумме числа исходов в каждом из этих $(n+1)$ подмножеств, то имеет место равенство $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для любого натурального n имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}.$$

Доказательство. Лемма 2 следует из леммы 1. Так как $n! = n\,(n-1)!$, то

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i = n2^{n-1}.$$

□

Лемма 3. *Для любого n имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = n\,(n+1)\,2^{n-2}.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы следует из лемм 1 и 2. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1}.$$

Делая в последней сумме замену $k-1=i$, получим

$$n\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)C_{n-1}^i = n\sum_{i=1}^{n-1} iC_{n-1}^i + n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i =$$

$$= n\,(n-1)\,2^{n-2} + n2^{n-1} = n\,(n+1)\,2^{n-2}.$$

□

Докажем теперь лемму 4, которая является частным случаем неравенства Чебышева.

Лемма 4. *Пусть правильная монета бросается n раз и пусть μ_n – число выпадений герба. Тогда для всех $n \geqslant 1$ и всех $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0,5\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0,5\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(|\mu_n - 0,5n| \geqslant \varepsilon n\right) = \frac{\sum\limits_{k:\{|k-0,5n|\geqslant \varepsilon n\}} C_n^k}{2^n} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k:\{|(k-0,5n)^2|\geqslant \varepsilon^2 n^2\}} C_n^k}{2^n} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2 2^n} \sum_{k:\left\{(k-0,5n)^2 \geqslant \varepsilon^2 n^2\right\}} (k-0,5n)^2 C_n^k,$$

т.к. неравенство $(k-0,5n)^2 \geqslant \varepsilon^2 n^2$ эквивалентно неравенству $\dfrac{(k-0,5n)^2}{\varepsilon^2 n^2} \geqslant 1.$

Мы увеличим правую часть этого неравенства, если распространим суммирование по всем возможным k $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2 2^n} \sum_{k:\left\{(k-0,5n)^2 \geqslant \varepsilon^2 n^2\right\}} (k-0,5n)^2 C_n^k \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2 2^n} \sum_{k=0}^{n} (k-0,5n)^2 C_n^k =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k + \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k}{\varepsilon^2 2^n}.$$

Используя леммы 1, 2 и 3, получаем, что правая часть этого неравенства равна $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$. □

Из теоремы 1 следует закон больших чисел в форме Бернулли.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$* $\quad \mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0,5\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$ *при $n \to \infty$.*

Доказательство. Теорема 1 следует из леммы 4, так как правая часть неравенства в лемме 4 стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Как пишет академик Ю.В. Прохоров [4], смысл закона больших чисел состоит в том, что он является "общим принципом, в силу которого совокупное действие большого числа случайных факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая".

Следует отметить, что предлагаемое доказательство может быть без особого труда обобщено на случай, когда вероятность успешного осуществления опыта является рациональным числом [2].

3. Независимость событий. Другим важнейшим понятием теории вероятностей является понятие независимости. Параграф 5 главы 1 основополагающего труда [5] А.Н. Колмогорова посвящен понятию независимости. Приведем две цитаты из этого параграфа:

"Понятие независимости двух или нескольких опытов занимает в известном смысле центральное место в теории вероятностей ...

... одной из важнейших задач философии естественных наук ... является выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых можно какие–либо данные действительные явления рассматривать как независимые ... "

Приведем также выдержки из статьи [6] академика Ю.В. Прохорова, посвященной понятию независимости:

"Независимость — одно из важнейших понятий теории вероятностей. Предположение о независимости рассматриваемых событий, испытаний и случайных величин было обычно предпосылкой в задачах, которые рассматривались в теории вероятностей со времени ее возникновения.

Независимость событий указывает ... либо на отсутствие связи между наступлением одного из ... событий и наступлением другого, либо на несущественный характер этой связи. Так, событие, заключающееся в том, что наудачу выбранное лицо имеет фамилию, начинающуюся, например, с буквы "А", и событие, заключающееся в том, что этому лицу достанется выигрыш в очередном тираже лотереи, независимы".

В примере Ю.В. Прохорова независимость интуитивно понятна. Приведем другие примеры, для рассмотрения которых необходимо формальное определение независимости двух событий.

Определение 1. События A и B называются независимыми, если выполнено равенство

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}(B) \qquad (1).$$

Здесь событие AB заключается в том, что произойдет как событие A, так и событие B.

Определение 2. События A и B называются зависимыми, если не выполнено равенство (1).

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Из колоды в 36 карт вытаскивается наугад одна карта. Пусть событие A заключается в том, что мы вытащим даму, а событие B заключается в том, что мы вытащим карту пиковой масти. Являются ли эти события независимыми?

Легко проверить, что равенство (1) имеет место. Действительно, событие AB заключается в том, что мы вытащим даму пик. По формуле классической вероятности $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{36}$, $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. Следовательно, события A и B независимы.

Задача 2. Представим себе, что в колоду добавлена еще одна карта, например, двойка червей, а остальные условия задачи остаются прежними. События A и B в этом случае будут зависимыми. Действительно, $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{37}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{9}{37}$, $\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{37}$, $\mathrm{P}(AB) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

На взгляд автора, интуитивное понятие о независимости событий не может помочь ответить на вопрос, почему в 1-ой задаче события A и B независимы, а во 2-ой – зависимы. В работе [7] доказана теорема, из которой вытекает

Теорема 2. *Если число исходов опыта равно N и все эти исходы равновероятны, т.е. каждый из исходов имеет вероятность $\frac{1}{N}$, то существуют хотя бы два независимых события тогда и только тогда, когда N – составное число.*

Отметим, что ранее теорема 2 была доказана в [8].

Так как 36 – составное число, то в силу теоремы 2 в задаче 1 существует хотя бы одна пара независимых событий. Например, события A и B независимы, причем нетрудно привести пример двух зависимых событий.

Число 37 является простым числом, поэтому в силу теоремы 1 в задаче 2 вообще не существует ни одной пары независимых событий.

Хотелось бы обратить внимание на еще одно свойство независимости. Оказывается, что понятие независимости в некотором смысле не обладает непрерывностью. Поясним это утверждение более подробно.

Заметим, что имеются опыты, исходы которых имеют неравные вероятности.

Пример. Если в ящике имеется m белых шаров и n черных, то вероятность вынуть белый шар из этого ящика равна $\frac{m}{m+n}$, а черный – $\frac{n}{m+n}$. Если $m \neq n$, то эти две вероятности различны.

Рассмотрим случай, когда некоторый опыт имеет N исходов, причем исход с номером k имеет вероятность p_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$. В предыдущем примере $N = 2$, $p_1 = \frac{m}{m+n}$, $p_2 = \frac{n}{m+n}$.

Теорема 2 утверждает, что если N – составное число и $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$, то в этом случае всегда существуют по крайней мере два независимых события. Оказывается, что существует опыт (см. [9]), в котором вероятности $p_k = \frac{1}{N}$ изменены так "как угодно мало", что в нем уже нельзя указать хотя бы одну пару независимых событий.

Таким образом, можно заключить, что понятие независимости является весьма тонким понятием. Поэтому необходима формальная проверка независимости, а ссылка на интуицию может привести к ошибочным заключениям.

Отметим, что в работах [7] и [9] получены и другие результаты.

Список литературы

[1] *Колмогоров А.Н.*, Из предисловия к сочинению Я. Бернулли “О законе больших чисел”. М.: Наука, 1986, с. 4.

[2] *Виноградов О.П.*, Что такое закон больших чисел? / Математика в Колмогоровской школе, М.: СУНЦ МГУ, 2009, с. 35–46.

[3] *Виноградов О.П.*, Что такое закон больших чисел? М.: СУНЦ МГУ, 2008, с. 1–20.

[4] *Прохоров Ю.В.*, статья “Больших чисел закон” в энциклопедии “Вероятность и математическая статистика”. М.: Большая российская энциклопедия, 1999, с. 60.

[5] *Колмогоров А.Н.*, Основные понятия теории вероятностей, 3-е изд. М., 1998.

[6] *Прохоров Ю.В.*, В энциклопедии: Вероятность и математическая статистика. М.: Большая российская энциклопедия, 1999, с. 380.

[7] *Виноградов О.П.*, Простые числа и независимость // Современные проблемы математики и механики, 2011, т. 7, №1, с. 16–21.

[8] *Shiflett R.C. and Shultz H.S.*, An approach to independent sets // Mathematical Spectrum, 1979/80, v. 12, p. 11–16.

[9] *Виноградов О.П.*, О равномерной независимости дискретных распределений // Дискретная математика (в печати).

Оптимальный момент для продажи одной акции и покупки другой

Воробьев А.Л.[1]

Представлена новая формулировка задачи поиска оптимального момента для продажи одной акции и покупки другой. В модели Блэка-Мертона-Шоулса (непрерывное время), а также в частном случае в модели Кокса-Росса-Рубинштейна (дискретное время) эта задача сведена к задаче поиска оптимального момента для продажи акции.

1 Модель Блэка-Мертона-Шоулса

В ряде работ (см. [1], [2]) рассматривается задача поиска оптимального момента на временном интервале $[0, T]$ для одновременного совершения следующих операций: продажи акций компаний с номерами $1, 2, \ldots n$ и покупки акций компаний с номерами $(n+1), \ldots (n+m)$.

Эта задача рассматривается в модели Блэка-Мертона-Шоулса, где изменение цены каждой акции соответствует геометрическому броуновскому движению:

$$P_{i,t} = P_{i,0}\, e^{\mu_i t + \sigma_i B_{i,t}},$$

где $P_{i,t}$ — стоимость акций компании с номером i, которые трейдер хочет продать или купить (фиксированное количество), в момент t (константа при $t = 0$);
μ_i, σ_i — некоторые константы;
$B_{i,t}$ — винеровский процесс с номером i. Причем винеровские процессы B_i могут коррелировать между собой, точнее, их можно представить следующим образом:

$$\sigma B_{i,t} = k_{i,1} W_{1,t} + \ldots + k_{i,n+m} W_{n+m,t},$$

где винеровские процессы W_i попарно независимы.

Тогда, если оптимальным считать момент, когда прибыль от указанных операций максимальна (или убыток минимален) с учетом дисконтирования, то задачу можно сформулировать следующим образом:

$$V = \sup_{0 \le \tau \le T \text{ п.н.}} E(e^{-r\tau}(\sum_{i=1}^{n} P_{i,\tau} - \sum_{i=n+1}^{n+m} P_{i,\tau})), \qquad (1)$$

[1]Воробьев Александр Леонидович, alvorobyev88@gmail.com, аспирант, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

где τ — момент остановки,
r — ставка дисконтирования,
$P_{i,\tau}$ — стоимость акций компании с номером i, которые трейдер хочет продать или купить, в момент τ.

Такая постановка задачи означает, что необходимо продать и приобрести фиксированное количество экземпляров акций каждой компании. На рынке акций это может быть актуально, если для большого игрока важно владеть определенным пороговым пакетом акций, например, контрольным (50% и одна акция). Но в таком случае вряд ли удастся купить или продать все акции по цене, существующей на рынке на момент начала покупки или продажи (в момент остановки τ).

Другая нечастая ситуация, когда такая задача возникает на практике, — когда капитал трейдера невелик по сравнению с ценой акции, и при обычных колебаниях цены он точно знает, какое количество акций ему необходимо купить или продать.

Мы же предлагаем исходить из того, что капитал трейдера удовлетворяет следующим двум условиям:
а) Капитал трейдера на несколько порядков больше, чем цена акции. Это условие означает, что количество акций, которое трейдер покупает или продает, можно считать рациональным числом, и погрешность такой модели будет несущественной.
б) Капитал трейдера не так велик, чтобы осуществление сделки на сумму этого капитала по существующей на рынке цене (или с незначительными отклонениями от нее) представляло сложности. Без этого условия искать оптимальный момент на основе моделей изменения цен в нормальных рыночных условиях было бы бессмысленно.

Рассмотрим в этих условиях выбор момента для продажи одних акций и покупки других в случае $n = 1,\ m = 1$.

Итак, трейдер в нулевой момент времени обладает акциями компании 1, и на временном интервале $[0, T]$ может продать их и купить акции компаний 2. При этом естественно потратить на акции компании 2 все полученные от продажи средства (можно считать это возможным благодаря условию а), а не купить заранее фиксированное число акций, т.к. обычно акции — не самоцель, а лишь инструмент вложения денежных средств. Предложим для этой ситуации следующее определение оптимального момента.

Трейдер стремится максимизировать число акций компании 2 в его портфеле на момент Т, или, что то же самое, на момент покупки этих акций. Например, именно количество акций может быть важно, если после момента T будут выплачены дивиденды. Тогда мы имеем следующую задачу оптимальной остановки:

$$V = \sup_{0\le\tau\le T \text{ п.н.}} E\left(\frac{P_{1,\tau}}{P_{2,\tau}}\right) = \sup_{0\le\tau\le T \text{ п.н.}} E(e^{\mu_1\tau+\sigma_1 B_{1,\tau}-\mu_2\tau-\sigma_2 B_{2,\tau}}). \tag{2}$$

Далее, аналогично задаче с продажей акции одной компании (см. [3]), нас может интересовать максимизация в среднем количества акций не самого по себе, а относительно абсолютного максимума на всем интервале $[0, T]$ (который станет известен только по завершении этого временного интервала). Тогда получаем следующую задачу оптимальной остановки:

$$V = \sup_{0\le\tau\le T \text{ п.н.}} E\frac{P_{1,\tau}/P_{2,\tau}}{\sup\limits_{0\le t\le T}(P_{1,t}/P_{2,t})} = \\ = \sup_{0\le\tau\le T \text{ п.н.}} Ee^{(\mu_1\tau+\sigma_1 B_{1,\tau}-\mu_2\tau-\sigma_2 B_{2,\tau})-\sup\limits_{0\le t\le T}(\mu_1 t+\sigma_1 B_{1,t}-\mu_2 t-\sigma_2 B_{2,t})}. \tag{3}$$

Покажем, что (2), (3) и многие другие задачи, оперирующие отношением цен двух акций, сводятся к задачам, оперирующим ценой одной акции.

Утверждение 1. *Отношение цен двух акций эквивалентно процессу, описывающему изменение цены некоторой акции. Точнее,*

$$(e^{\mu_1 t+\sigma_1 B_{1,t}-\mu_2 t-\sigma_2 B_{2,t}})_{t\in[0;\infty)} = (e^{\mu t'+B_{t'}})_{t'\in[0;\infty)}, \tag{4}$$

где B_t — винеровский процесс, $t' = ((k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2)t$, $\mu = \frac{\mu_1-\mu_2}{(k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2}$.

Доказательство. Покажем, что процесс $A_t = \sigma_1 B_{1,t} - \sigma_2 B_{2,t}$ является винеровским процессом, умноженным на константу:

$$E(\sigma_1 B_{1,t} - \sigma_2 B_{2,t}) = 0,$$
$$E(\sigma_1 B_{1,t} - \sigma_2 B_{2,t})^2 = E(k_{1,1}W_{1,t} + k_{1,2}W_{2,t} - k_{2,1}W_{1,t} - k_{2,2}W_{2,t})^2 =$$
$$= E((k_{1,1}-k_{2,1})W_{1,t} + (k_{1,2}-k_{2,2})W_{2,t})^2 = ((k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2)t,$$

т.к. $W_{1,t}$ и $W_{2,t}$ независимы и $E(W_{1,t}W_{2,t}) = 0$.

Очевидно, приращения процесса A_t независимы. Таким образом,

$$(A_t)_{t\in[0;\infty)} = (\sqrt{(k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2}B_t)_{t\in[0;\infty)} =^{(law)} (B_{((k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2)t})_{t\in[0;\infty)},$$

где B_t — винеровский процесс.

Тогда отношение цен акций можно переписать так:

$$(e^{\mu_1 t+\sigma_1 B_{1,t}-\mu_2 t-\sigma_2 B_{2,t}})_{t\in[0;\infty)} = (e^{(\mu_1-\mu_2)t+B_{((k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2)t}})_{t\in[0;\infty)} = (e^{\mu t'+B_{t'}})_{t'\in[0;\infty)},$$

где $t' = ((k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2)t$, $\mu = \frac{\mu_1-\mu_2}{(k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2}$.
Утверждение 1 доказано. □

Доказанное утверждение означает, что цена акции, выраженная в единицах другой акции, описывается тем же случайным процессом, что и цена акции, выраженная в денежных единицах, что довольно естественно и удобно.

Таким образом, результаты, известные для задач с одной акцией, аналогичных задачам (2), (3) (см., например, [4]) и дающие искомый момент остановки в зависимости от величины μ, могут быть перенесены на задачи (2), (3), и искомый момент остановки будет зависеть от величины $\frac{\mu_1-\mu_2}{(k_{1,1}-k_{2,1})^2+(k_{1,2}-k_{2,2})^2}$.

2 Модель Кокса-Росса-Рубинштейна

Теперь обратимся к модели дискретного времени — модели Кокса-Росса-Рубинштейна, где в степени экспоненты вместо броуновского движения стоит случайное блуждание:

$$P_{i,k} = P_{i,0}e^{S_{i,k}},$$
$$S_{i,0} = 0, \quad S_{i,k} = (X_{i,1} + \ldots + X_{i,k}),$$
$$P\{X_{i,j} = a_i\} = p_i, \quad P\{X_{i,j} = -a_i\} = 1 - p_i,$$

величины X_{i_1,j_1}, X_{i_2,j_2} независимы при $j_1 \neq j_2$ и могут быть зависимы при $j_1 = j_2$;
$a_i > 0, p_i \in [0,1]$ — некоторые константы.

В этой модели также актуальны задачи поиска оптимального момента (например, аналогичные (2) и (3)), для задач одной акции в этой модели также есть различные результаты.

Однако для отношения цен двух акций здесь мы не получим аналога утверждения 1. Действительно,

$$\frac{P_{1,k}}{P_{2,k}} = \frac{P_{1,0}}{P_{2,0}} e^{S_{1,k}-S_{2,k}} = \frac{P_{1,0}}{P_{2,0}} e^{(X_{1,1}-X_{2,1})+\ldots+(X_{1,k}-X_{2,k})},$$

где $X_{1,j} - X_{2,j} = \begin{cases} a_1 + a_2, & p_1 - p_{++} \\ a_1 - a_2, & p_{++} \\ -a_1 + a_2, & 1 + p_{++} - p_1 - p_2 \\ -a_1 - a_2, & p_2 - p_{++} \end{cases}$

где $p_{++} = P\left\{X_{1,j} = a_1,\ X_{2,j} = a_2\right\}$.

Этот процесс в каждый момент уже имеет 4 варианта шага: 2 различных шага вверх и 2 равных им по абсолютной величине — вниз. Поэтому мы не можем сразу перенести результаты, известные для задач с одной акцией в рамках данной модели, на соответствующие задачи с отношением цен двух акций.

Однако ниже мы докажем утверждение, которое позволяет перенести некоторые результаты в случае $a_1 = a_2$ (т.е. когда случайные блуждания двух акций имеют одинаковые шаги, и процесс, равный их разности, в каждый момент либо идет наверх, либо идет вниз, либо остается на месте).

Но сначала введем необходимые понятия. Пусть S_k — случайное блуждание, каждый шаг которого может с ненулевой вероятностью принимать нулевое значение. Пусть также дана пара $(\tau(\omega), \omega)$, где ω — некоторая траектория процесса S_k на некотором интервале $[0, N]$, остающаяся на месте на шаге m (этот шаг равен нулю), а $\tau(\omega)$ — значение некоторого момента остановки τ на этой траектории.

Определение 1. Опусканием тривиального шага m называется преобразование пары $(\tau(\omega), \omega)$, при котором шаг m вырезается, моменты $m-1$ и m соединяются вместе, ω переходит в траекторию ω' процесса S_k на интервале $[0, N-1]$, а $\tau(\omega)$ переходит в момент остановки $\tau'(\omega')$: $\tau'(\omega') = \begin{cases} \tau(\omega), & \text{если } \tau(\omega) < m; \\ \tau(\omega) - 1, & \text{если } \tau(\omega) \geq m. \end{cases}$

Значение процесса S в некоторый момент k на траектории ω будем обозначать ω_k. Тогда очевидно, что $\omega'_{\tau'} = \omega_\tau$. Вероятность получившейся траектории ω' получается делением вероятности исходной ω на вероятность того, что процесс S_k останется на месте на шаге m: $P(\omega') = \frac{P(\omega)}{P\left\{X_{m_0}=0\right\}}$.

Определение 2. Функция $f(\tau, \omega)$, определенная на паре (τ, ω) для любого интервала $[0, N]$, называется инвариантной относительно опускания тривиального шага, если $f(\tau, \omega) = f(\tau', \omega')$.

Например, легко проверить, что к таким функциям относятся все функции вида $f(\omega_\tau, \sup\limits_{0\leq k\leq N} \omega_k, \inf\limits_{0\leq k\leq N} \omega_k)$.

Теорема 1. *(в скобках указывается альтернативный вариант формулировки, называемый далее вариантом 2)*
Пусть $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $S'_k = X'_1 + \ldots + X'_k$,

где $X_j = \begin{cases} a, & p \\ -a, & q = 1-p \end{cases}$, $X'_j = \begin{cases} a, & p' \\ 0, & 1-p'-q' \\ -a, & q' \end{cases}$, *причем* $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$.
И пусть есть задача оптимальной остановки

$$V = \sup_{0\le\tau\le T \text{ п.н.}} Ef(\tau, (S_k)_{k=1\dots N}), \tag{5}$$

где f инвариантна относительно опускания тривиального шага и известно, что одним из оптимальных моментов (вариант 2 — единственным оптимальным моментом) является либо момент $\tau^* = 0$ п.н. $\forall N$, либо $\tau^* = N$ п.н. $\forall N$. Тогда для задачи (5), где вместо S_k стоит процесс S'_k, один из оптимальных моментов (вариант 2 — единственный оптимальный момент) будет таким же.

Доказательство. Докажем данное утверждение по индукции не только для S'_k, но для целой группы процессов, т.к. на шаге индукции нам понадобится именно такое, более сильное утверждение. Для этого опишем данную группу: пусть

$$S'_{m,k} = X'_1 + \ldots + X'_m + X_{m+1} + \ldots + X_k,$$

где $m \in [0, k]$ (то есть до момента m процесс на каждом шаге имеет 3 варианта шага, как процесс S'_k, а после этого момента — только два варианта, как процесс S_k).

Докажем индукцией по N для всех неотрицательных целых N, что задача (5) будет иметь тот же оптимальный момент τ^* для процесса $S'_{m,k}$ $\forall m \in [0, k]$.

База индукции по N: при N=0 моменты $\tau = 0$ п.н. и $\tau = N$ п.н. совпадают, являются единственно возможными моментами остановки, поэтому утверждение верно.

Шаг индукции по N: пусть утверждение доказано для всех $N < N_0$ ($N_0 > 0$) для всех процессов $S'_{m,k}$. Докажем его для $N = N_0$ для всех процессов $S'_{m,k}$ индукцией по m.

База индукции по m: при $m = 0$ процесс $S'_{m,k}$ совпадает с процессом S_k, а для него оптимальность момента τ^* (вариант 2 — и единственность его как оптимального момента) известна из условия.

Шаг индукции по m: пусть утверждение доказано для $N = N_0$ для всех $m < m_0$ ($m_0 > 0$). Докажем его для $m = m_0$. Распишем максимизируемое математическое ожидание:

$$Ef(\tau, (S'_{m_0,k})_{k=1\dots N_0}) = \sum_{\omega_{m_0,N_0}} P(\omega_{m_0,N_0}) f(\tau(\omega_{m_0,N_0}), \omega_{m_0,N_0}), \tag{6}$$

где ω_{m_0,N_0} пробегает все траектории процесса $S'_{m_0,k}$ на интервале $[0, N_0]$.

Сначала выделим среди множества всех траекторий те, которые на шаге m_0 остаются на месте (последний шаг, на котором траектория процесса $S'_{m_0,k}$ может остаться на месте). Распишем соответствующую им подсумму суммы (6):

$$\sum_{\omega_{m_0,N_0}: X'_{m_0}=0} P(\omega_{m_0,N_0}) f(\tau(\omega_{m_0,N_0}), \omega_{m_0,N_0}) =$$
$$= (1-p'-q') \sum_{\omega_{m_0-1,N_0-1}} P(\omega_{m_0-1,N_0-1}) f(\tau'(\omega_{m_0-1,N_0-1}), \omega_{m_0-1,N_0-1}). \tag{7}$$

Здесь мы для каждой траектории ω_{m_0,N_0}, по которой идет суммирование, произвели опускание тривиального шага m_0. Получившаяся траектория обозначена ω_{m_0-1,N_0-1}, т.к. после момента $m_0 - 1$ она не остается на месте. И каждая траектория процесса $S'_{m_0-1,k}$ на интервале $[0, N_0 - 1]$ появляется в этой сумме ровно один раз.

Вероятность данной траектории мы получили с помощью формулы, установленной выше при определении данного преобразования, с учетом $P\{X_{m_0} = 0\} = 1 - p' - q'$.

Значение функции f при данном преобразовании осталось неизменным в силу ее инвариантности относительно опускания тривиального шага.

Момент остановки τ для процесса $S'_{m_0,k}$ перешел при этом в соответствующий момент остановки для процесса $S'_{m_0-1,k}$, причем в момент $\tau' = 0$ п.н. перейдут моменты: $\tau = 0$ п.н., а также при $m_0 = 1$ момент $\tau = 1$ п.н.; а в момент $\tau' = N_0 - 1$ п.н. перейдут моменты: $\tau = N_0$ п.н., а также при $m_0 = N_0$ момент $\tau = N_0 - 1$.

Поскольку для $N = N_0 - 1$ и $m = m_0 - 1$ утверждение уже доказано, то сумма (7) будет принимать максимальное значение с моментом остановки $\tau' = \tau^*$. Тогда из соответствия моментов τ и τ' для рассматриваемой подсуммы в сумме (6) аналогичный момент $\tau = \tau^*$ будет как минимум одним из тех, на которых достигается максимум этой подсуммы.

Осталось показать, что оставшаяся часть суммы (6) также максимальна с моментом τ^* (вариант 2 — и только с ним). Но оставшиеся траектории — это все траектории процесса $S'_{m_0,k}$, не остающиеся на месте на шаге m_0, а они являются всеми возможными траекториями процесса $S'_{m_0-1,k}$, а для него (т.е. для $m = m_0 - 1$ и $N = N_0$) утверждение уже доказано. Только вероятность имеющейся в сумме (6) траектории процесса $S'_{m_0,k}$ не равна вероятности такой же траектории процесса $S'_{m_0-1,k}$, т.к. на шаге m_0 первый мог остаться на месте, а последний — нет: $\frac{P(\omega_{m_0,N_0})}{P(\omega_{m_0-1,N_0})} = \begin{cases} \frac{p'}{p}, & \text{если на шаге } m_0 \text{ траектория шагает вверх;} \\ \frac{q'}{q}, & \text{если на шаге } m_0 \text{ траектория шагает вниз.} \end{cases}$
Поскольку по условию эти два отношения совпадают, то оставшаяся часть суммы (6) отличается от суммы для процесса $S'_{m_0-1,k}$ только умножением на константу, что не меняет момента остановки τ, при котором сумма максимальна. Таким образом, теорема 1 доказана. $\square$

Тогда результаты, соответствующие правилу "buy-and-hold"(т.е. $\tau = 0$ п.н. или $\tau = N_0$ п.н.), известные для задач с одной акцией для случайных блужданий типа S_k (шаг вверх или вниз) и для функций f, инвариантных относительно опускания тривиального шага, (см., например, [4]) могут быть перенесены на случай процесса S'_k (шаг вверх, вниз или на месте), или, иначе говоря — на случай двух акций, когда случайные блуждания этих акций имеют одинаковый шаг.

Список литературы

[1] *Gahungu J., Smeers Y.*, Optimal time to invest when the price processes are geometric Brownian motions. A tentative based on smooth fit // CORE Discussion Paper, 2011, №34.

[2] *Hu Y., Oksendal B.*, Optimal time to invest when the price processes are geometric Brownian motions // Finance and Stochastics, 1998, №2, с. 295–310.

[3] *Shiryaev A. N., Xu Z., Zhou X. Y.*, Thou shalt buy and hold // Quantitative Finance, 2008, №8, с. 765–776.

[4] *Yam S.C., Yung S.P., Zhou W.*, A unified "bang-bang"principle with respect to R-invariant performance benchmarks // Теория вероятностей и ее применения, 2012, №2, с. 405–414.

Индексы многомерных рекуррентных стохастических последовательностей[1]

Голдаева А.А.[2]

В работе найдены формулы хвостового и экстремального индексов некоторых стохастических рекуррентных последовательностей.

1 Введение

Рассмотрим процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому разностному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \tag{1}$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые, одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Известно, что стационарные процессы вида (1) при довольно общих условиях обладают двумя важными свойствами, относящимися к поведению их экстремумов: стационарное распределение имеет степенной хвост, а максимум $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ при $n \to \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением, где θ есть экстремальный индекс процесса Y_n.

Напомним [1], что стационарная случайная последовательность Y_n с маргинальной функцией распределения $G(x)$ имеет экстремальный индекс θ, если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность $u_n(\tau)$, что:

1) $n\bar{G}(u_n(\tau)) \to \tau$ при $n \to \infty$;

2) $\mathrm{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to \exp(-\theta\tau)$, $n \to \infty$.

Процессы (1) изучаются начиная с работы [2]. В работе [3], которая посвящена исследованию двух числовых характеристик — индекса хвоста κ и экстремального индекса θ, найдены общие формулы для них, но они не дают ответа в явном виде и результат может быть получен только численно. Так, в [3] доказана

Теорема 1. [3]. *Пусть процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяет уравнению (1), пусть*

1) существует такое число $\kappa > 0$, что $\mathrm{E}A_1^\kappa = 1$, $\mathrm{E}A_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty$, $0 < \mathrm{E}B_1^\kappa < \infty$;

2) распределение $B_1/(1 - A_1)$ невырожденное, а распределение $\ln A_1$ при условии, что $A_1 \neq 0$, не решетчатое.

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Голдаева Анна Алексеевна, gold_ann@list.ru, ассистент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) уравнение $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, *где* Y_∞ *и* (A_1, B_1) *независимы, имеет единственное решение* $Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$;

2) если в (1) *положить* $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, *то процесс* $\{Y_n\}$ *будет стационарным;*

3) при любом начальном условии процесса $\{Y_n\}$ *имеет место* $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$, $n \to \infty$;

4) существует постоянная $c > 0$, *такая, что* $\mathrm{P}(Y_\infty > x) \sim c x^{-\kappa}$ *при* $x \to \infty$;

5) процесс Y_n *имеет экстремальный индекс* θ, *вычисляемый по формуле*

$$\theta = \int_1^\infty \mathrm{P}(\bigvee_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} A_i \le y^{-1}) \kappa y^{-\kappa-1}\, dy,$$

причем если $a_n = n^{-1/\kappa}$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n M_n \le x) = \exp(-c\theta\, x^{-\kappa})$ *для всех* $x > 0$.

Замечание 1. Поведение процесса (1) в достаточно общем случае определяется только величинами A_n. Другими словами, если два процесса вида (1) заданы парами случайных величин (A_n, B_n) и $(A_n, \tilde{B}_n)$, $n \ge 1$, соответственно, причем эти пары удовлетворяют условиям теоремы 1, то оба процесса имеют одинаковые индексы хвоста κ и одинаковые экстремальные индексы θ.

Замечание 2. В теореме 1 утверждается, что индекс κ существует, но формулы для него в явном виде эта теорема не дает. Также теорема 1 дает лишь общую формулу для экстремального индекса, применение которой на практике затруднительно.

В работе [4] была найдена явная формула индекса хвоста κ, для чего был предложен новый подход, состоящий в рассмотрении некоторых последовательностей, удовлетворяющих (1), как последовательностей наблюдений процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. Основным результатом [4] является следующая теорема.

Теорема 2. [4]. *Пусть* $A \stackrel{d}{=} e^{a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi}$, *где* ξ *имеет стандартное нормальное распределение,* Δ *— неотрицательная случайная величина, причем* $\mathrm{E}\Delta^{-\frac{2a}{\sigma^2}+1} < \infty$, $a < 0$, $\sigma > 0$ *и* ξ *и* Δ *независимы. Рассмотрим процесс* $(X_t)_{t\ge 0}$, *задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением*

$$dX_t = (c - d\cdot X_t)\, dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = x,$$

в котором $c > 0$ *— произвольная постоянная,* $d = -(a + \frac{\sigma^2}{2})$. *Рассмотрим также случайные величины* $\Delta_n \stackrel{d}{=} \Delta$, *независимые в совокупности и не зависящие от процесса* W; $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, $Y_n = X_{T_n}$, $n \ge 1$. *Тогда* Y_n *удовлетворяют всем условиям теоремы 1,* $A_n \stackrel{d}{=} A$, $n \ge 1$, *причем индекс* $\kappa = -\frac{2a}{\sigma^2}$.

Целью данной работы является нахождение индексов κ и θ в многомерном случае.

Один из способов обобщить хвостовой и экстремальный индексы на многомерные рекуррентные последовательности со степенным хвостами маргинальных распределений, это рассмотреть линейные комбинации компонент векторов и свести задачу к одномерной, при этом индексы превращаются в функции от коэффициентов. Подобный подход в отношении хвостового индекса был применен в работе [5], а в отношении экстремального индекса — в работе [6]. Мы поступаем таким же образом, с учетом того, что рассматриваем только неотрицательные последовательности, поэтому удобно ввести индексы как функции от положительных коэффициентов.

Рассмотрим последовательности случайных величин $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \ldots, Y_n^{(l)}$, $n \geq 1$, $l \geq 1$, имеющие стационарные распределения с индексами хвостов $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$ соответственно, т.е. $\mathrm{P}(Y_n^{(i)} > x) \sim c^{(i)} x^{-\kappa_i}$, $x \to \infty$, где $c^{(i)}$ — некоторые постоянные, $i = 1, \ldots, l$. Пусть θ_i — экстремальные индексы для последовательностей $Y_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, l$, соответственно.

Рассмотрим последовательность $Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots z_l Y_n^{(l)}$, $z_1, \ldots, z_l > 0$. Обозначим $\kappa(z)$ и $\theta(z)$ — ее хвостовой и экстремальный индексы соответственно.

Замечание 3. Многомерное уравнение (1) в некотором частном случае исследовалось в [6], но явных формул для индексов κ и θ найдено не было.

2 Индексы некоторых многомерных последовательностей

2.1. Случай последовательностей с различными хвостовыми индексами.

Рассмотрим случай, когда среди хвостовых индексов $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$ существует наименьший; без ограничения общности можно предположить, что $\kappa_1 < \kappa_i$, $i = 2, \ldots, l$.

Теорема 3. *Пусть $\kappa_1 < \kappa_i$, $i = 2, \ldots, l$. Тогда $\kappa(z) = \kappa_1$ и $\theta(z) = \theta_1$.*

Доказательство. В соответствии с определениями хвостового и экстремального индексов утверждение теоремы равносильно выполнению следующих условий:

1) $\mathrm{P}(Y_n(z) > x) \sim c(z) x^{-\kappa_1}$, $x \to \infty$,

2) $\mathrm{P}(M_n(z) n^{-1/\kappa_1} \leq x) \to \exp(-c(z)\theta_1 x^{-\kappa_1})$, $n \to \infty$, где $c(z)$ — некоторая неотрицательная функция, $M_n(z) = \max(z_1 Y_1^{(1)} + \ldots + z_l Y_1^{(l)}, \ldots, z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)})$, $n \geq 1$.

Докажем утверждение 1). Очевидно, что

$$\mathrm{P}(Y_n(z) > x) \geq \mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x).$$

Оценим эту вероятность сверху, воспользовавшись следующим неравенством:

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_l > t) \leq \mathrm{P}(X_1 > t\varepsilon_1) + \mathrm{P}(X_2 > t\varepsilon_2) + \ldots + \mathrm{P}(X_l > t\varepsilon_l),$$

где $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l = 1$. Это неравенство очевидно выполнено в силу того, что из события $X_1 + \ldots + X_l > t$ следует событие $\{X_1 > t\varepsilon_1\} \cup \ldots \cup \{X_l > t\varepsilon_l\}$.

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_l$, тогда $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$ и

$$\mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x) \leq \mathrm{P}(Y_n(z) > x) \leq \mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x(1-\varepsilon)) + \mathrm{P}(z_2 Y_n^{(2)} > x\varepsilon_2) + \ldots + \mathrm{P}(z_l Y_n^{(l)} > x\varepsilon_l). \tag{2}$$

Поскольку

$$\mathrm{P}(z_i Y_n^{(i)} > t) \sim c^{(i)} (t/z_i)^{-\kappa_i} = c^{(i)} z_i^{\kappa_i} t^{-\kappa_i}, \qquad x \to \infty,$$

то

$$\mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x(1-\varepsilon)) \sim c^{(1)} z_1^{\kappa_1} (1-\varepsilon)^{-\kappa_1} x^{-\kappa_1}, \quad \mathrm{P}(z_i Y_n^{(i)} > x\varepsilon_i) \sim c^{(i)} z_i^{\kappa_i} \varepsilon_i^{-\kappa_i} x^{-\kappa_i}, \quad x \to \infty.$$

В силу того, что $\kappa_1 < \kappa_i$, $i = 2, \ldots, l$, имеем

$$c^{(i)} z_i^{\kappa_i} \varepsilon_i^{-\kappa_i} x^{-\kappa_i} = o(x^{-\kappa_1}), \quad x \to \infty.$$

Тогда из (2) следует, что

$$c^{(1)} z_1^{\kappa_1} \leq \varliminf_{x \to \infty} \mathrm{P}(Y_n(z) > x) \cdot x^{\kappa_1} \leq \varlimsup_{x \to \infty} \mathrm{P}(Y_n(z) > x) \cdot x^{\kappa_1} \leq c^{(1)} z_1^{\kappa_1} (1 - \varepsilon)^{-\kappa_1},$$

откуда при $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l \to 0$ получаем

$$\mathrm{P}(Y_n(z) > x) \sim c(z) x^{-\kappa_1}, \qquad x \to \infty,$$

где $c(z) = c^{(1)} z_1^{\kappa_1}$.

Докажем теперь утверждение 2). Имеем

$$z_1 \max(Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)}) \leq M_n(z) \leq z_1 \max(Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)}) + \ldots + z_l \max(Y_1^{(l)}, \ldots, Y_n^{(l)}),$$

т.е.

$$z_1 M_n^{(1)} \leq M_n(z) \leq z_1 M_n^{(1)} + \ldots + z_l M_n^{(l)},$$

отсюда

$$\mathrm{P}(z_1 M_n^{(1)} n^{-1/\kappa} \leq x) \geq \mathrm{P}(M_n(z) n^{-1/\kappa} \leq x) \geq \mathrm{P}((z_1 M_n^{(1)} + \ldots + z_l M_n^{(l)}) n^{-1/\kappa} \leq x). \quad (3)$$

Поскольку $\mathrm{P}(z_i M_n^{(i)} n^{-1/\kappa_i} \leq x) \to \exp(-c^{(i)} \theta_i z_i^{\kappa_i} x^{-\kappa_i})$ и $\kappa_1 < \kappa_i$, $i = 2, \ldots, l$, то $z_i M_n^{(i)} n^{-1/\kappa_1} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, $n \to \infty$, $i = 2, \ldots, l$, а значит

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}((z_1 M_n^{(1)} + \ldots + z_l M_n^{(l)}) n^{-1/\kappa_1} \leq x) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(z_1 M_n^{(1)} n^{-1/\kappa_1} \leq x) = e^{-c^{(1)} \theta_1 z_1^{-\kappa_1} x^{-\kappa_1}} = e^{-c(z) \theta_1 x^{-\kappa_1}}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует требуемое. Теорема доказана. □

2.2. Случай независимых последовательностей с равными хвостовыми индексами.

Предположим, что последовательности $Y_n^{(1)}, \ldots, Y_n^{(l)}$ независимы, имеют одинаковые хвостовые индексы $\kappa_1 = \ldots = \kappa_l = \kappa$ и экстремальные индексы $\theta_1, \ldots, \theta_l$. Рассмотрим последовательности $Y_n^*(z) = \max(z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)})$ и $Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)}$, $z_1, \ldots, z_l > 0$. Покажем, что экстремальные индексы последовательностей $Y_n^*(z)$ и $Y_n(z)$ равны. Для доказательства этого факта нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если $\xi_1, \ldots, \xi_l$ — неотрицательные независимые случайные величины с одинаковыми степенными хвостами, т.е. $1 - F_{\xi_i}(x) \sim c_i x^{-\kappa}$, $x \to +\infty$, $i = 1, \ldots, l$, для некоторого $\kappa > 0$, то*

$$\mathrm{P}\Big(\max(\xi_1, \ldots, \xi_l) \leq u | \xi_1 + \ldots + \xi_l > u \Big) \to 0, \qquad u \to +\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{P}\Big(\max(\xi_1, \ldots, \xi_l) \leq u | \xi_1 + \ldots + \xi_l > u \Big) =$$
$$= \frac{\mathrm{P}\Big(\max(\xi_1, \ldots, \xi_l) \leq u, \xi_1 + \ldots + \xi_l > u \Big)}{\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_l > u)} = \frac{\mathrm{P}\Big(\xi_1 \leq u, \ldots, \xi_l \leq u, \xi_1 + \ldots + \xi_l > u \Big)}{\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_l > u)}$$

Обозначим $A = \{\xi_1 \le u, \ldots, \xi_l \le u\}$, $B = \{\xi_1 + \ldots + \xi_l > u\}$. Тогда искомая вероятность равна $\dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$. Далее,

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(\bar{A}),$$

поскольку из события $\bar{A}$ следует событие B.

В [7, с.338] показано, что

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 > u) \sim (c_1 + c_2)u^{-\kappa} + o(u^{-\kappa}).$$

Очевидно, что это утверждение легко обобщается по индукции на произвольное количество случайных величин. Тогда при $u \to \infty$ имеем

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_l > u) \sim (c_1 + \ldots + c_l)u^{-\kappa} + o(u^{-\kappa})$$

и

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{P}(\xi_i > u) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(\xi_i > u) \cdot \mathrm{P}(\xi_j > u) + \ldots + (-1)^{l-1}(\mathrm{P}(\xi_1 > u) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(\xi_j > u)) \sim$$
$$\sim \sum_{i=1}^{l} c_i u^{-\kappa} - \sum_{i<j} c_i c_j u^{-2\kappa} + \ldots + (-1)^{l-1} c_1 \cdot \ldots \cdot c_l u^{-l\kappa} = (c_1 + \ldots + c_l)u^{-\kappa} + o(u^{-\kappa}).$$

Отсюда получаем, что $\frac{\mathrm{P}(\bar{A})}{\mathrm{P}(B)} \to 1$, а значит, и $\mathrm{P}\Big(\max(\xi_1, \ldots, \xi_l) \le u | \xi_1 + \ldots \xi_l > u\Big) \to 0$ при $u \to \infty$. Лемма доказана. □

Теорема 4. *Экстремальные индексы последовательностей $Y_n^*(z)$ и $Y_n(z)$ совпадают и равны*

$$\theta(z) = \frac{c^{(1)} z_1^\kappa}{c^{(1)} z_1^\kappa + \ldots + c^{(l)} z_l^\kappa}\theta_1 + \ldots + \frac{c^{(l)} z_l^\kappa}{c^{(1)} z_1^\kappa + \ldots + c^{(l)} z_l^\kappa}\theta_l.$$

Доказательство. 1) Покажем, что $\mathrm{P}(Y_n^*(z) > x) \sim c(z)x^{-\kappa}$, $x \to \infty$, где $c(z) = c^{(1)} z_1^\kappa + \ldots + c^{(l)} z_l^\kappa$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Y_n^*(z) > x) = \mathrm{P}(\max(z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)}) > x) = 1 - \mathrm{P}(\max(z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)}) \le x) = \\
&= 1 - \mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} \le x, \ldots, z_l Y_n^{(l)} \le x) = 1 - \mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} \le x) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(z_l Y_n^{(l)} \le x) = \\
&= 1 - (1 - \mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathrm{P}(z_l Y_n^{(l)} > x)) = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{l} \mathrm{P}(z_i Y_n^{(i)} > x) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(z_i Y_n^{(i)} > x)\mathrm{P}(z_j Y_n^{(j)} > x) + \ldots + \\
&+ (-1)^{l-1}(\mathrm{P}(z_1 Y_n^{(1)} > x) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(z_l Y_n^{(l)} > x)) \sim \textstyle\sum_{i=1}^{l} c^{(i)} z_i^\kappa x^{-\kappa} - \sum_{i<j} c^{(i)} z_i^\kappa c^{(j)} z_j^\kappa x^{-2\kappa} + \ldots + \\
&+ (-1)^{l-1} c^{(1)} z_1^\kappa \cdot \ldots \cdot c^{(l)} z_l^\kappa x^{-l\kappa} \sim c(z)x^{-\kappa} + o(x^{-\kappa}), \quad x \to \infty.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{P}(Y_n^{(1)} > x) \sim c^{(1)} x^{-\kappa}$, …, $\mathrm{P}(Y_n^{(l)} > x) \sim c^{(l)} x^{-\kappa}$, $x \to \infty$, то, аналогично доказанному в лемме 2, $\mathrm{P}(Y_n(z) > x) \sim c(z)x^{-\kappa}$, $x \to \infty$. Таким образом, $\mathrm{P}(Y_n^*(z) > x) \sim \mathrm{P}(Y_n(z) > x) \sim c(z)x^{-\kappa}$, $x \to \infty$, т.е. последовательности $Y_n^*(z)$ и $Y_n(z)$ имеют одинаковые хвосты.

2) Введем обозначения: $M_n^{(i)} = \max(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \ldots, Y_n^{(i)})$, $i = 1, \ldots, l$, $M_n^*(z) = \max(Y_1^*(z), Y_2^*(z), \ldots, Y_n^*(z))$, $M_n(z) = \max(Y_1(z), Y_2(z), \ldots, Y_n(z))$, $n \geq 1$.

Покажем, что $\mathrm{P}(M_n^*(z)n^{-1/\kappa} \leq x) \to \exp(-c(z)\theta(z)x^{-\kappa})$, $n \to \infty$.

Заметим, что

$$M_n^*(z) = \max(Y_1^*(z), Y_2^*(z), \ldots, Y_n^*(z)) =$$
$$= \max(z_1 Y_1^{(1)}, \ldots, z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_1^{(l)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)}) = \max(z_1 M_n^{(1)}, \ldots, z_l M_n^{(l)}).$$

Тогда

$$\mathrm{P}(M_n^*(z)n^{-1/\kappa} \leq x) = \mathrm{P}(\max(z_1 M_n^{(1)}, \ldots, z_l M_n^{(l)})n^{-1/\kappa} \leq x) =$$
$$= \mathrm{P}(z_1 M_n^{(1)} n^{-1/\kappa} \leq x, \ldots, z_l M_n^{(l)} n^{-1/\kappa} \leq x) = \mathrm{P}(z_1 M_n^{(1)} n^{-1/\kappa} \leq x)\mathrm{P}(z_2 M_n^{(2)} n^{-1/\kappa} \leq x) \to$$
$$\to \exp(-c^{(1)}\theta_1 z_1^\kappa x^{-\kappa}) \cdot \ldots \cdot \exp(-c^{(l)}\theta_l z_l^\kappa x^{-\kappa}) = \exp(-(c^{(1)}\theta_1 z_1^\kappa + \ldots + c^{(l)}\theta_l z_l^\kappa)x^{-\kappa}) =$$
$$= \exp(-c(z)\theta(z)x^{-\kappa}), \quad n \to \infty.$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n(z)n^{-1/\kappa} \leq x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n^*(z)n^{-1/\kappa} \leq x).$$

Обозначим $u_n = xn^{1/\kappa}$. Заметим, что в силу определения $Y_n^*(z)$ и $Y_n(z)$ имеем $\mathrm{P}(M_n(z) \leq u_n) \geq \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n)$, тогда поскольку из события $\{M_n(z) \leq u_n\}$ следует событие $\{M_n^*(z) \leq u_n\}$, то

$$0 \leq \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n) - \mathrm{P}(M_n(z) \leq u_n) = \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n) - \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n, M_n(z) \leq u_n) =$$
$$= \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n, M_n(z) > u_n) \leq \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n, Y_k(z) > u_n) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(Y_k^*(z) \leq u_n, Y_k(z) > u_n) = n\mathrm{P}(Y_n^*(z) \leq u_n, Y_n(z) > u_n) \tag{5}$$

в силу стационарности последовательностей $Y_n^*(z)$ и $Y_n(z)$. Далее,

$$n\mathrm{P}(Y_n^*(z) \leq u_n, Y_n(z) > u_n) = n\mathrm{P}(Y_n(z) > u_n)\mathrm{P}(Y_n^*(z) \leq u_n | Y_n(z) > u_n).$$

Применим к $\xi_1 = z_1 Y_n^{(1)}$, $\ldots$, $\xi_l = z_l Y_n^{(l)}$ лемму 1, получим, что

$$\mathrm{P}\Big(\max(z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)})n^{-1/\kappa} \leq x \Big| (z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)})n^{-1/\kappa} > x\Big) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

или что

$$\mathrm{P}(Y_n^*(z)n^{-1/\kappa} \leq x | Y_n(z)n^{-1/\kappa} > x) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Поскольку $n\mathrm{P}(Y_n(z) > u_n) \to c(z)x^{-\kappa}$, $n \to \infty$, то из (5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{P}(M_n^*(z) \leq u_n) - \mathrm{P}(M_n(z) \leq u_n)) = 0.$$

Теорема доказана. □

На рис.1 представлены графики зависимости θ от z_1 при разных значениях κ: пунктиром для $\kappa = 1$, сплошной линией — для $\kappa = 2$ и штрихпунктиром — для $\kappa = 3$. При этом $l = 2$, $c^{(1)} = 1$, $c^{(2)} = 2$, $\theta_1 = 1/4$, $\theta_2 = 3/4$, $z_2 = 1 - z_1$.

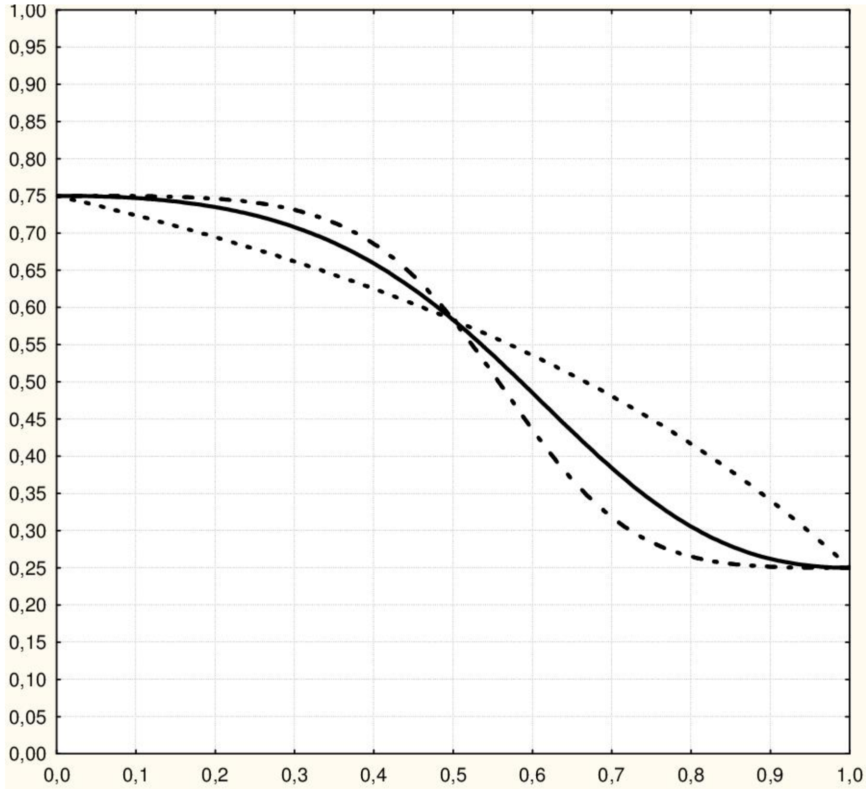

Рис. 1:

2.3. Экстремальный индекс при переходе к базису из собственных векторов. Пусть l-мерная последовательность $Y_n = (Y_n^{(1)}, \dots, Y_n^{(l)})$ удовлетворяет рекуррентному векторно-матричному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \ge 1, \quad Y_0 \ge 0, \tag{6}$$

где A_n — матрицы, B_n — векторы, $n \ge 1$, и пары (A_1, B_1), (A_2, B_2), …независимы и одинаково распределены. Предположим, что существует базис $\tilde{\mathcal{E}}$, в котором матрица A_1 имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \tilde{A}^{(l)} \end{pmatrix},$$

Пусть F — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\tilde{\mathcal{E}}$, пусть также

$$\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} \tilde{B}_n^{(1)} \\ \dots \\ \tilde{B}_n^{(l)} \end{pmatrix} = F^{-1} B_n, \qquad \tilde{Y}_n = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_n^{(1)} \\ \dots \\ \tilde{Y}_n^{(l)} \end{pmatrix} = F^{-1} Y_n, \text{ причем } \tilde{Y}_0^{(i)} \ge 0,$$

и пары $(\tilde{A}_n^{(i)}, \tilde{B}_n^{(i)})$, $n \ge 1$, $i = 1, \dots, l$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$ матричное уравнение (6) распадается на l одномерных уравнений

$$\tilde{Y}_n^{(i)} = \tilde{A}_n^{(i)} \tilde{Y}_{n-1}^{(i)} + \tilde{B}_n^{(i)}, \quad n \ge 1, \quad i = 1, \dots, l$$

и нахождение хвостового и экстремального индексов $\tilde{Y}_n$ сводится к аналогичной задаче для одномерного случая.

Рассмотрим последовательности $Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)}$ и $\tilde{Y}_n(z) = z_1 \tilde{Y}_n^{(1)} + \ldots + z_l \tilde{Y}_n^{(l)}$, $z_1, \ldots, z_l > 0$. Обозначим $\theta(z)$ и $\tilde{\theta}(z)$ — экстремальные индексы для последовательностей $Y_n(z)$ и $\tilde{Y}_n(z)$ соответственно. Покажем, что эти $\theta(z)$ выражается через $\tilde{\theta}(z)$.

Теорема 5. *Пусть все элементы матрицы F неотрицательны. Тогда $\theta(z) = \tilde{\theta}(\tilde{z})$, где $\tilde{z} = zF$, $z_i, \tilde{z}_i > 0$, $i = 1, \ldots, l$.*

Доказательство. Имеем

$$Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)} = (z_1 \ldots z_l) F \begin{pmatrix} \tilde{Y}_n^{(1)} \\ \ldots \\ \tilde{Y}_n^{(l)} \end{pmatrix} = (\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_l) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_n^{(1)} \\ \ldots \\ \tilde{Y}_n^{(l)} \end{pmatrix} = \tag{7}$$

$$= \tilde{z}_1 \tilde{Y}_n^{(1)} + \ldots + \tilde{z}_l \tilde{Y}_n^{(l)} = \tilde{Y}_n(\tilde{z}).$$

Поскольку F — матрица перехода от одного базиса к другому, то она не может содержать нулевых строк или столбцов, поэтому $f_{1i}^2 + \ldots + f_{li}^2 \neq 0$, $i = 1, \ldots, l$. Т.к. все элементы матрицы F неотрицательны и $z_1, \ldots, z_l > 0$, то и $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_l > 0$. Отсюда и из (7) следует, что экстремальные индексы последовательностей $Y_n(z)$ и $\tilde{Y}_n(\tilde{z})$ совпадают, т.е. $\theta(z) = \tilde{\theta}(\tilde{z})$. Теорема доказана. □

2.4. Наблюдения процесса с непрерывным временем.

Рассмотрим систему

$$dX_t = (C - DX_t)dt + SX_t dW_t, \quad X_0 = x, \tag{8}$$

где D, S — $l \times l$ матрицы, причем S — положительно определенная, C — l-вектор.

Теорема 6. *Пусть матрицы D и S перестановочны. Тогда система (8) имеет решение*

$$X_t = e^{SW_t - (D + \frac{1}{2} S^* S)t} \left(x + \int_0^t e^{-SW_u + (D + \frac{1}{2} S^* S)u} C \, du. \right).$$

Доказательство. Введем интегрирующий множитель $F_t = \exp(-SW_t + \frac{1}{2} S^* S t)$ и воспользуемся формулой $d(F_t X_t) = F_t dX_t + dF_t X_t + dX_t dF_t$, получим

$$d(F_t X_t) = F_t((C - DX_t)dt + SX_t dW_t) - SF_t X_t dW_t + F_t S^* S X_t dt +$$
$$+((C - DX_t)dt + SX_t dW_t)(-SF_t dW_t + F_t S^* S dt) = F_t(C - DX_t)dt.$$

Обозначим $Y_t = F_t X_t$, получим систему $dY_t = (-DY_t + F_t C)dt$ или

$$\frac{dY_t}{dt} = -DY_t + e^{-SW_t + \frac{1}{2} S^* S t} C. \tag{9}$$

Решим (9), считая ω параметром. Решением однородной системы является $Y_t^{\text{одн}} = e^{-Dt} \widetilde{C}$. Проварьируем постоянную, предположив, что $\widetilde{Y}(t) = e^{-Dt} \widetilde{C}(t)$ — решение неоднородной системы (9). Подставим в (9) выражение

$$d\widetilde{Y}(t) = -De^{-Dt} \widetilde{C}(t) dt + e^{-Dt} d\widetilde{C}(t),$$

получим

$$e^{-Dt} d\widetilde{C}(t) = e^{-SW_t + \frac{1}{2} S^* S t} C dt$$

или
$$d\widetilde{C}(t) = e^{Dt - SW_t + \frac{1}{2}S^*St} C dt,$$
отсюда
$$\widetilde{C}(t) = \int_0^t e^{Du - SW_u + \frac{1}{2}S^*Su} C\, du + \widetilde{C}(0).$$
Поскольку $\widetilde{Y}(0) = \widetilde{C}(0) = Y_0 = X_0$, то
$$Y_t = e^{-Dt}\left(x + \int_0^t e^{Du - SW_u + \frac{1}{2}S^*Su} C\, du\right).$$
Возвращаясь к $X_t = F_t^{-1} Y_t$, получаем требуемое решение. Теорема доказана. □

Обозначим аналогично одномерному случаю $A = -(D + \frac{1}{2}S^*S)$. Тогда исходная система приобретает вид
$$dX_t = (C + (A + \frac{1}{2}S^*S)X_t)dt + SX_t dW_t, \qquad X_0 = x, \tag{10}$$
а ее решение запишется в виде
$$X_t = e^{SW_t + At}\left(x + \int_0^t e^{-SW_u - Au} C\, du\right).$$

Далее будем предполагать, что A — отрицательно определенная матрица.

Теорема 7. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$, соответствующие матрицам A и S имеют общий базис $\tilde{\mathcal{E}}$ из собственных векторов, в котором их матрицы имеют вид*
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_l \end{pmatrix}, \quad a_1, \dots, a_l < 0, \qquad \tilde{S} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & s_2 \end{pmatrix} \quad s_1, \dots, s_l > 0.$$
Тогда процесс X_t представляется в виде $X_t = F\tilde{X}_t$, где F — матрица перехода от исходного базиса $\mathcal{E}$ к базису $\tilde{\mathcal{E}}$, а процесс $\tilde{X}_t$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению
$$d\tilde{X}_t = (\tilde{C} + (\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{S}^*\tilde{S})\tilde{X}_t)dt + \tilde{S}\tilde{X}_t dB_t,$$
причем $\tilde{X}_0 = F^{-1}X_0$, $\tilde{C} = F^{-1}C$.

Доказательство. Т.к. F — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\tilde{\mathcal{E}}$, то $\tilde{A} = F^{-1}AF$, $\tilde{S} = F^{-1}SF$, а значит $A = F\tilde{A}F^{-1}$, $S = F\tilde{S}F^{-1}$. Подставим эти выражения в (10). Поскольку $S^* = S$, получим
$$\begin{aligned} dX_t &= (C + (F\tilde{A}F^{-1} + \tfrac{1}{2}(F\tilde{S}F^{-1})(F\tilde{S}F^{-1}))X_t)dt + (F\tilde{S}F^{-1})X_t dB_t = \\ &= (C + F(\tilde{A} + \tfrac{1}{2}\tilde{S}\tilde{S})F^{-1}X_t)dt + F\tilde{S}F^{-1}X_t dB_t. \end{aligned}$$
Обозначим $\tilde{X}_t = F^{-1}X_t$, тогда $\tilde{X}_0 = F^{-1}X_0$, $X_t = F\tilde{X}_t$, $dX_t = Fd\tilde{X}_t$ и получаем
$$Fd\tilde{X}_t = (C + F(\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{S}\tilde{S})\tilde{X}_t)dt + F\tilde{S}\tilde{X}_t dB_t. \tag{11}$$
Умножив обе части (11) на F^{-1} слева, приходим к уравнению
$$d\tilde{X}_t = (F^{-1}C + (\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{S}\tilde{S})\tilde{X}_t)dt + \tilde{S}\tilde{X}_t dB_t.$$
Обозначив $\tilde{C} = F^{-1}C$ и учитывая, что $\tilde{S}^* = \tilde{S}$, получаем требуемое. Теорема доказана. □

Рассмотрим l-мерные последовательности $Y_n = X_{T_n}$, $\tilde{Y}_n = \tilde{X}_{T_n}$, $n \geq 1$, где $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, величины $\Delta_i \stackrel{d}{=} \Delta$, $i = 1, \ldots, n$, и независимы в совокупности, Δ — неотрицательная случайная величина, причем $\mathrm{E}\Delta^{-\frac{2a}{\sigma^2}+1}$. Тогда последовательность Y_n удовлетворяет системе

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1,$$

последовательность $\tilde{Y}_n$ — системе

$$\tilde{Y}_n = \tilde{A}_n \tilde{Y}_{n-1} + \tilde{B}_n, \quad n \geq 1,$$

причем матрицы $\tilde{A}_n \stackrel{d}{=} \exp\{\tilde{S}\sqrt{\Delta}\xi + \tilde{A}\Delta\}$, $\xi \sim N(0;1)$, а пары $(\tilde{A}_n^{(i)}, \tilde{B}_n^{(i)})$, $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, l$, удовлетворяют условиям теоремы 1. Заметим, что если также потребовать выполнения условия $\tilde{X}_0 = F^{-1}X_0 \geq 0$, то отсюда следует, что $\tilde{Y}_0 \geq 0$, а следовательно, $Y_0 \geq 0$.

Пусть κ_i и θ_i — соответственно хвостовой и экстремальный индексы последовательностей $\tilde{Y}_n^{(i)}$. Тогда по теореме 2 $\kappa_i = -2a_i/s_i^2$, $i = 1, \ldots, l$.

Теорема 8. *Пусть 1) все элементы матрицы F перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\tilde{\mathcal{E}}$ неотрицательны; 2) $\tilde{X}_0 = F^{-1}X_0 \geq 0$, 3) среди $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$ есть наименьший. Тогда $\theta(z) = \theta_m$, где $m = \mathrm{argmin}(\kappa_1, \ldots, \kappa_l)$.*

Доказательство. По теореме 5 $X_t = F\tilde{X}_t$, где $\tilde{X}_t$ удовлетворяет (10). Тогда $Y_n = F\tilde{Y}_n$, $n \geq 1$. Из теоремы 5 получаем, что $\theta(z) = \tilde{\theta}(\tilde{z})$. Из теоремы 3 следует, что $\theta(z) = \theta_m$, где $m = \mathrm{argmin}(\kappa_1, \ldots, \kappa_l)$. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[2] *Vervaat W.*, On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables // Adv. Appl. Probab., 1979, v. 11, №4, p. 750–783.

[3] *de Haan L., Resnick S., Rootzén H., de Vries G.*, Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes // Stochast. Process. and Appl., 1989, v. 32, №1, p. 213–224.

[4] *Голдаева А.А.*, Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2010, №6, с. 13-18.

[5] *Kesten H.*, Random difference equations and renewal theory for products of random matrices // Acta Math., 1973, v. 131, №1, p. 207–248.

[6] *Klüppelberg C., Pergamenchtchikov S.*, Extremal behaviour of models with multivariate random recurrence representation // Stochast. Process. and Appl., 2007, v. 117, №4, p. 432–456.

[7] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1, 2. М.: Мир, 1964.

Оптимальные инвестиции в модели с возможностью дополнительного вливания капитала

Громов А.Н.[1]

В работе исследуется модель работы страховой компании в дискретном времени. Предполагается, что, если капитал компании по итогам года опустился ниже некоторого фиксированного уровня, происходит дополнительное вливание средств в компанию. Для минимизации этих вливаний страховщик вкладывает средства в рыночный актив, причем размер инвестиций каждый год определяется исходя из истории убытков. Ставится задача минимизации дисконтированных вливаний капитала путем выбора подходящей *стратегии инвестирования.* В работе доказано, что минимальный размер дополнительных вливаний удовлетворяет уравнению типа Беллмана, а оптимальный размер инвестиций определяется единственным непрерывно-дифференцируемым решением интегрального уравнения. Приводится численный пример для случая убытков, имеющих показательное распределение.

Пусть страховая компания работает $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ лет. Обозначим через c годовую страховую премию, а через Y_k, $k = 1, \ldots$ — совокупный годовой убыток страховой компании. Предполагаем, что неотрицательные случайные величины (с.в.) $Y_1, Y_2, \ldots,$ — независимы и одинаково распределены (н.о.р.) с абсолютно непрерывной функцией распределения $Q(y)$ и плотностью $q(y)$. Пусть последовательность н.о.р. с.в. $Z_1, Z_2, \ldots$ определяет результат вложения средств в рыночный актив, т.е., если в $(k-1)$-ый момент времени была вложена одна денежная единица, то в k-ый момент мы получим $(1 + Z_k)$ денежных единиц. Мы считаем, что $P(Z_k \geq 0) \in (0, 1)$ и $EZ_1 > 0$. Предполагается, что с.в. $Z_1, Z_2, \ldots$ независимы от $Y_1, Y_2 \ldots$ и имеют функцию распределения $H(z)$. В каждый момент времени k принимается решение о размере A_k денежных средств, инвестируемых в рыночный актив в $(k+1)$-ом году. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}^Y$ — естественная фильтрация, порожденная последовательностью (Y_k). Дадим следующее

Определение 1. *Стратегия инвестирования* — это предсказуемая относительно фильтрации $\mathcal{F}$ последовательность с.в. $(A_0, A_1, \ldots)$. Стратегия $(A_0, A_1, \ldots)$ *допустимая*, если $A_k \geq 0$ п.н. для всякого $k \geq 0$.

Кроме того, владелец страховой компании вкладывает дополнительные средства в компанию, как только капитал компании опускается ниже некоторого задданного уровня $L \geq 0$. Размер этих вложений в k-ом году обозначим J_k. Такая модификация стандартной

[1]Громов Александр Николаевич, gromovaleksandr@gmail.com, аспирант, кафедра теории вероятности, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

модели была впервые предложена в [1]. Капитал компании R_k^A на конец k-го года при использовании допустимой стратегии A равен

$$R_k^A = R_{k-1}^A + c + A_{k-1}Z_k - Y_k + J_k^A,\ R_0^A = s,\ k = 1, \ldots, n,$$

где $s \geq 0$ — начальный капитал. При этом размер дополнительных вложений J_k^A в k-ом году равен

$$J_k^A = \max\{0, L - R_{k-1}^A - c - A_{k-1}Z_k + Y_k\}.$$

Если v — коэффициент дисконтирования, то суммарый приведенный объем дополнительных вложений капитала равен

$$W_n^A(s) := E(\sum_{i=1}^{n} v^{i-1} J_i^A | R_0^A = s).$$

Задача состоит в минимизации величины $W_n^A(s)$ по всем допустимым стратегиям A:

$$W_n(s) := \inf_{A \in \mathbb{A}} W_n^A(s). \tag{1}$$

Будем говорить, что допустимая стратегия A^* *оптимальна*, если она доставляет инфимум в правой части (1).

По аналогии с [3] устанавливаем, что $W_n(s)$ удовлетворяет уравнению динамического программирования. Справедлива

Лемма 1. *Функция $W_n(s)$ для всякого $n \geq 0$ удовлетворяет следующему уравнению динамического программирования*

1) при $n < \infty$

$$W_n(s) = \inf_{\alpha \geq 0}\{E\max(0, L-s-c-\alpha Z_1+Y_1)+vEW_{n-1}(\max(L, s+c+\alpha Z_1-Y_1)\},\ W_0(s) = 0; \tag{2}$$

2) при $n = \infty$

$$W(s) = \inf_{\alpha \geq 0}\{E\max(0, L - s - c - \alpha Z_1 + Y_1) + vEW(\max(L, s + c + \alpha Z_1 - Y_1)\}. \tag{3}$$

При этом, оптимальная стратегия определяется функцией, при каждом s доставляющей инфимум по $\alpha \in \mathcal{A}$ в правой части (2) или (3). А именно, справедлива следующая

Лемма 2. *1) Пусть для любого $k = 1, \ldots, n$ существует $\alpha_k^*(s)$ — измеримая функция, доставляющая инфимум в уравнении (2) для $n = k$. Тогда допустимая стратегия $A^* = (A_0^*, \ldots, A_{n-1}^*)$ инвестирования в n-шаговой модели, где $A_i^* = \alpha_{n-i}^*(R_i^{A^*})$, $i = 0, \ldots, n-1$, оптимальна.*
2) Пусть для всех $s \geq 0$ инфимум в уравнении (3) достигается в точке $\alpha^*(s)$. Тогда стратегия $A^* = \{A_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, где $A_n^* := \alpha^*(R_n^{A^*})$, оптимальна.

Доказательство данного утверждения аналогично приведенному в [2] для модели с дивидендами.

1 Оптимальное инвестирование в одношаговой модели

Далее мы покажем, что существует не только измеримая, но и единственная непрерывно-дифференцируемая функция $\alpha_n^*(s)$, доставляющая инфимум в уравнении Беллмана. Сначала рассмотрим случай $n = 1$. Тогда уравнение (2) принимает следующий вид

$$W_1(s) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y).$$

Введем обозначение $\gamma_1(s, \alpha) := E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y)$. Справедлива следующая

Теорема 1. *1) Функция $W_1(s) \in C^2[0, \infty)$. Кроме того, для всех $s \geq 0$ справедливы неравенства $-1 \leq W_1'(s) \leq 0$ и $W_1''(s) \geq 0$.*
2) Оптимальный размер инвестиций в одношаговой модели равен $\alpha^*(s)$, где $\alpha^*(s)$ — единственный корень уравнения

$$E[Z(Q(s + c + \alpha Z - L) - 1)] = 0.$$

Доказательство. Вычислим первую и вторую производную $\gamma_1(s, \alpha)$ по α. Имеем

$$\gamma_1(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma_1(s,\alpha) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z(1-Q(s+c+\alpha z-L)dH(z) = -E[Z(1-Q(s+c+\alpha Z-L))].$$

Вторая производная равна

$$\gamma_1(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\gamma_1(s,\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 q(s+c+\alpha z - L))dH(z) = E[Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)]. \quad (4)$$

Заметим сразу, что поскольку $q(y) \geq 0$, то $\gamma_1(s, \alpha)_{\alpha\alpha} \geq 0$, иными словами, $\gamma_1(s, \alpha)_\alpha$ не убывает по α. Далее, $\gamma_1(s, 0)_\alpha = -[EZ](1 - Q(s + c - L)) < 0$, поскольку по условию $EZ > 0$. Найдем $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \gamma_1(s, \alpha)_\alpha$. При $\alpha > 0$ имеем

$$\gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{\frac{L-s-c}{\alpha}} z dH(z) - \int\limits_{\frac{L-s-c}{\alpha}}^{+\infty} z(1 - Q(s+c+\alpha z - L))dH(z).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha \to \infty} \gamma_1(s,\alpha)_\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{0} z dH(z) > 0 = \int\limits_{-\infty}^{0} H(z)dz > 0,$$

поскольку $P(Z_1 < 0) > 0$ по условию. Таким образом, непрерывная неубывающая по α функция $\gamma_1(s, \alpha)_\alpha$ такова, что $\gamma_1(s, 0)_\alpha < 0$, а $\gamma_1(s, +\infty) > 0$. Значит, уравнение $\gamma_1(s, \alpha)_\alpha = EZ(1 - Q(s + c + \alpha Z - L) = 0$ имеет единственное решение при $\alpha \geq 0$. Обозначим это решение $\alpha^*(s)$. Кроме того, из доказанных свойств производной следует, что сама функция $\gamma_1(s, \alpha)$ имеет минимум в этой точке. Пункт 2) теоремы доказан.

Далее, найдем производные $\gamma_1(s, \alpha)$ по s. Имеем

$$\gamma_1(s,\alpha)_s := \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s,\alpha) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 - Q(s+c+\alpha z - L))dH(z) = EQ(s+c+\alpha Z - L) - 1, \quad (5)$$

$$\gamma_1(s,\alpha)_{ss} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma_1(s,\alpha) = Eq(s+c+\alpha Z - L). \tag{6}$$

Заметим, что $\gamma_1(s,\alpha)_s \le 0$, а $\gamma_1(s,\alpha)_{ss} \ge 0$ при $s \ge 0$. Далее,

$$W_1'(s) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s,\alpha^*(s)) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma_1(s,\alpha^*(s))\frac{d\alpha^*(s)}{ds} = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_1(s,\alpha^*(s)),$$

т.к. $\frac{\partial d}{\partial \alpha}\gamma_1(s,\alpha^*(s)) = \gamma_1(s,\alpha^*(s))_\alpha = 0$ по определению $\alpha^*(s)$. При этом, из (5) следует, что $\gamma_1(s,\alpha)_s \in [-1,0]$. Значит, $W_1'(s) \in [-1,0]$. Найдем $W_1''(s)$:

$$W_1''(s) = \frac{d}{ds}\gamma_1(s,\alpha^*(s))_s = \gamma_1(s,\alpha^*(s))_{ss} + \gamma_1(s,\alpha^*(s))_{s\alpha}\frac{d\alpha^*(s)}{ds},$$

где $\gamma_1(s,\alpha)_{s\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial s \partial \alpha}\gamma_1(s,\alpha)$. По теореме о неявной функции

$$\frac{d\alpha^*(s)}{ds} = -\frac{\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{\alpha s}}{\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{\alpha\alpha}}.$$

С учетом (4)–(6), находим:

$$W_1''(s) = \frac{\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{ss}\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{\alpha\alpha} - (\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{s\alpha})^2}{\gamma_1(s,\alpha^*(s))_{\alpha\alpha}} =$$

$$= \frac{Eq(s+c+\alpha^*(s)Z-L)E[Z^2q(s+c+\alpha Z-L)] - [EZq(s+c+\alpha^*(s)Z-L)]^2}{E[Z^2q(s+c+\alpha Z-L)]} \ge 0,$$

так как по неравенству Гельдера числитель неотрицателен. Теорема 1 доказана. □

2 Оптимальное инвестирование в многошаговой модели

Пусть теперь $n < \infty$ — произвольное. Уравнение Беллмана имеет вид (2). Рассмотрим

$$\begin{aligned}\gamma_n(s,\alpha) := E\max(0, L-s-c-\alpha Z+Y) + vEW_{n-1}(\max(L, s+c+\alpha Z - Y) = \\ = \gamma_1(s,\alpha) + vEW_{n-1}(\max(L, s+c+\alpha Z-Y))\}.\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\gamma_n(s,\alpha)_s := \frac{\partial}{\partial s}\gamma_n(s,\alpha), \quad \gamma_n(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma_n(s,\alpha),$$
$$\gamma_n(s,\alpha)_{ss} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma_n(s,\alpha), \quad \gamma_n(s,\alpha)_{s\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial s\partial\alpha}\gamma_n(s,\alpha), \quad \gamma_n(s,\alpha)_{\alpha\alpha} := \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\gamma_n(s,\alpha).$$

Теорема 2. *1) Функция $W_n(s) \in C^2[0,\infty)$. Кроме того, для всех $s \ge 0$ справедливы следующие неравенства: $-1 \le W_n'(s) \le 0$ и $W_n''(s) \ge 0$.*
2) Оптимальный объем инвестиций $\alpha^*(s)$ на первом шаге n-шагового процесса определяется как единственное решение уравнения

$$E[Z(Q(s+c+\alpha Z-L)-1) + vW_n'(s+c+\alpha Z - Y)] = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства утверждения вычислим первые частные производные функции $\gamma_n(s,\alpha)$, учитывая результаты теоремы 1:

$$\gamma_n(s,\alpha)_s = EQ(s+c+\alpha Z - L) - 1 + vEW'_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y);$$
$$\gamma_n(s,\alpha)_\alpha = EZ(Q(s+c+\alpha Z - L) - 1) + vE(ZW'_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y));$$

Аналогично вычислим вторые частные производные и введем дополнительные обозначения для их компонент:

$$\gamma_n(s,\alpha)_{ss} = \underbrace{Eq(s+c+\alpha Z - L)(1+vW'_{n-1}(L))}_{=:D^1_{ss}} + \underbrace{vEW''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y)}_{=:D^2_{ss}};$$
$$\gamma_n(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = \underbrace{E[Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)(1+vW'_{n-1}(L))]}_{=:D^1_{\alpha\alpha}} + \underbrace{vE(Z^2 W''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y))}_{=:D^2_{\alpha\alpha}};$$
$$\gamma_n(s,\alpha)_{s\alpha} = \underbrace{E[Z(s+c+\alpha Z - L)(1+vW'_{n-1}(L))]}_{=:D^1_{s\alpha}} + \underbrace{vE(ZW''_{n-1}(s+c+\alpha Z - Y))}_{=:D^2_{s\alpha}}.$$

Установим пункт 1) теоремы по индукции. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы 1. Пусть для $n = k$ утверждение верно, т.е. $W'_k(s) \in [-1, 0]$, $W''_k(s) \geq 0$. Докажем для $n = k+1$. Сначала заметим, что $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_{\alpha\alpha} \geq 0$ при фиксированном s для всех $\alpha \geq 0$. Действительно, поскольку по предположению индукции $W''_k(s) \geq 0$, находим, что

$$\gamma_{k+1}(s,\alpha)_{\alpha\alpha} \geq E[Z^2 q(s+c+\alpha Z - L)(1+vW'_k(L))] \geq 0, \text{ т.к. } W'_k(s) \geq -1,\ W''_k(s) \geq 0.$$

А значит, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha$ не убывает как функция от $\alpha \geq 0$. При этом,

$$\gamma_{k+1}(s,0)_\alpha = (Q(s+c-L)-1)EZ + vEW'_k(s+c-Y)EZ \leq (Q(s+c-L)-1)EZ < 0,$$

поскольку $EZ > 0$ по условию. Покажем, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha > 0$. Действительно, учитывая, что $W'_k(s) \geq -1$, получаем

$$vEZW'_k(s+c+\alpha Z - Y) \geq -v\gamma_1(s,\alpha)_\alpha - v\int\limits_{-\infty}^{(L-s-c)/\alpha} z\,dH(z).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty} \gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha \geq (1-v)\lim_{\alpha\to\infty}\gamma_1(s,\alpha)_\alpha + v\int\limits_{-\infty}^{0} H(z)dz > 0,$$

поскольку $v \in (0,1)$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\gamma_1(s,\alpha)_\alpha \geq 0$, а $H(z) > 0$ при $z < 0$ по условию. Следовательно, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha$ не убывает и принимает отрицательное значение при $\alpha = 0$ и положительное при $\alpha \to \infty$. Значит, существует единственное решение $\alpha^*(s)$ уравнения $\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha = 0$. Кроме того, функция $\gamma_{k+1}(s,\alpha)$ убывает по α при $\alpha \in [0, \alpha^*(s)]$ и возрастает при $\alpha > \alpha^*(s)$, следовательно, в точке $\alpha^*(s)$ достигается минимум функции $\gamma_{k+1}(s,\alpha)$. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано. Далее, $W'_{k+1}(s) = \gamma_{k+1}(s,\alpha^*(s))_s \in [-1, 0]$, поскольку

$$0 \geq \gamma_(s,\alpha^*(s))_s \geq EQ(s+c+\alpha^*(s)Z - L) - 1 - 1 \geq -1.$$

По теореме о неявной функции, имеем

$$\frac{d}{ds}\alpha^*(s) = -\left.\frac{\frac{d}{ds}\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha}{\frac{d}{d\alpha}\gamma_{k+1}(s,\alpha)_\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*(s)}.$$

Тогда

$$W''_{k+1}(s) = \frac{(D^1_{ss}+D^2_{ss})(D^1_{\alpha\alpha}+D^2_{\alpha\alpha}) - (D^1_{\alpha s}+D^2_{\alpha s})^2}{\gamma_{k+1}(s,\alpha^*(s))_{\alpha\alpha}}. \tag{8}$$

Оценим числитель, используя неравенство Гельдера. Например:

$$D^1_{ss}D^1_{\alpha\alpha} = E[q(s+c+\alpha^*(s)Z-L)(1+vW'_k(L))]\times E[Z^2q(s+c+\alpha^*(s)Z-L)(1+vW'_k(L))] \geq$$
$$\geq E[Zq(s+c+\alpha^*(s)Z-L)(1+vW'_k(L))]^2 = (D^1_{\alpha s})^2.$$

Аналогично поступим с остальными парными произведениями в числителе (8) и получим, что

$$(D^1_{ss}+D^2_{ss})(D^1_{\alpha\alpha}+D^2_{\alpha\alpha}) \geq (D^1_{\alpha s}+D^2_{\alpha s})^2.$$

Значит, $W''_{k+1}(s) \geq 0$ и теорема 2 доказана. □

3 Оптимальное инвестирование в случае бесконечного горизонта планирования

Перейдем к случаю $n=\infty$ и уравнению (3). Заметим, что функция $W(s)$ ограничена сверху. Действительно, рассмотрим "нулевую"стратегию $A^0 = \{A^0_k = 0\}_{k=0}^\infty$. Тогда (здесь $E_s[\cdot] := E[\cdot|R^A_0 = s]$)

$$W(s) \leq W^{A^0}(s) = E_s\sum_{k=1}^\infty v^{k-1}\max(0, L-s-kc+\sum_{i=1}^k Y_i) \leq \frac{|L-s|}{1-v} + v\frac{(c-EY)}{(1-v)^2}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Существует единственное решение* $W(s)$ *уравнения* (3)*. Кроме того,* $W(s) \in C^2[0,\infty)$*, а инфимум в правой части* (3) *достигается в точке* α^**, где* α^* *— это единственный корень уравнения*

$$E[Z(Q(s+c+\alpha Z-L)-1) + vW'(s+c+\alpha Z-Y)] = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $W_k(s)$, $k \geq 0$, определенных по правилу

$$W_{k+1}(s) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y)+vEW_k(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\},\ W_0(s)=0. \tag{10}$$

В предыдущем параграфе установлено, что $W'_k(s) \leq 0$ для любого $k \geq 0$, то есть $\{W_k\}$ — последовательность невозрастающих функций. Покажем еще, что $W_{k+1}(s) \geq W_k(s)$ для всех $s \geq 0$. Действительно, для $k=0$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для k и пусть $\alpha^*_{k+1}(s)$ — точка, в которой достигается инфимум в выражении (10) для функции $W_{k+1}(s)$ ($\alpha^*_{k+1}(s)$ существует по теореме 2). Тогда

$$W_{k+1}(s) = E\max(0,L-s-c-\alpha^*_{k+1}(s)Z+Y) + vEW_k(\max(L,s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-Y) \geq$$
$$\geq E\max(0,L-s-c-\alpha^*_{k+1}(s)Z+Y) + vEW_{k-1}(\max(L,s+c+\alpha^*_{k+1}(s)Z-Y) \geq$$
$$\geq \inf_{\alpha\geq 0}\{E\max(0,L-s-c-\alpha Z+Y) + vEW_{k-1}(\max(L,s+c+\alpha Z-Y)\} = W_k(s).$$

Кроме того, поскольку $W_k(s) \le W(s)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то согласно (9) все $W_k(s)$ ограничены сверху. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} W_k(s) = W(s)$. Далее, поскольку последовательность $\{W_k(s)\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает по k и ограничена сверху, то по теореме о монотонной сходимости

$$W(s) = \lim_{k\to\infty} W_{k+1}(s) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \{E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW(\max(L, s + c + \alpha Z - Y)\}.$$

И значит $W(s)$ — искомое решение уравнения (3). Согласно теореме 2 все $W_k(s) \in C^2[0,\infty)$. Кроме того, $W_k'(s) \in [-1, 0]$ и $W_k''(s) \ge 0$. Таким образом, $\{W_k'(s)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность неубывающих функций, ограниченная сверху нулем. Следовательно, существует предельная функция $\lim\limits_{k\to\infty} W_k'(s) =: V(s)$. Но поскольку, $\lim\limits_{k\to\infty} W_k(s) = W(s)$, то $W(s)$ — диффференцируема и $V(s) = W'(s)$ и $W'(s) \in [-1, 0]$. Обозначим

$$\gamma(s,\alpha) = E\max(0, L - s - c - \alpha Z + Y) + vEW'(\max(L, s + c + \alpha Z - Y))$$

и найдем производную по α:

$$\gamma(s,\alpha)_\alpha := \frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma(s,\alpha) = EZ(Q(s + c + \alpha Z - L) - 1) + E[ZW'(s + c + \alpha Z - L)].$$

Аналогично теореме 2 устанавливаем, что при $\gamma(s,0)_\alpha < 0$, а $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\gamma(s,\alpha)_\alpha > 0$. Кроме того, вторая производная $\gamma(s,\alpha)_{\alpha\alpha}$ неотрицательна:

$$\gamma(s,\alpha)_{\alpha\alpha} = E[Z^2 q(s + c + \alpha Z - L)(1 + vW'(L))] + vE[Z^2 W''(s + c + \alpha Z - Y)] \ge 0,$$

поскольку $W'(s) \in [-1, 0]$, $W''(s) \ge 0$. Значит, как и в случае с конечным временем, существует ровно одно решение $\alpha^*(s)$ уравнение $\gamma(s,\alpha)_\alpha = 0$ и в нем достигается инфимум в правой части (3).

□

s	W(s)	V(s)
0	0,140035	2,385812
1	0,097310	0,877692
2	0,059183	0,322885
3	0,028811	0,118782
4	0,011819	0,043698
5	0,004506	0,016076
6	0,001676	0,005914
7	0,000614	0,002176
8	0,000227	0,000800
9	0,000083	0,000294
10	0,000032	0,000108

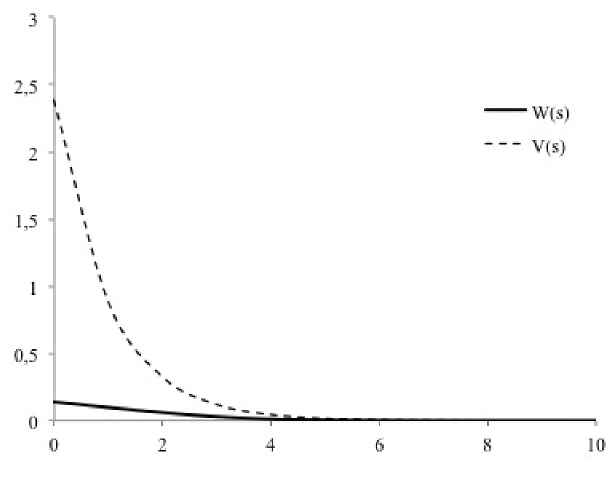

Рис. 1: Значения $W(s)$ и $V(s)$ для различных s.

4 Численный пример

Рассмотрим частный случай одношаговой модели. Пусть совокупный годовой убыток $Y \sim \exp(1/\lambda)$, а размер страховой премии вычисляется по принципу среднего с нагрузкой безопасности $\theta > 0$, т.е. $c = (1+\theta)\lambda$. Предположим также, что годовая доходность Z актива, в который страховщик вкладывает средства, имеет нормальное распределение $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$. Пусть $W(s) := W_1(s) = \min\limits_{\alpha \geq 0} E \max(0, L - s - c - \alpha Z + Y)$ — минимальное дополнительное вливание капитала в конце первого года. Обозначим $V(s) := E \max(0, L - s - c + Y)$ — величину вливаемого капитала при отсутствии инвестиций. Рассмотрим следующие значения параметров: $\lambda = 1$, $\theta = 0,1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0,5$. В таблице на рис. 1 приведены значения функций $W(s)$ и $V(s)$ при различных значениях начального капитала s и при $L = 2$. На рис. 1 также приведены графики этих функций. Все расчеты выполнены с помощью приложения Wolfram Mathematica 8 с точностью до 10^{-5}. Как нетрудно видеть, обе функции убывают, причем для начального капитала $0 \leq s < 4$, функция $V(s)$ существенно больше $W(s)$.

s	L=0	L=1	L=2
0	5,534770	7,711450	11,042100
1	4,537630	5,534770	7,711450
2	4,175100	4,537630	5,534770
3	4,052300	4,175010	4,537630
4	4,013630	4,052300	4,175010
5	4,002950	4,013630	4,052300
6	4,000510	4,002950	4,016300
7	4,000070	4,000510	4,002950
8	4,000100	4,000700	4,000510
9	4,000000	4,000100	4,000070
10	4,000000	4,000000	4,000010

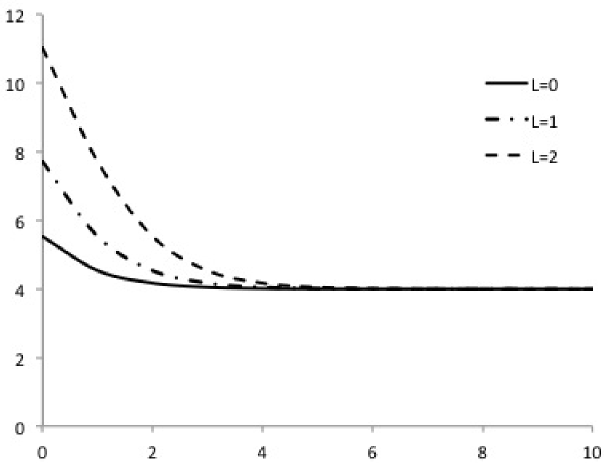

Рис. 2: Значения $\alpha^*(s)$ для различных L.

На рис. 2 приводится численное приближение оптимального уровня инвестиций $\alpha^*(s)$ для $s \in [0, 10]$ и для различных значений параметра L. Заметим, что в данном случае видно, что функция $\alpha^*(s)$ не возрастает и увеличивается с ростом L.

Автор приносит благодарность профессору Булинской Е.В. за постановку задачи и помощь в реализации идей.

Список литературы

[1] *Dickson D.C.M.,Waters H.R.*, Some optimal dividend problems //Astin Bulletin, 2004, vol. 34, c. 49–74.

[2] *Schmidli H.*, Stochastic Control in Insurance // Springer–Verlag, London, 2008.

[3] *Wua H.,Guoa J.,Tang L.*, Optimal dividend strategies in discrete risk model with capital injections //Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 2011, vol. 27, c. 557–566.

О верхней цене хеджирования неотрицательных платежных обязательств[1]

Гущин А.А.[2]

Рассматривается абстрактная модель рынка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \mathcal{A}(x))$, где $\mathcal{A}(x) = x\mathcal{A}$, $x \geqslant 0$, — множество терминальных капиталов инвестора, отвечающих стратегиям с начальным капиталом x. Основные результаты статьи дают необходимые и достаточные условия для представимости верхней цены хеджирования $\pi(B)$ неотрицательного платежного обязательства B в виде функционала $\sup_{\eta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\eta B$, где $\mathcal{D}$ — множество неотрицательных (или строго положительных) случайных величин или же вероятностных плотностей.

1 Введение

Во введении мы раскрываем мотивацию данной работы, и его чтение требует знания соответствующей терминологии из финансовой математики, которую мы не можем объяснить из-за ограниченности объема статьи. Интересующегося читателя мы отсылаем к монографиям [6] и [17]. Содержательная математическая часть работы начинается со следующего раздела и не требует понимания финансовой терминологии.

Важную часть теории неполных рынков составляют теоремы о суперхеджировании европейских платежных обязательств, предметом которых является двойственное описание верхней цены хеджирования. Обычно они рассматриваются в динамической модели рынка, когда на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы фильтрация (с дискретным или непрерывным временем, конечным или бесконечным временным горизонтом T, совпадающим с датой исполнения обязательства) и согласованные с фильтрацией процессы цен основных активов. Все цены в дальнейшем предполагаются дисконтированными. Мы ориентируемся на модели без операционных издержек, отсылая читателя, интересующегося задачей о верхней цене хеджирования в моделях с издержками, к обзору [12].

Пусть теперь задан класс допустимых самофинансируемых стратегий инвестора (здесь в понятие стратегии включается начальный капитал инвестора) и каждой стратегии отвечает соответствующий процесс капитала. Пусть также задано платежное обязательство B — пока просто $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина, на которую в разных ситуациях могут

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00949.

[2]Гущин Александр Александрович, gushchin@mi.ras.ru, ведущий научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

налагаться условия неотрицательности, ограниченности, интегрируемости в каком-либо смысле и т.п. В неполной модели рынка не каждая (хотя бы ограниченная) случайная величина B допускает репликацию; иными словами, не всегда найдется стратегия с терминальным капиталом (т.е. значением процесса капитала в момент T), в точности равным B. Поэтому естественно возникает понятие суперхеджирующей стратегии как такой самофинансируемой стратегии, терминальный капитал которой больше или равен B. Нижняя грань начальных капиталов этих стратегий называется верхней ценой хеджирования.

Типичным примером теоремы о суперхеджировании в рассматриваемых моделях является утверждение о том, что верхняя цена хеджирования $\pi(B)$ платежного обязательства B удовлетворяет соотношению

$$\pi(B) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}_e} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} B, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по множеству всех мартингальных (или локально мартингальных, или σ-мартингальных, или супермартингальных) мер Q, эквивалентных P. Разумеется, при этом предполагается, что отсутствуют арбитражные возможности в том или ином смысле.

Первая теорема суперхеджирования в моделях неполного рынка с непрерывным временем была получена Эль Каруи и Кенез [18, 19] в диффузионной модели на основе опционального разложения. Более общие версии опционального разложения были получены Крамковым [26], Фёльмером и Крамковым [21], Фёльмером и Кабановым [20], Стрикером и Яном [33], Делбаеном и Шахермайером [16]. Отдельно выделим работу Фёльмера и Крамкова [21], в которой опциональное разложение доказывалось при выпуклых ограничениях на класс допустимых стратегий и, в частности, доказывалась формула для верхней цены хеджирования. Не вдаваясь в детали, отметим лишь, что конические ограничения типа запрета на короткую продажу все еще сохраняют структуру формулы (1), тогда как при общих выпуклых ограничениях формула для $\pi(B)$ уже имеет другой вид.

Теоремы об опциональном разложении — это очень глубокие результаты из стохастического анализа и позволяют найти верхнюю цену хеджирования не только европейских, но и американских платежных обязательств, а также охарактеризовать динамику минимального суперхеджирующего портфеля. Другой путь доказательства теорем о суперхеджировании, основанный на теореме Хана–Банаха и значительно более простой, предложили Делбаен и Шахермайер в работах [13]–[15].

Упомянем еще работы [10], [28, 29], [7], где наряду с [15] рассматривалось хеджирование неограниченных снизу платежных обязательств неограниченными снизу процессами капитала. Отдельно выделим работу Рохлина [5], где рассматривалась задача о верхней цене хеджирования в более общей динамической модели рынка, а именно: дано множество процессов капитала, удовлетворяющее ряду аксиом, а процессы цен отдельных активов не вводятся. Схожая проблематика рассматривается в недавней работе Кардараса [25].

Настоящая работа имеет целью рассмотреть вопрос о необходимых условиях для существования представления типа (1). А именно, мы рассматриваем следующие вопросы: при каких условиях на множества терминальных капиталов для достаточно широкого класса платежных обязательств B верхняя цена $\pi(B)$ представима в виде функционала $\rho(B) := \sup_{\eta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\eta B$

(I) с каким-нибудь множеством $\mathcal{D}$ неотрицательных случайных величин;

(II) с каким-нибудь множеством $\mathcal{D}$ строго положительных случайных величин;

(III) с множеством $\mathcal{D}$ случайных величин вида $\psi d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}$, где $\psi > 0$ фиксирована, а Q пробегает некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно P;

(IV) с множеством $\mathcal{D}$ случайных величин вида $\psi d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}$, где $\psi > 0$ фиксирована, а Q пробегает некоторое множество вероятностных мер, эквивалентных P?

Ответы на эти вопросы зависят только от множеств $\mathcal{A}(x)$ терминальных капиталов, отвечающих всевозможным стратегиям инвестора с заданным начальным капиталом x, и не требует рассмотрения динамической модели. Существенно для применяемых методов, что рассматриваются только неотрицательные платежные обязательства B. Чтобы не усложнять изложение, мы предполагаем с самого начала, что $\mathcal{A}(x) = x\mathcal{A}(1)$, $x \geqslant 0$, что согласуется с положительной однородностью функционала ρ.

Основные результаты статьи приведены в следующем разделе. В разделе 3 обсуждается связь рассматриваемой задачи с задачей максимизации полезности. В заключительном разделе собраны доказательства.

2 Основные результаты

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Обозначим через L^0 пространство классов эквивалентности P-п.н. равных между собой случайных величин (с действительными значениями). Следуя обычной практике, мы говорим о случайных величинах, но подразумеваем классы эквивалентности, которые они порождают. В частности, мы опускаем слова P-п.н. в неравенствах между случайными величинами. Пространство L^0 предполагается снабженным топологией сходимости по вероятности. Если не оговорено противное, $\overline{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U} \subseteq L^0$, обозначает замыкание $\mathcal{U}$ в этой топологии, а $\operatorname{co}\mathcal{U}$ и $\overline{\operatorname{co}}\,\mathcal{U}$ — выпуклую оболочку и выпуклое замыкание (т.е. замыкание выпуклой оболочки) $\mathcal{U}$ соответственно. Конус из неотрицательных случайных величин обозначается L^0_+. Множество $\mathcal{U} \subseteq L^0_+$ будем называть телесным (solid), если $0 \leqslant \zeta \leqslant \eta \in \mathcal{U}$ влечет $\zeta \in \mathcal{U}$.

Считаются заданными множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ из L^0_+ и положительная случайная величина $\psi > 0$, которую можно интерпретировать как новую единицу измерения капитала. Множество $\mathcal{A} = \mathcal{A}(1)$ интерпретируется как множество терминальных значений капитала, отвечающих всем стратегиям с начальным капиталом 1. Если начальный капитал равен $x \geqslant 0$, то множество терминальных значений капитала $\mathcal{A}(x)$, отвечающих всем таким стратегиям, предполагается равным $x\mathcal{A}$. Это предположение автоматически выполнено, если $\mathcal{A}(x) = \big(\mathcal{K} - L^0_+\big) \cap L^0_+$, где $\mathcal{K}$ — выпуклый конус. Заметим, что выпуклость $\mathcal{A}$ в этом разделе не предполагается. Несмотря на естественность этого предположения, мы не делаем его, так как оно не упрощает существо дела. Множество $\mathcal{B}$ интерпретируется как множество рассматриваемых платежных обязательств. На протяжении всего раздела предполагается, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\mathcal{B}$ — конус;
- $\mathcal{B}$ — телесное множество;
- $\psi \in \mathcal{B}$.

Построим по введенным объектам несколько новых. Положим

$$\mathcal{A}_0 := \big(\mathcal{A} - L^0_+\big) \cap L^0_+, \quad \mathcal{C} := \overline{\operatorname{co}}\,\mathcal{A}_0,$$

$$\mathcal{D}^* := \{\eta \in L^0_+ \colon \mathsf{E}\eta\xi \le 1 \text{ для всех } \xi \in \mathcal{A}\}.$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{D}^* = \{\eta \in L^0_+ \colon \mathsf{E}\eta\xi \le 1 \text{ для всех } \xi \in \mathcal{C}\}. \tag{2}$$

Так как множество $\mathcal{C} \subseteq L^0_+$ телесно, выпукло и замкнуто, по биполярной теореме Бранната–Шахермайера для пространства L^0_+ [11] имеем двойственное соотношение

$$\mathcal{C} = \{\xi \in L^0_+ \colon \mathsf{E}\eta\xi \le 1 \text{ для всех } \eta \in \mathcal{D}^*\}. \tag{3}$$

Далее, пусть $B \in L^0_+$. Напомним, что B интерпретируется как платежное обязательство. Верхней ценой хеджирования для B назовем величину

$$\pi(B) := \inf\{x > 0 \colon \text{найдется такая } \xi \in \mathcal{A}, \text{ что } B \le x\xi\} = \inf\{x > 0 \colon B \in x\mathcal{A}_0\}$$

(здесь и далее $\inf \varnothing = +\infty$). Для непустого $\mathcal{D} \subseteq L^0_+$ положим

$$\rho_{\mathcal{D}}(B) := \sup_{\eta \in \mathcal{D}} \mathsf{E}\eta B.$$

Определим также $\rho^*(B) = \rho_{\mathcal{D}^*}(B)$. В остальных случаях будем писать просто ρ вместо $\rho_{\mathcal{D}}$, так как это не ведет к двусмысленности.

Теперь мы можем строго переформулировать интересующие нас вопросы (I)–(IV) из введения. А именно, когда найдется такое множество $\mathcal{D} \subset L^0_+$, что

$$\pi(B) = \rho(B) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{B}$$

и

(I) других ограничений на $\mathcal{D}$ нет;

(II) $\mathcal{D}$ может содержать только строго положительные случайные величины;

(III) $\frac{1}{\psi}\mathcal{D}$ может содержать только плотности вероятностных мер;

(IV) $\frac{1}{\psi}\mathcal{D}$ может содержать только плотности эквивалентных вероятностных мер?

Следующая простая теорема значительно упрощает ответы на эти вопросы. Пункт (iv) используется только в разделе 3. В связи с этим пунктом следует принять во внимание хорошо известный факт, что в ограниченном по вероятности замкнутом подмножестве L^0 любой элемент мажорируется максимальным элементом этого подмножества, см., напр., [13, доказательство леммы 4.3].

Теорема 1. (i) *$\rho^*(B) \leqslant \pi(B)$ для всех $B \in L^0_+$.*

(ii) *Если $\pi(B) = \rho(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^*$.*

(iii) *Пусть $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^*$. Для того, чтобы*

$$\pi(B) = \rho(B) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{B},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi(B) = \rho^*(B) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{B} \qquad \text{и} \qquad \rho^*(B) = \rho(B) \quad \text{для всех } B \in L^0_+. \tag{4}$$

(iv) *Пусть множество $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну строго положительную случайную величину, $\mathcal{D}$ — выпуклое подмножество $\mathcal{D}^*$. Для того, чтобы*

$$\rho^*(B) = \rho(B) \quad \text{для всех } B \in L^0_+,$$

необходимо и достаточно, чтобы замыкание $\overline{\mathcal{D}}$ множества $\mathcal{D}$ в L^0 содержало все максимальные элементы из $\mathcal{D}^*$.

Таким образом, ответ на вопрос (I) положителен в том и только в том случае, когда выполнено первое соотношение в (4). Для справедливости (II)–(IV) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены оба соотношения в (4), где во втором в качестве $\mathcal{D}$ берется максимальное подмножество из $\mathcal{D}^*$, удовлетворяющее соответствующим требованиям.

С учетом только что сделанного замечания следующая теорема дает ответы на вопросы (I) и (II).

Теорема 2. (i) *Для того, чтобы $\pi(B) = \rho^*(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{B} \subseteq \bigcap_{\lambda > 1} (\lambda \mathcal{A}_0). \tag{5}$$

(ii) *Пусть $\mathcal{D} = \{\eta \in \mathcal{D}^* \colon \eta > 0\}$. Для того, чтобы $\mathcal{D} \neq \varnothing$ и $\pi(B) = \rho(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (5) *и множество* $\operatorname{co} \mathcal{A}$ *было ограничено по вероятности.*

Замечание 1. Условие ограниченности по вероятности множества терминальных капиталов, отвечающих стратегиям с начальным капиталом 1 и всюду неотрицательным процессом капитала, получило в работе [23] название *отсутствия неограниченной прибыли с ограниченным риском* (no unbounded profit with bounded risk) и аббревиатуру NUPBR. Ранее оно фигурировало в работе [22] как условие BK.

Основной вклад данной статьи составляет следующая теорема. Для ее формулировки введем еще некоторые обозначения. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &:= \{\mathsf{Q} \text{ — вероятность на } (\Omega, \mathcal{F}) \colon \mathsf{Q} \ll \mathsf{P},\ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\xi/\psi) \le 1 \text{ для всех } \xi \in \mathcal{A}\}, \\ \mathcal{Q}_e &:= \{\mathsf{Q} \in \mathcal{Q} \colon \mathsf{Q} \sim \mathsf{P}\}. \end{aligned}$$

Определим также

$$\mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C}) = \{\lambda\xi - (\lambda - 1)\psi \colon \xi \in \mathcal{C},\ \lambda > 1\} \cap L^0_+.$$

Предположим, что $\psi \in \mathcal{C}$. Легко проверить, что при этом предположении $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C})$, и эти два множества совпадают тогда и только тогда, когда выпуклое множество $\mathcal{C}$ представимо в виде $\mathcal{C} = (\psi + \mathcal{K}) \cap L^0_+$, где $\mathcal{K}$ — выпуклый конус в L^0. См. также работу Кардараса [24] в связи с этим условием.

Теорема 3. *Пусть $\psi \in \mathcal{C}$.*

(i) *Возьмем*

$$\mathcal{D} = \bigl\{\eta \in \mathcal{D}^* \colon \mathsf{E}\eta\psi = 1\bigr\} = \Bigl\{\frac{1}{\psi}\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}} \colon \mathsf{Q} \in \mathcal{Q}\Bigr\}.$$

Для того, чтобы $\mathcal{D} \neq \varnothing$ и $\rho^*(B) = \rho(B)$ для всех $B \in L^0_+$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{C} \neq L^0_+$ и

$$\mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}. \tag{6}$$

(ii) *Возьмем*

$$\mathcal{D} = \bigl\{\eta \in \mathcal{D}^* \colon \eta > 0 \text{ и } \mathsf{E}\eta\psi = 1\bigr\} = \Bigl\{\frac{1}{\psi}\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}} \colon \mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_e\Bigr\}.$$

Для того, чтобы $\mathcal{D} \neq \varnothing$ и $\rho^*(B) = \rho(B)$ для всех $B \in L^0_+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (6) *и множество* $\operatorname{co} \mathcal{A}$ *было ограничено по вероятности.*

Замечание 2. Условие $\mathcal{C} \neq L^0_+$ в (i) означает, что найдется такое множество $A \in \mathcal{F}$, что $\mathsf{P}(A) > 0$ и семейство случайных величин $\{\xi 1_A \colon \xi \in \operatorname{co}\mathcal{A}\}$ ограничено по вероятности, см. [11, лемма 2.3]. Таким образом, это условие представляет собой крайне слабую форму условия типа отсутствия арбитража.

Замечание 3. В замечании 1 отмечалось, что условие ограниченности по вероятности множества $\operatorname{co}\mathcal{A}$ можно рассматривать как одну из разновидностей условий отсутствия арбитража. В сочетании с (6) оно влечет весьма сильное условие типа отсутствия арбитража:

$$\xi \in \mathcal{C}, \quad \xi \geqslant \psi \qquad \Rightarrow \qquad \xi = \psi.$$

В качестве следствия мы получаем ответ на вопросы (III) и (IV).

Следствие 1. *Пусть* $\psi \in \mathcal{C}$.

(i) *Для того, чтобы* $\mathcal{Q} \neq \varnothing$ *и* $\pi(B) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}(B/\psi)$ *для всех* $B \in \mathcal{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{C} \neq L^0_+$ *и*

$$\mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \subseteq \bigcap_{\lambda>1} (\lambda\mathcal{A}_0). \tag{7}$$

(ii) *Для того, чтобы* $\mathcal{Q}_e \neq \varnothing$ *и* $\pi(B) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}(B/\psi)$ *для всех* $B \in \mathcal{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (7) *и множество* $\operatorname{co}\mathcal{A}$ *было ограничено по вероятности.*

3 Связь с задачей максимизации полезности

В этом разделе считается заданным множество $\mathcal{A}$ из L^0_+, которое предполагается выпуклым; кроме того, $\mathcal{A}$ содержит хотя бы одну случайную величину ξ, для которой $\mathsf{P}(\xi \geqslant \varkappa) = 1$ для некоторого $\varkappa > 0$. Множество $\mathcal{A} = \mathcal{A}(1)$ по-прежнему интерпретируется как множество терминальных значений капитала, отвечающих всем стратегиям с начальным капиталом 1, а если начальный капитал равен $x > 0$, то множество терминальных значений капитала $\mathcal{A}(x)$, отвечающих всем таким стратегиям, предполагается равным $x\mathcal{A}$.

Под функцией полезности в контексте данного раздела будет пониматься вогнутая функция $U \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, равная $-\infty$ на $(-\infty, 0)$ и конечная на $(0, +\infty)$, и строго возрастающая на $[0, +\infty)$. Других предположений об U не требуется. Как обычно, введем сопряженную к U функцию V соотношением

$$V(y) = \sup_{x>0} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что функция V не возрастает.

Для вероятностной меры $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$ определим функцию цены $u_\mathsf{Q}(x)$, $x > 0$, в задаче максимизации полезности относительно меры Q:

$$u_\mathsf{Q}(x) = \sup_{\xi \in x\mathcal{A}} \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(\xi),$$

а также функцию цены $v_\mathsf{Q}(y)$, $y \geqslant 0$, в двойственной оптимизационной задаче:

$$v_\mathsf{Q}(y) = \inf_{\eta \in \mathcal{D}^*} \mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big),$$

где множество $\mathcal{D}^*$ определяется как в разделе 2.

Тогда имеют место следующие двойственные соотношения между u_{Q} и v_{Q}:

$$u_{\mathsf{Q}}(x) = \min_{y \geqslant 0} [v_{\mathsf{Q}}(y) + xy], \quad x > 0,$$

и

$$v_{\mathsf{Q}}(y) = \sup_{x > 0} [u_{\mathsf{Q}}(x) - xy], \quad y \geqslant 0,$$

см. теорему 2.2 в [3]; при несколько более сильных предположениях (в частности, при $\mathsf{Q} = \mathsf{P}$) этот результат доказан Крамковым и Шахермайером в [27, теорема 3.1]. Подчеркнем, что Крамков и Шахермайер сначала установили двойственные соотношения (и другие факты) в представленной здесь абстрактной модели рынка и из них вывели, как следствие, соответствующие результаты в семимартингальной модели. В частности, они доказали, что в этой последней нижнюю грань в определении функции v_{P} можно брать не по множеству $\mathcal{D}^*$, а по более узкому множеству терминальных значений всех супермартингальных плотностей (выходящих из 1). Если проанализировать, что лежит в основе этого перехода, то окажется, что это — теорема 5.5 из [15] о верхней цене хеджирования, которая говорит, что имеет место формула (1) с множеством $\mathcal{M}_e$ эквивалентных σ-мартингальных мер.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{D}$ — непустое выпуклое подмножество $\mathcal{D}^*$.*

(i) *Предположим, что для заданной функции полезности U для любой $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$ и для любого $y \geqslant 0$*

$$v_{\mathsf{Q}}(y) = \inf_{\eta \in \mathcal{D}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\Big(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big). \tag{8}$$

Тогда

$$\rho(B) = \rho^*(B) \quad \text{для любой } B \in L^0_+. \tag{9}$$

(ii) *Пусть выполнено* (9). *Тогда*

$$v_{\mathsf{Q}}(y) = \inf_{\eta \in \overline{\mathcal{D}}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\Big(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big). \tag{10}$$

для любой $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$, для любого $y \geqslant 0$ и для любой функции полезности из рассматриваемого класса.

Полезно заметить, что по лемме Фату функционал $\rho = \rho_{\mathcal{D}}$ не меняется при замене $\mathcal{D}$ на $\overline{\mathcal{D}}$, в то время как правые части (8) и (10) могут разниться.

Эта теорема в какой-то степени объясняет, почему эквивалентных σ-мартингальных мер достаточно в формуле для верхней цены хеджирования, но недостаточно в формуле для v_Q, в которой нижнюю грань надо брать по замыканию множества плотностей этих мер в L^0. Терминальные значения супермартингальных плотностей это замыкание содержат.

4 Доказательства

Доказательство теоремы 1. Утверждение (i) непосредственно следует из определений. Для доказательства (ii) предположим противное: пусть найдется $\eta \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}^*$. Тогда $\mathsf{E}\eta\xi > 1$ для некоторой $\xi \in \mathcal{A}$. Положим $\xi_n = \xi \wedge (n\psi)$. Тогда $\xi_n \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}$, $\xi_n \uparrow \xi$ P-п.н. и по теореме о монотонной сходимости $\mathsf{E}\eta\xi_n > 1$ для достаточно больших n. Для этих n имеем $\pi(\xi_n) \leqslant 1 < \rho(\xi_n)$, что дает противоречие.

Достаточность в (iii) очевидна, проверим необходимость. Поскольку $\pi \geqslant \rho^* \geqslant \rho$ на L^0_+ ввиду (i) и предположения $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^*$, имеем первое соотношение в (4) и равенство во втором для $B \in \mathcal{B}$. Применение приема с урезанием из предыдущего абзаца к $B \in L^0_+$ завершает доказательство.

Перейдем к пункту (iv). При его условиях множество $\mathcal{D}^*$ ограничено по вероятности в силу (2). Поэтому достаточность очевидна из сделанного перед формулировкой теоремы замечания. Докажем необходимость. Множество $(\overline{\mathcal{D}} - L^0_+) \cap L^0_+$, очевидно, выпукло и телесно. Пользуясь стандартной техникой перехода к форвардно-выпуклым комбинациям (лемма A1.1 в [13]), получаем, что $(\overline{\mathcal{D}} - L^0_+) \cap L^0_+$ замкнуто в L^0. Поскольку соотношение (9) влечет совпадение поляр множеств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ в смысле [11], по биполярной теореме из этой же работы получаем, что $(\overline{\mathcal{D}} - L^0_+) \cap L^0_+ = \mathcal{D}^*$. Значит, $\overline{\mathcal{D}}$ содержит все максимальные элементы из $\mathcal{D}^*$. □

Доказательство теоремы 2. (i) Так как $\mathcal{B}$ — конус, π и ρ^* — положительно-однородные функционалы и $\pi \geqslant \rho^*$, для совпадения π и ρ^* на $\mathcal{B}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\{\rho^* \leqslant 1\} \cap \mathcal{B} \subseteq \{\pi \leqslant 1\}.$$

Остается заметить, что для $B \in L^0_+$ по определению $\pi(B) \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \lambda\mathcal{A}_0$ для любого $\lambda > 1$, а $\{\rho^* \leqslant 1\} = \mathcal{C}$ в силу (3).

(ii) Необходимость (5) следует из предыдущего пункта и пункта (iii) теоремы 1. Для любой $\eta \in \mathcal{D}$ в силу (2) $\mathsf{E}\eta\xi \leqslant 1$ для любой $\xi \in \operatorname{co}\mathcal{A}$. Поскольку $\mathcal{D}$ непусто и $\mathsf{P}(\eta > 0) = 1$ для любой $\eta \in \mathcal{D}$, очевидно, имеем ограниченность $\operatorname{co}\mathcal{A}$ по вероятности.

Докажем достаточность. Пользуясь ограниченностью множества $\operatorname{co}\mathcal{A}$ по вероятности, из теоремы Яна [34, теорема 1] несложно вывести существование такой случайной величины η, что $\mathsf{P}(\eta > 0) = 1$ и $\sup_{\xi\in\mathcal{A}} \mathsf{E}\eta\xi < \infty$, см. также [11, лемма 2.3]. Умножая η на положительную константу, можно считать, что $\eta \in \mathcal{D}$, в частности, $\mathcal{D} \neq \varnothing$. Пусть $\eta' \in \mathcal{D}^*$, тогда для любого $\varepsilon \in (0,1]$ имеем $\eta_\varepsilon := \varepsilon\eta + (1-\varepsilon)\eta' \in \mathcal{D}$, откуда по лемме Фату $\mathsf{E}\eta' B \leqslant \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E}\eta_\varepsilon B \leqslant \sup_{\eta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\eta B$ для любой $B \in L^0_+$. Таким образом, имеет место второе равенство в (4). Доказательство завершается применением первой части теоремы и пункта (iii) теоремы 1. □

В доказательстве теоремы 3 используется вспомогательный результат, для формулировки которого потребуются дополнительные обозначения. Обозначим $\mathfrak{ba}$ пространство таких ограниченных конечно-аддитивных функций множества $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, что

$$A \in \mathcal{F},\ \mathsf{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0,$$

с нормой полной вариации. Хорошо известно, что $\mathfrak{ba}$ является сопряженным к банахову пространству L^∞, причем двойственность задается соотношением

$$\langle \xi, \mu \rangle := \mu(\xi) := \int_\Omega \xi\, d\mu, \quad \mu \in \mathfrak{ba}, \quad \xi \in L^\infty.$$

Подпространство $\mathfrak{ba}$, состоящее из счетно-аддитивных мер, обозначается $\mathfrak{ca}$. Для $\mu \in \mathfrak{ba}$ существует единственное разложение Иосида–Хьюитта $\mu = \mu^r + \mu^s$ на счетно-аддитивную меру $\mu^r \in \mathfrak{ca}$ и чисто конечную-аддитивную функцию множества $\mu^s \in \mathfrak{ba}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{K}$ *— выпуклый конус в* L^∞*, не совпадающий с* L^∞ *и содержащий отрицательный конус* $-L^\infty_+$*,* $\mathcal{R} := \big\{\mu \in \mathfrak{ba}\colon \mu(\Omega) = 1$ *и* $\mu(\xi) \leqslant 0$ *для любой* $\xi \in \mathcal{K}\big\}$ *и* $\nu \in \mathfrak{ba}$*. Тогда* $\mathcal{R} \neq \varnothing$ *и следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\nu \in \mathcal{R} - \mathfrak{ba}_+$*;*

(ii) $\nu(\xi) \leqslant 1$ *для любой* $\xi \in \mathcal{C}_1 := (1 + \mathcal{K}) \cap L^\infty_+$*.*

Эта лемма была доказана автором для первого варианта статьи [3], но не вошла в итоговую версию. Ее обобщение доказано Хасановым [8]. В работах Рохлина, в частности, при доказательстве теоремы Крепса–Яна для пространства L^∞ с топологией нормы (см. [31, доказательство теоремы 2.1]), по существу, доказывалось, что из конечности $\sup_{\xi\in\mathcal{C}_1} \nu(\xi)$ вытекает существование $\mu \geqslant \nu$ из конуса $\mathcal{J}$, порожденного $\mathcal{R}$. Очевидно, этот факт следует из леммы 1, которая, помимо того, устанавливает количественную связь между величиной указанного супремума и $\mu(\Omega)$. Результат Рохлина допускает обобщения на некоторые другие частично упорядоченные топологические векторные пространства, см. [32]. Для нашего результата специфика пространства L^∞ существенна. Отметим однако результат из заметки [2], где схожий с леммой 1 "количественный" результат доказан для пространств Орлича с функцией Юнга, не удовлетворяющей Δ_2-условию.

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{K}}$ — замыкание $\mathcal{K}$ по норме L^∞. Из условий на $\mathcal{K}$ легко следует, что $\overline{\mathcal{K}} \neq L^\infty$. Поскольку любой непрерывный линейный функционал, равный нулю (или неположительный) на $\mathcal{K}$, с необходимостью положителен, непустота $\mathcal{R}$ следует из теоремы Хана–Банаха. Более того, по стандартной биполярной теореме, см., например, [9, теорема 5.103],

$$\overline{\mathcal{K}} = \{\xi \in L^\infty\colon \mu(\xi) \leqslant 0 \text{ для любой } \mu \in \mathcal{R}\}. \tag{11}$$

Импликация (i)⇒(ii) очевидна. Пусть выполнено (ii). Покажем сначала, что

$$\nu(\xi) \leqslant 1 \text{ для любой } \xi \in \overline{\mathcal{C}}_1 := (1 + \overline{\mathcal{K}}) \cap L^\infty_+. \tag{12}$$

Для этого достаточно проверить, что $\overline{\mathcal{C}}_1$ есть замыкание $\mathcal{C}_1$ по норме L^∞. Пусть $\xi \in \overline{\mathcal{C}}_1$. Тогда $-1 \leqslant \xi - 1 \in \overline{\mathcal{K}}$ и найдется такая последовательность $\xi_n \in \mathcal{K}$, что $|\xi - 1 - \xi_n| \leqslant 1/n$. В частности, $\xi_n \geqslant -1 - 1/n$. Положим $\xi_n' := n\xi_n/(n+1)$; тогда $\xi_n' \in \mathcal{K}$ и $\xi_n' \geqslant -1$, значит, $1 + \xi_n' \in \mathcal{C}_1$. Остается заметить, что $\|\xi - 1 - \xi_n'\|_{L^\infty} \leqslant \|\xi - 1 - \xi_n\|_{L^\infty} + \|\xi_n\|_{L^\infty}/(n+1) \to 0$.

Положим

$$\phi(\xi) := \sup_{\mu\in\mathcal{R}} \mu(\xi), \quad \xi \in L^\infty_+,$$

и покажем, что

$$\nu(\xi) \leqslant \phi(\xi), \quad \xi \in L^\infty_+. \tag{13}$$

Рассмотрим два случая: $\phi(\xi) = 0$ и $\phi(\xi) > 0$. Если $\phi(\xi) = 0$, то и $\phi(\lambda\xi) = 0$ для любого $\lambda > 0$. В силу (11) имеем $\lambda\xi \in \overline{\mathcal{K}}$, откуда $1 + \lambda\xi \in \overline{\mathcal{C}}_1$. Из (12) получаем, что $\nu(\xi) \leqslant 0$.

Пусть $\phi(\xi) > 0$; положим $\xi' := \xi/\phi(\xi)$. Тогда $\phi(\xi') = 1$ и $\mu(\xi' - 1) = \mu(\xi') - 1 \leqslant 0$ для любой $\mu \in \mathcal{R}$. Следовательно, $\xi' - 1 \in \overline{\mathcal{K}}$ в силу (11), т.е. $\xi' \in \overline{\mathcal{C}}_1$. Ввиду (12) имеем $\nu(\xi') \leqslant 1$, откуда $\nu(\xi) \leqslant \phi(\xi)$. Таким образом, (13) доказано.

Пусть теперь ϕ определена на L^∞_+ как и выше, и равна $+\infty$ вне L^∞_+. Иначе говоря,

$$\phi = \delta^*_{\mathcal{R}} + \delta_{L^\infty_+},$$

где * означает преобразование Фенхеля–Лежандра, а δ_A — индикаторная функция множества A в смысле выпуклого анализа, т.е. равная 0 на A и $+\infty$ вне его. Из (13), очевидно, следует, что $\phi^*(\nu) \leqslant 0$. С другой стороны, по теореме двойственности Фенхеля–Рокафеллара ([30], [4, § 3.4, теорема 1])

$$\phi^* = \delta_{\mathcal{R}} \nabla \delta_{-\mathfrak{ba}_+} = \delta_{\mathcal{R}-\mathfrak{ba}_+}.$$

□

Доказательство теоремы 3. Достаточно рассмотреть случай $\psi = 1$. Общий случай сводится к этому рассмотрением множеств $\frac{1}{\psi}\mathcal{A}$ и $\frac{1}{\psi}\mathcal{B}$ в роли $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно.

(i) Докажем необходимость. Пусть $\xi \in \mathfrak{s}_1(\mathcal{C})$. Так как $\mathsf{E}\eta = 1$ для любой $\eta \in \mathcal{D}$ по определению $\mathcal{D}$, $\mathsf{E}\eta\xi \leqslant 1$ по определению $\mathfrak{s}_1(\mathcal{C})$. Значит, $\rho(\xi) \leqslant 1$, откуда $\rho^*(\xi) \leqslant 1$ в силу предположения. Из (3) следует, что $\xi \in \mathcal{C}$.

Предположим, что $\mathcal{C} \neq L^0_+$ и выполнено (6) (с $\psi = 1$). Положим $\mathcal{K} := \big\{\lambda(\xi - 1)\colon \lambda > 0,\ \xi \in \mathcal{C}\big\} \cap L^\infty$. Очевидно, $\mathcal{K}$ — конус, содержащий 0. Выпуклость $\mathcal{K}$ легко выводится из выпуклости $\mathcal{C}$. Так как $1 \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ телесно, любая случайная величина со значениями в $[-1, 0]$ лежит в $\mathcal{K}$. Значит, $\mathcal{K} \supseteq -L^\infty_+$.

Введем множество $\mathcal{C}_1 := (1+\mathcal{K})\cap L^\infty_+$ как в лемме 1. Пусть $\xi \in \mathcal{C}_1$, т.е. $\xi = \lambda(\zeta-1)+1 \geqslant 0$ для некоторых $\lambda > 0$ и $\zeta \in \mathcal{C}$. Поскольку $\mathcal{C}$ выпукло и $1 \in \mathcal{C}$, имеем $\xi \in \mathcal{C}$ в случае $\lambda \leqslant 1$; если же $\lambda > 1$, то $\xi \in \mathcal{C}$ в силу (6). Таким образом, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap L^\infty$. Очевидно, что $\mathcal{K} = L^\infty$ влечет $\mathcal{C}_1 = L^\infty_+$, что в свою очередь в силу доказанного влечет $\mathcal{C} = L^0_+$. Так что условия леммы 1 для конуса $\mathcal{K}$ выполнены.

Докажем еще, что конус $\mathcal{K}$ замкнут в слабой* топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$. Наше доказательство следует доказательству аналогичного факта в доказательстве теоремы 1.4 в работе [24]. Хорошо известно, см., например, [13, теорема 2.1], что для этого достаточно проверить следующее: если $\xi_n \in \mathcal{K}$, $|\xi_n| \leqslant 1$ и последовательность ξ_n сходится по вероятности к ξ, то $\xi \in \mathcal{K}$. Но по доказанному $1 + \xi_n \in \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, поэтому $1 + \xi \in \mathcal{C}$, откуда $\xi \in \mathcal{K}$.

Теперь мы воспользуемся несколько раз стандартной биполярной теоремой [9, теорема 5.103]. Определим двойственные к $\mathcal{K}$ конусы в пространствах L^1 и $\mathfrak{ba}$:

$$\mathcal{L} := \{\eta \in L^1\colon \mathsf{E}\eta\xi \leqslant 0 \text{ для любой } \xi \in \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{J} := \{\mu \in \mathfrak{ba}\colon \mu(\xi) \leqslant 0 \text{ для любой } \xi \in \mathcal{K}\}.$$

Так как конус $\mathcal{K}$ замкнут в топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$ и, тем более, в топологии $\sigma(L^\infty, \mathfrak{ba})$, имеем

$$\mathcal{K} = \{\xi \in L^\infty\colon \mathsf{E}\eta\xi \leqslant 0 \text{ для любой } \eta \in \mathcal{L}\} = \{\xi \in L^\infty\colon \mu(\xi) \leqslant 0 \text{ для любой } \mu \in \mathcal{J}\}.$$

Отождествляя теперь $\mathcal{L}$ с его образом $\mathcal{J} \cap \mathfrak{ca}$ при каноническом вложении L^1 в $\mathfrak{ba}$ и применяя к $\mathcal{J} \cap \mathfrak{ca}$ биполярную теорему, получим, что $\mathcal{J}$ есть замыкание множества $\mathcal{J} \cap \mathfrak{ca}$ в топологии $\sigma(\mathfrak{ba}, L^\infty)$. Введем $\mathcal{R}$ как в лемме 1, т.е. $\mathcal{R} = \{\mu \in \mathcal{J}\colon \mu(\Omega) = 1\}$, и положим $\mathcal{M} := \mathcal{R} \cap \mathfrak{ca}$. Из доказанного легко следует, что $\mathcal{R}$ есть замыкание $\mathcal{M}$ в топологии $\sigma(\mathfrak{ba}, L^\infty)$. Наконец, из определения $\mathcal{R}$ легко видеть, что $\mathcal{M} = \mathcal{Q}$, Если бы $\mathcal{Q} = \varnothing$, то мы бы последовательно имели $\mathcal{M} = \varnothing$, $\mathcal{R} = \varnothing$, $\mathcal{J} = \{0\}$ и $\mathcal{K} = L^\infty$. Значит, $\mathcal{D} \neq \varnothing$.

Теперь мы можем легко закончить доказательство этой части теоремы. Пусть $\eta \in \mathcal{D}^*$, тогда $\mathsf{E}\eta\xi \leqslant 1$ для любой $\xi \in \mathcal{C}$ и, в частности, для любой $\xi \in \mathcal{C}_1$. Значит, мера ν, определяемая соотношением $d\nu = \eta\, d\mathsf{P}$, удовлетворяет условиям пункта (ii) леммы 1. По этой лемме найдется такая $\mu \in \mathcal{R}$, что $\mu \geqslant \nu$. Но тогда и $\mu^r \geqslant \nu$. Поскольку $\mathcal{M} = \mathcal{Q}$ выпукло, применима лемма 1 из [1], которая утверждает в данной ситуации, что

$$\Big\{\frac{d\mu^r}{d\mathsf{P}}\colon \mu \in \mathcal{R}\Big\} = \overline{\mathcal{D}}.$$

Значит, найдется последовательность $\{\eta_n\}$ в $\mathcal{D}$, которая сходится по вероятности к $d\mu^r/d\mathsf{P}$. По лемме Фату для любой $B \in L^0_+$

$$\mathsf{E}\eta B \leqslant \mathsf{E}\frac{d\mu^r}{d\mathsf{P}}B \leqslant \liminf_n \mathsf{E}\eta_n B \leqslant \rho(B).$$

В силу произвольности η, имеем $\rho^*(B) = \rho(B)$.

(ii) Необходимость условия (6) вытекает из предыдущего пункта теоремы, а условие ограниченности множества $\operatorname{co} A$ по вероятности — из непустоты $\mathcal{D}$. Достаточность есть простое следствие первой части теоремы, которая дает нам, что

$$\mathcal{Q} \neq \varnothing \qquad \text{и} \qquad \rho^*(B) = \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q} B \quad \text{для всех } B \in L^0_+,$$

и результата Кардараса [24, теорема 1.4], который в предположении (6) и ограниченности по вероятности множества $\operatorname{co}\mathcal{A}$ (и, следовательно, множества $\mathcal{C}$) утверждает, что $\mathcal{Q}_e \neq \varnothing$. Альтернативно, непустота $\mathcal{Q}_e$ следует из теоремы Крепса-Яна и слабой* замкнутости конуса $\mathcal{K}$ из доказательства первой части теоремы. □

Доказательство следствия 1. (i) Необходимость условий вытекает из теорем 1–3. Пусть $\mathcal{C} \neq L^0_+$ и выполнено (7). Так как $\bigcap_{\lambda>1}(\lambda\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{C}$, имеем $\mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Пусть $\xi \in \mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C})$ и $\xi = \lambda\zeta - (\lambda-1)\psi$ с некоторыми $\lambda > 1$ и $\zeta \in \mathcal{C}$. Заметим, что случайная величина $\xi_n := \lambda(\zeta \wedge (n\psi)) - (\lambda-1)\psi$ неотрицательна при $n \geqslant 1$, и, так как $\zeta \wedge (n\psi) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, то $\xi_n \in \mathfrak{s}_\psi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{B}$, откуда $\xi_n \in \mathcal{C}$. Значит, и $\xi = \lim_n \xi_n \in \mathcal{C}$. Таким образом, имеет место (6). Теперь достаточность следует из теорем 1–3.

Доказательство пункта (ii) аналогично. □

Доказательство теоремы 4. (i) Пусть (9) не выполнено. Тогда найдутся такие $B \in L^0_+$ и $\eta \in \mathcal{D}^*$, что

$$\mathsf{E}\eta B > \sup_{\zeta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\zeta B. \tag{14}$$

Урезая сверху B и η, можно считать, что B и η ограничены, а прибавляя к B маленькую константу (напомним, что $\mathsf{E}\zeta \leqslant \varkappa^{-1}$ для любой $\zeta \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^*$) — что $B \geqslant \varepsilon > 0$. Положим теперь $q = y\eta/U'_+(B)$, где $U'_+(x)$ — правая производная функции U в точке x, а $y > 0$ выберем из условия нормировки $\mathsf{E}q = 1$. Определим Q соотношением $d\mathsf{Q} = q\,d\mathsf{P}$. Применяя пункты (vi) и (v) теоремы 1 в [1] (с V в роли f, Q в роли ν, $y\zeta\,dP$ в роли μ), получим

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\zeta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big) = \sup_{\xi\in L^\infty:\,U(\xi)\in L^\infty} \big[\mathsf{E}_\mathsf{Q} U(\xi) - y\mathsf{E}\zeta\xi\big].$$

Заметим, что при $\zeta = \eta$ верхняя грань достигается на B:

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q} U(\xi) - y\mathsf{E}\eta\xi = y\mathsf{E}\eta\Big[\frac{U(\xi)}{U'_+(B)} - \xi\Big] \leqslant y\mathsf{E}\eta\Big[\frac{U(B)}{U'_+(B)} - B\Big],$$

где неравенство следует из вогнутости U. Поэтому

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big) = \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(B) - y\mathsf{E}\eta B,$$

в то время как

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\zeta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big) \geqslant \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(B) - y\mathsf{E}\zeta B.$$

Значит,

$$\begin{aligned} v_\mathsf{Q}(y) &\leqslant \mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big) = \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(B) - y\mathsf{E}\eta B < \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(B) - y\sup_{\zeta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\zeta B \\ &\leqslant \inf_{\zeta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}_\mathsf{Q} V\Big(\frac{y\zeta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\Big), \end{aligned}$$

где строгое неравенство следует из (14). Таким образом, (8) тоже не выполнено.

(ii) Утверждение следует из пункта (iv) теоремы 1 и монотонности функции V. □

Список литературы

[1] *Гущин А.А.*, О расширении понятия f-дивергенции // Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, вып. 3, с. 468–489.

[2] *Гущин А.А.*, Одна лемма из теории пространств Орлича // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, т. 16, №6, с. 1056—1057.

[3] *Гущин А.А.*, Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, вып. 4, с. 680–704.

[4] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.*, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[5] *Рохлин Д.Б.*, Эквивалентные супермартингальные плотности и меры в моделях рынков с дискретным временем и бесконечным горизонтом // Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, вып. 4, с. 704–731.

[6] *Фёльмер Г., Шид А.*, Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. (Перевод с англ.: Föllmer H., Schied A., Stochastic Finance. An Introduction in Dicrete Time. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2004.)

[7] *Хасанов Р.В.*, О верхней цене хеджирования платежных обязательств // Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, вып. 4, с. 667–681.

[8] *Хасанов Р.В.*, О максимизации полезности с неограниченным случайным вкладом // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2013, №3, с. 10–21.

[9] *Aliprantis C.D., Border K.C.*, Infinite dimensional analysis. Berlin: Springer, 2006.

[10] *Biagini S., Frittelli M.*, On the super-replication price of unbounded claims // Ann. Appl. Prob., 2004, v. 14, №4, p. 1970—1991.

[11] *Brannath W., Schachermayer W.*, A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ // Lect. Notes in Math., 1999, v. 1709, p. 349–354.

[12] *Campy L.*, Superhedging // Encyclopedia of Quantitative Finance. Wiley, 2010. `DOI:10.1002/9780470061602.eqf04012.`

[13] *Delbaen F., Schachermayer W.*, A general version of the fundamental theorem of asset pricing // Mathematische Annalen, 1994, v. 300, №3, p. 463-–520.

[14] *Delbaen F., Schachermayer W.*, The no-arbitrage property under a change of numéraire // Stochastics, 1995, v. 53, №3-4, p. 213-–226.

[15] *Delbaen F., Schachermayer W.*, The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // Mathematische Annalen, 1998, v. 312, №2, p. 215-–250.

[16] *Delbaen F., Schachermayer W.*, A compactness principle for bounded sequences of martingales with applications // Proceedings of the Seminar of Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability, 1999, v. 45, p. 137-–173.

[17] *Delbaen F., Schachermayer W.*, The Mathematics of Arbitrage. Berlin–Heidelberg, Springer, 2008.

[18] *El Karoui N., Quenez ‘M.-C.*, Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série I: Mathématiques, 1991, v. 313, p. 851-–854.

[19] *El Karoui N., Quenez M.-C.*, Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM Journal of Control and Optimization, 1995, v. 33, №1, p. 27-–66.

[20] *Föllmer H., Kabanov Yu.M.*, Optional decomposition and Lagrange multipliers // Finance and Stochastics, 1998, v. 2, №1, p. 69-–81.

[21] *Föllmer H., Kramkov D.*, Optional decompositions under constraints // Probability Theory and Related Fields, 1997, v. 109, №1, p. 1-–25.

[22] *Kabanov Yu.M.*, On the FTAP of Kreps–Delbaen–Schachermayer // Statistics and Control of Stochastic Processes (Moscow, 1995/1996), 1997, River Edge, NJ: World Sci. Publishing, p. 191–203.

[23] *Karatzas I., Kardaras C.*, The numéraire portfolio in semimartingale financial models // Finance Stoch., 2007, v. 11, №4, p. 447–493.

[24] *Kardaras C.*, A structural characterization of numéraires of convex sets of nonnegative random variables // Positivity, 2012, v. 16, №2, p. 245-–253.

[25] *Kardaras C.*, On the closure in the Emery topology of semimartingale wealth-process sets // `http://arxiv.org/abs/1108.0945`.

[26] *Kramkov D.*, Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // Probability Theory and Related Fields, 1996, v. 105, №4, p. 459-–479. 105, 459–479.

[27] *Kramkov D., Schachermayer W.*, The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, №3, p. 904–950.

[28] *Oertel F., Owen M.P.*, On utility-based super-replication prices of contingent claims with unbounded payoffs // J. Appl. Prob., 2007, v. 44, №4, p. 880-–888.

[29] *Oertel F., Owen M.P.*, Geometry of polar wedges in Riesz spaces and super-replication prices in incomplete financial markets // Positivity, 2009, v.13, №1, p. 201-224.

[30] *Rockafellar R.T.*, Extension of Fenchel’s duality theorem for convex functions // Duke Math. J., 1966, v. 33, №1, p. 81–89.

[31] *Rokhlin D.B.*, The Kreps–Yan theorem for L^∞ // Int. J. Math. Math. Sci., 2005, v. 2005, №17, p. 2749–2756.

[32] *Rokhlin D., Schachermayer W.*, A note on lower bounds of martingale measure densities // Illinois J. Math., 2006, v. 50, №4, p. 815–824.

[33] *Stricker C., Yan J.A.*, Some remarks on the optional secomposition theorem // Lecture Notes in Math., 1998, v. 1686, p. 56–66.

[34] *Yan J.A.*, Caractérisation d’une classe d’ensembles convexes de L^1 ou H^1 // Lecture Notes in Math., 1980, v. 784, p. 220–222.

Оценка параметров кубических копул

Зайцев В.Н.[1]

В статье приводится способ построения оценок с наилучшим ограничением сверху на дисперсию для параметров семейства кубических копул.

1 Введение

Современный подход к изучению зависимости между случайными величинами позволяет отделить изучение частных распределений случайных величин от изучения непосредственно зависимости между ними. Так, если дана пара случайных величин (X, Y) с маргинальными функциями распределения $F(x)$, $G(y)$, и $H(x, y)$ — функция их совместного распределения, то можно выделить функцию $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, называемую копулой [1, 2], которая описывает зависимость между X и Y. В данной работе изучается семейство кубических копул [1], которое задается уравнением:

$$C(u, v) = uv + uv(1-u)(1-v)[a_1 v(1-u) + a_2(1-v)(1-u) + b_1 uv + b_2 u(1-v)], \qquad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные константы, такие, что точки (a_2, a_1), (b_1, b_2), (b_1, a_1), (a_2, b_2) принадлежат области S (рис. 1), являющейся объединением квадрата $[-1, 2] \times [-2, 1]$ и эллипса $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y \leq 0$.

Из определения копулы следует, что она является функцией распределения пары равномерно распределенных на $I = [0, 1]$ случайных величин (U, V). В случае кубической копулы, ее плотность распределения имеет вид:

$$\begin{aligned} p(u, v) = &-\left(1 - 4u + 3u^2\right) v(-2 + 3v) a_1 + \left(1 - 4u + 3u^2\right)\left(1 - 4v + 3v^2\right) a_2 + \\ &+ u(-2 + 3u) v(-2 + 3v) b_1 - u(-2 + 3u)\left(1 - 4v + 3v^2\right) b_2 + 1. \end{aligned}$$

Приведем некоторые возможные формы графика плотности $p(u, v)$ на рис. 2 и 3.

В работе [3] Г.Эвин и А.К.Фавр использовали однопараметрические подсемейства общего семейства кубических копул в модели Неймана-Скотта (NSRPM) процесса выпадения осадков для описания зависимости между интенсивностью и продолжительностью

[1]Зайцев Виктор Николаевич, zaytsev_victor@mail.ru, студент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

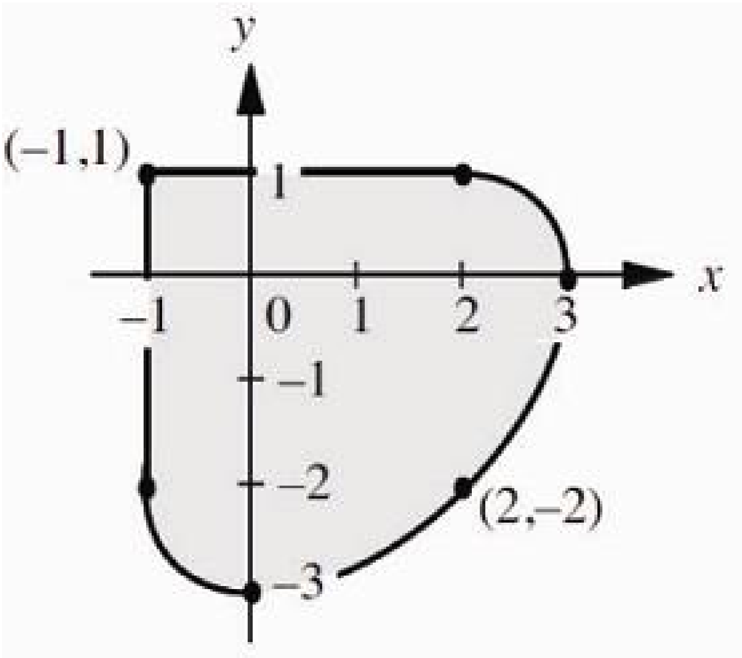

Рис. 1:

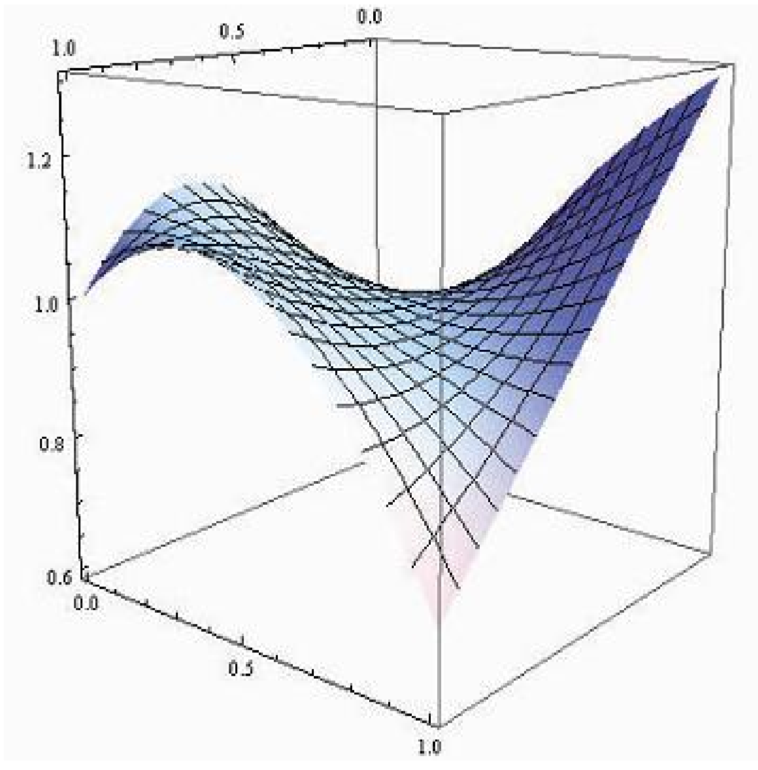

Рис. 2: $p(u, v)$, параметры (a_1, a_2, b_1, b_2) = (-0.3, -0.4, -0.3, 0)

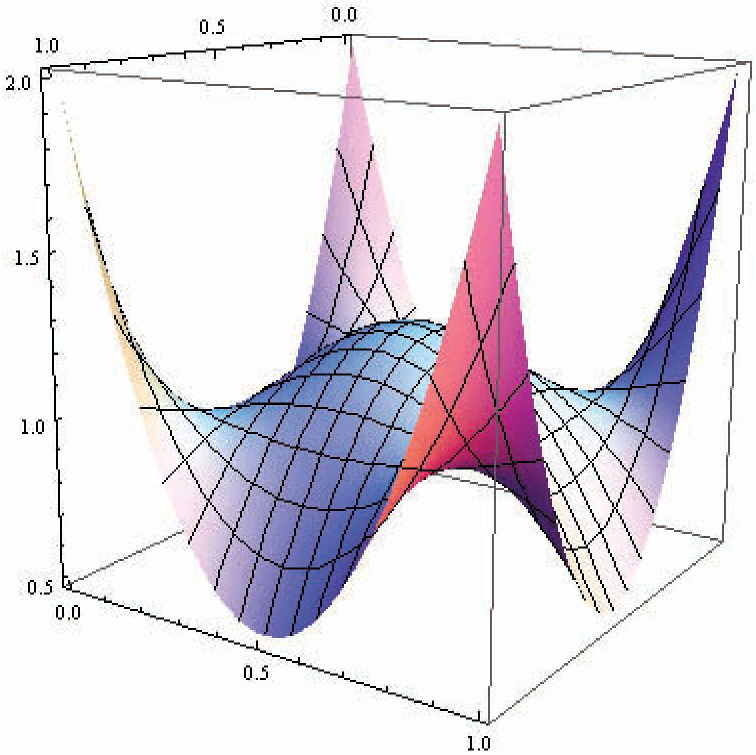

Рис. 3: $p(u, v)$, параметры (a_1, a_2, b_1, b_2) = (-1, 1, 1, -1)

выпадения осадков. Оценивание параметров модели затем производится с помощью модифицированного метода моментов: пусть M_i — теоретические моменты модели Неймана-Скотта, а $\hat{M}_i$ — их оценки. Тогда значения параметров получаются путем численной минимизации функционала

$$O(\Phi) = \sum_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{M_i}{\hat{M}_i}\right)^2,$$

где p — количество моментов, участвующих в оценке.

В настоящей работе решается задача получения простых в вычислении оценок для всех четырех параметров кубической копулы. К сожалению, метод наибольшего правдоподобия не позволяет получить явного выражения для оценок параметров.

Действительно, если две случайные величины U и V имеют равномерное распределение на $[0, 1]$ и копулу с кубическими сечениями $\mathrm{C}(u, v)$, тогда плотность их распределения равна $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$, а функция правдоподобия выборки $(U_1, V_1)...(U_n, V_n)$ имеет вид:

$$L(a_1, a_2, b_1, b_2, U_1, V_1, ..., U_n, V_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 C(U_i, V_i)}{\partial u \partial v}$$

и является многочленом степени n по каждому из параметров. Максимизировать такую функцию правдоподобия при больших n возможно только численно. При этом очень важен вопрос о выборе начального приближения для оценок параметров. Именно такими удобными начальными приближениями могут служить оценки, полученные в данной работе.

Прежде всего, необходимо избавиться от влияния маргинальных распределений компонент. В том случае, если имеется выборка $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, состоящая из пар наблюдений случайных величин X и Y с непрерывными функциями распределения, и копулой

$C(u,v)$, а r_i и s_i — ранги наблюдений X_i в выборке $X_1,\dots,X_n$ и Y_i в $Y_1,\dots,Y_n$ соответственно, тогда можно перейти к рассмотрению выборки (U_i,V_i), где $U_i=\frac{r_i}{n+1}$, $V_i=\frac{s_i}{n+1}$ - пары асимптотически равномерно распределенных на I случайных величин (U,V) с функцией совместного распределения $C(u,v)$, при $n\to\infty$. Переход к нормированным рангам эквивалентен взятию эмпирических функций распределения (с точностью до множителя), которые сходятся к маргинальным функциям распределения по теореме Колмогорова. Таким образом, будем считать, для простоты, что наблюдаются независимые пары (U,V) равномерных случайных величин, параметры копулы которых мы хотим оценить.

2 Построение оценки с оптимально равномерно ограниченной дисперсией

Пусть $f(u,v)$ — функция, дающая несмещенную оценку одного из параметров θ кубической копулы, т.е.

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n f(U_i,V_i),\quad M\hat{\theta}=\theta,$$

а $p(u,v)$ — плотность распределения с.в. U и V. Тогда, для дисперсии этой оценки имеем:

$$D\hat{\theta}=\int_{I^2[0,1]} f^2(u,v)p(u,v)dudv-\left(\int_{I^2[0,1]} f(u,v)p(u,v)dudv\right)^2=$$
$$=\int_{I^2[0,1]} f^2(u,v)p(u,v)dudv-\theta^2\le A\int_{I^2[0,1]} f^2(u,v)dudv-\theta^2,$$

где A — константа, ограничивающая плотность сверху (плотность очевидно ограничена, так как является многочленом на I^2 с ограниченными коэффициентами).

Если мы подберем оценку $\tilde{\theta}$, задаваемую многочленом $\tilde{f}$, минимизирующим значение $\int_{I^2[0,1]} f^2(u,v)dudv$, то для нее при любом значении θ мы имеем гарантированно лучшее ограничение сверху на дисперсию. Оценку $\tilde{\theta}$, обладающую этим свойством, будем называть оценкой с оптимально равномерно ограниченной дисперсией.

Теорема. *Пусть дана выборка $(U_1,V_1)\dots(U_n,V_n)$ из наблюдений равномерно распределенных на I с.в. U и V, функция совместного распределения которых задана кубической копулой $C(u,v)$ (1). Тогда для параметров a_1,a_2,b_1,b_2 копулы $C(u,v)$ оценки с равномерно ограниченной дисперсией имеют вид:*

$$\hat{a}_{1r}=\frac{-4\Sigma_{i=1}^n\left(4-18U_i+15U_i^2\right)\left(1-12V_i+15V_i^2\right)}{n}$$
$$\hat{a}_{2r}=\frac{4\Sigma_{i=1}^n\left(4-18U_i+15U_i^2\right)\left(4-18V_i+15V_i^2\right)}{n}$$
$$\hat{b}_{1r}=\frac{4\Sigma_{i=1}^n\left(1-12U_i+15U_i^2\right)\left(1-12V_i+15V_i^2\right)}{n}$$
$$\hat{b}_{2r}=\frac{-4\Sigma_{i=1}^n\left(1-12U_i+15U_i^2\right)\left(4-18V_i+15V_i^2\right)}{n},$$

а их дисперсии равны:

$$D\hat{a}_{1r} = \frac{-13456a_1 - 1225a_1^2 - 32(-2450 + 87a_2 + 87b_1 + 18b_2)}{1225n}$$
$$D\hat{a}_{2r} = \frac{2784a_1 + 13456a_2 - 1225a_2^2 + 32(2450 + 18b_1 + 87b_2)}{1225n}$$
$$D\hat{b}_{1r} = \frac{78400 + 2784a_1 + 576a_2 + 13456b_1 - 1225b_1^2 + 2784b_2}{1225n}$$
$$D\hat{b}_{2r} = \frac{78400 - 576a_1 - 2784a_2 - 2784b_1 - 13456b_2 - 1225b_2^2}{1225n}.$$

Доказательство. Пусть $f(u,v)$ — функция, дающая несмещенную оценку параметра a_1, плотность распределения пары (U,V) имеет вид

$$p(u,v) = 1 + a_1 r_1(u,v) + a_2 r_2(u,v) + b_1 r_3(u,v) + b_2 r_4(u,v),$$

где

$$\begin{aligned} r_1(u,v) &= -\left(1 - 4u + 3u^2\right) v(-2 + 3v) \\ r_2(u,v) &= \left(1 - 4u + 3u^2\right)\left(1 - 4v + 3v^2\right) \\ r_3(u,v) &= u(-2 + 3u)v(-2 + 3v) \\ r_4(u,v) &= -u(-2 + 3u)\left(1 - 4v + 3v^2\right) \end{aligned}$$

Тогда, для оценки $\hat{a}_{1r}$ параметра a_1 из условия несмещенности:

$$\int f(u,v)p(u,v)dudv = \int f(u,v)(1 + a_1 r_1(u,v) + a_2 r_2(u,v) + b_1 r_3(u,v) + b_2 r_4(u,v))dudv =$$
$$\int f(u,v)dudv + a_1 \int f(u,v) r_1(u,v)dudv + a_2 \int f(u,v) r_2(u,v)dudv + b_1 \int f(u,v) r_3(u,v)dudv$$
$$+ b_2 \int f(u,v) r_4(u,v)dudv = a_1$$

Отсюда, получаем 5 уравнений на $f(u,v)$:

$$\begin{cases} \int_{I^2} f dudv = 0 & (1) \\ \int_{I^2} f r_1 dudv = 1 & (2) \\ \int_{I^2} f r_i dudv = 0, i = 2,3,4 & (3) \end{cases}$$

Найдем оценку a_1 с равномерно ограниченной дисперсией. Для этого будем решать вариационную задачу $\int_{I^2} f^2(u,v)dudv \to \min$

Введем функцию Лагранжа

$$\Lambda(f) = \int_{I^2} \lambda f^2(u,v) + f(u,v)(\lambda_0 + \lambda_1 r_1(u,v) + \lambda_2 r_2(u,v) + \lambda_3 r_3(u,v) + \lambda_4 r_4(u,v))dudv - \lambda_1.$$

Запишем условие стационарности:

$-\frac{\partial}{\partial u} L_{f'}(u,v) + L_f(u,v) = 0, \forall u,v \in I^2.$

Из него выражаем $f(u,v)$, подставляя $\lambda = 1$:
$f(u,v) = -\frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 r_1(u,v) + \lambda_2 r_2(u,v) + \lambda_3 r_3(u,v) + \lambda_4 r_4(u,v)), \forall u,v \in I^2.$

Подставим выражение $f(u,v)$ через λ в условия (1)-(3). Получим 5 уравнений на 5 неизвестных:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{I^2} f dudv = -\frac{\lambda_0}{2} = 0 \\ \displaystyle\int_{I^2} f r_1 dudv = \frac{-16\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_4}{1800} = 1 \\ \displaystyle\int_{I^2} f r_2 dudv = \frac{-4\lambda_1 - 16\lambda_2 - \lambda_3 - 4\lambda_4}{1800} = 0 \\ \displaystyle\int_{I^2} f r_3 dudv = \frac{-4\lambda_1 - \lambda_2 - 16\lambda_3 - 4\lambda_4}{1800} = 0 \\ \displaystyle\int_{I^2} f r_4 dudv = \frac{-\lambda_1 - 4(\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4)}{1800} = 0 \end{cases}$$

Решение этой линейной системы уравнений позволяет найти $f(u,v)$:
$f(u,v) = -4\left(4 - 18u + 15u^2\right)\left(1 - 12v + 15v^2\right)$ - многочлен, дающий несмещенную оценку для параметра a_1. Аналогично, получаем многочлены для остальных параметров.
Для a_2: $f(u,v) = 4\left(4 - 18u + 15u^2\right)\left(4 - 18v + 15v^2\right)$,
для b_1: $f(u,v) = 4\left(1 - 12u + 15u^2\right)\left(1 - 12v + 15v^2\right)$,
для b_2: $f(u,v) = -4\left(1 - 12u + 15u^2\right)\left(4 - 18v + 15v^2\right)$.
Откуда и следует утверждение теоремы. □

Отметим, что в силу асимптотической нормальности полученных оценок и явных формул их дисперсий, для параметров копулы легко можно строить асимптотические доверительные интервалы.

3 Диапазон изменения дисперсий оценок

Определим диапазон изменения дисперсии оценок, полученных данным методом. Возьмем дисперсию оценки a_1 и найдем ее максимальное и минимальное значения при ограничениях на параметры кубической копулы (точки $(a_2,a_1),(b_1,b_2),(b_1,a_1),(a_2,b_2)$ принадлежат области S, являющейся объединением квадрата $[-1,2]\times[-2,1]$ и эллипса $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y \leq 0$). Имеем:

$$D\hat{a}_1 = \frac{-13456a_1 - 1225a_1^2 - 32(-2450 + 87a_2 + 87b_1 + 18b_2)}{1225n}.$$

Дисперсия монотонна по a_1, a_2, b_1, b_2 на всей области определения. Это соображение позволяет найти наборы, на которых дисперсия достигает своих экстремальных значений. Не будем здесь приводить подробные рассуждения и численные расчеты, отметим, что минимум достигается при $a_1 = b_2 \approx 0.93$, $a_2 = b_1 \approx 2.39$. Подстановка дает: $\min(D\hat{a}_1) \approx \frac{41.48}{n}$. Максимум дисперсии достигается при $a_1 = b_2 \approx -2.79$, $a_2 = b_1 \approx -0.65$. Подстановка дает: $\max(D\hat{a}_1) \approx \frac{91.21}{n}$.

Теперь оценим дисперсию оценки параметра a_2. Имеем:

$$D\hat{a}_2 = \frac{2784a_1 + 13456a_2 - 1225a_2^2 + 32(2450 + 18b_1 + 87b_2)}{1225n}.$$

Получаем максимум $\frac{57.53}{n}$ на наборе $(0.99, -1, 2.14, 0.99)$. Минимум дисперсии $\frac{50.36}{n}$ достигается на наборе $(-3, 0, 0, -3)$.

Для дисперсий оценок параметров b_1 и b_2 границы, в силу симметрии, совпадают с границами параметров a_2 и a_1 соответственно.

4 Генерация случайных величин по заданной копуле

Для генерации выборки случайных величин по заданной копуле воспользуемся методом Монте-Карло [4]. Пусть задана копула $C(u,v)$ пары (X,Y) и маргинальные распределения $F(u)$ и $G(v)$. Тогда C — функция распределения равномерно распределенных на I с.в. (U_1, U_2). Плотность распределения (U_1, U_2):

$$p(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}.$$

Пусть известно число A такое, что $p(u,v) \leq A, \quad \forall (u,v) \in I^2$. Рассмотрим следующий алгоритм генерации пар (X,Y): сгенерируем независимые случайные величины $U_1, U_2, U_3 \sim U[0,1]$. Если $p(U_1, U_2) \geq AU_3$, то принимаем пару $(X,Y) = (F^{-1}(U_1), G^{-1}(U_2))$. Имеем:

$$P(F^{-1}(U_1) < a, G^{-1}(U_2) < b | p(U_1,U_2) > AU_3) = \frac{P(U_1 < F(a), U_2 < G(b), p(U_1,U_2) \geq AU_3)}{P(p(U_1,U_2) \geq AU_3)} =$$

$$= \frac{\int_0^{F(a)} \int_0^{G(b)} p(u,v)dudv}{\int_0^1 \int_0^1 p(u,v)dudv} = \int_0^{F(a)} \int_0^{G(b)} \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} dudv = C(F(a), G(b)) = P(X < a, Y < b).$$

Таким образом, сгенерированные с.в. имеют распределение $C(F(x), G(y))$.

Замечание. Нетрудно получить следующую оценку для плотности кубической копулы:

$$\left| \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \right| \leq 1 + 4(|a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|).$$

Таким образом, величина $1 + 4(|a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|)$ может быть взята в качестве A при известных значениях параметров.

5 Заключение

Статистические испытания полученных оценок показали их эффективность по сравнению с другими оценками, полученными как выборочное среднее линейных комбинаций индикаторов и как линейные комбинации выборочных смешанных моментов. Также, они просты в вычислении, асимптотически нормальны и позволяют строить асимптотические доверительные интервалы. Кроме того, стоит отметить, что семейство кубических копул может быть использовано для апроксимации более сложных семейств копул (например, для апроксимации второго порядка семейства копул Ali-Mikhail-Haq [1, 3]).

Автор выражает благодарность А.В.Лебедеву за указание направления научного поиска и за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] *Nelsen R.B.*, An introduction to copulas. Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] *Nelsen R.B., Quesada-Molina J. J., Rodriguez-Lallena J. A.*, Bivariate copulas with cubic sections // J. Nonparametr. Stat., 1997, v. 7, p. 205–220.

[3] *Evin G., Favre A.C.*, A new rainfall model based on the Neyman-Scott process using cubic copulas // Water Resour. Res., 2008, v. 44, W03433, doi:10.1029/2007WR006054.

[4] *Соболь И.М.*, Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

Матричные конусы и проверка конических гипотез в многомерном гауссовском анализе[1]

Кашицын П.А.[2]

Введено понятие матричного конуса в $\mathbb{R}_n^p$ и исследованы его основные свойства. На базе введеного понятия ставится задача о проверке конических гипотез в многомерном гауссовском анализе, обобщающая соответствующие одномерные аналоги. Распределение критической статистики исследовано при гипотезе.

1. Введение.

Рассмотрим набор из n независимых гауссовских случайных p-мерных векторов $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i \sim N_p(m_i, \Sigma)$, $i = \overline{1,n}$. Составим случайную $(p \times n)$-матрицу $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для прикладных задач интерес представляют гипотезы вида

$$m_1 \prec \ldots \prec m_n \tag{1}$$

против общей альтернативы, состоящей в том, что хотя бы одно из неравенств в цепочке (1) не выполнено. При этом частичных порядок "$\prec$" определяется некоторым выпуклым конусом $U \subset \mathbb{R}_1^p$:

$$(v_2 - v_1) \in U \Leftrightarrow v_1 \prec v_2.$$

Гипотезы вида (1) состоят в принадлежности матрицы $M = (m_1, \ldots, m_n)$ некоторому матричному конусу в $\mathbb{R}_n^p$. Вначале введем ряд понятий, которые будут использованы в дальнейшем при построении критической статистики для проверки гипотезы (1).

Рассмотрим левый алгебраический модуль $\mathbb{R}_n^p$, элементами которого являются $(p\times n)$-матрицы над кольцом $(p \times p)$-матриц из $\mathbb{R}_p^p$ с естественными операциями матричного сложения и умножения на $(p \times p)$-матрицу слева. Введем понятие подмодуля следующим образом.

Определение 1. Подмодулем $\mathcal{L}$ модуля $\mathbb{R}_n^p$ называется подмножество $\mathbb{R}_n^p$, замкнутое относительно операций матричного сложения и умножения на $(p \times p)$-матрицу слева:

1. $(X + Y) \in \mathcal{L}$ для любых $X, Y \in \mathcal{L}$.

2. $BX \in \mathcal{L}$ для любых $X \in \mathcal{L}, B \in \mathbb{R}_p^p$.

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 12-01-00350.

[2]Кашицын Павел Александрович, pavel.kash@gmail.com, аспирант, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Более подробно о теории матричных модулей и их применении в многомерном анализе изложено в работе [1].

Линейной гипотезой в многомерной линейной модели

$$E(X) = M \in \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ — заданный линейный подмодуль $\mathbb{R}_n^p$, назовем гипотезу

$$H : M \in \mathcal{L}_1,$$

против альтернативы

$$A : M \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1,$$

где подмодуль $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$.

Наряду с линейными гипотезами интерес представляют методы проверки, так называемых, многомерных конических гипотез вида

$$H_0 : E(X) = M \in \mathcal{K} \tag{2}$$

против альтернативы

$$H_1 : M \notin \mathcal{K}, \tag{3}$$

где $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$. Как будет показано, гипотезы вида (1) относятся к коническим при некоторых дополнительных ограничениях.

Далее мы предложим несколько возможных подходов к определению матричного конуса и исследуем методы проверки многомерных конических гипотез.

По умолчанию будем считать, что рассматриваемые нами конусы являются выпуклыми, если не сказано иное.

2. Матричный конус и его свойства.

Отметим, что линейный подмодуль $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}_n^p$ может быть задан следующим образом. Пусть L — линейное подпространство векторного пространства $\mathbb{R}_n^1$. Тогда соответствующий линейный подмодуль $\mathcal{L}$ может быть определен следующим образом:

$$\mathcal{L} = \left\{ X | \ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in L, i = \overline{1,p} \right\}.$$

Аналогичным образом определим матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$.

Определение 2. Пусть K — фиксированный выпуклый конус в линейном пространстве $\mathbb{R}_n^1$. Определим соответствующий выпуклый конус $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}_n^p$ следующим образом:

$$\mathcal{K} = \left\{ X | \ X = (f_1, \ldots, f_p)^T, f_i \in K, i = \overline{1,p} \right\}.$$

Множество $\mathcal{K}$ будем называть матричным конусом, соответствующим выпуклому конусу $K \subset \mathbb{R}_n^1$.

Перечислим основные свойства матричного конуса:

1. $(X_1 + X_2) \in \mathcal{K}$ для любых $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$.

2. $AX \in \mathcal{K}$ для любой $(p \times p)$-матрицы A с неотрицательными элементами и любого $X \in \mathcal{K}$.

Отсюда заключаем, что матричный конус $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_n^p$ является левым алгебраическим полумодулем над полукольцом $\mathbb{R}_{p+}^p$ квадратных $(p \times p)$-матриц с неотрицательными элементами.

Покажем, что указанные свойства 1 и 2 матричного конуса являются характеристическими.

Лемма 1. *Множество $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}_n^p$ является матричным конусом тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ удовлетворяет свойствам*

1. $(X_1 + X_2) \in \mathcal{K}$ *для любых* $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$.
2. $AX \in \mathcal{K}$ *для любой $(p \times p)$-матрицы A с неотрицательными элементами и любого* $X \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$, удовлетворяющий определению 2. Соответствующий ему выпуклый конус K в $\mathbb{R}_n^1$ инвариантен относительно операций сложения и умножения на неотрицательные числа. Отсюда следует, что свойтва 1 и 2 матричного конуса выполнены.

Пусть теперь для множества $\mathcal{K}$ выполнены свойства матричного конуса 1 и 2. Покажем, что тогда $\mathcal{K}$ удовлетворяет определению 2. Рассмотрим $X = (f_1, \ldots, f_p)^T, Y = (g_1, \ldots, g_p)^T \in \mathcal{K}$, $f_i, g_i \in \mathbb{R}_n^1$, $i = \overline{1,p}$. Достаточно показать, что тогда матрица, строки которой являются произвольными положительными линейными комбинациями f_i, g_i, $i = \overline{1,p}$, также принадлежит $\mathcal{K}$, т.е. матрица $Z = (\sum_{i=1}^p(\alpha_{1i}f_i + \beta_{1i}g_i), \ldots, \sum_{i=1}^p(\alpha_{pi}f_i + \beta_{pi}g_i))$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \geq 0$, принадлежит матричному конусу $\mathcal{K}$. Заметим, что $Z = AX + BY$, где $A, B \in \mathbb{R}_{p+}^p$, $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$. Поэтому в силу свойств 1 и 2 матричного конуса $Z \in \mathcal{K}$, что и требовалось доказать. □

Как и в случае конуса в векторном пространстве, определенный матричный конус $\mathcal{K}$ может быть задан множеством своих образующих.

Лемма 2. *Пусть V — множество образующих выпуклого конуса $K \subset \mathbb{R}_n^1$. Тогда для любого элемента X соответствующего матричного конуса $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_n^p$ существует набор вектор-строк $f_1, \ldots, f_m \in V$ и набор вектор-столбцов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_{1+}^p$ с неотрицательными координатами такие, что*

$$X = \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_m \cdot f_m.$$

Доказательство. Пусть $X = (g_1, \ldots, g_p)^T \in \mathcal{K}$, где $g_i \in K$, $i = \overline{1,p}$. Поскольку V является множеством образующих конуса K, то существуют $f_1, \ldots, f_m \in V$ и $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,m}$, что

$$g_i = \alpha_{i1} \cdot f_1 + \ldots + \alpha_{im} \cdot f_m, i = \overline{1,p}.$$

Пусть $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{pj})^T$, $j = \overline{1,m}$, тогда

$$X = \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_m \cdot f_m,$$

что и требовалось доказать. □

Рассмотрим следующее свойство введенного матричного конуса.

Лемма 3. *Пусть U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_1^p$, удовлетворяющие следующим свойствам:*

1. *Конусы U_0, U инвариантны относительно перестановки координат, т.е. если $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0p})^T \in U_0$ и $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{1p})^T \in U$, то для любой перестановки $\sigma \in S_p$ выполнено $\sigma(u_0) = (u_{0\sigma(1)}, \dots, u_{0\sigma(p)})^T \in U_0$ и $\sigma(u_1) = (u_{1\sigma(1)}, \dots, u_{1\sigma(p)})^T \in U$.*

2. *Конусы U_0, U инвариантны относительно умножения координат на неотрицательные числа, т.е. если $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0p})^T \in U_0$ и $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{1p})^T \in U$, то для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ выполнено $(\alpha_1 u_{01}, \dots, \alpha_p u_{0p})^T \in U_0$ и $(\alpha_1 u_{11}, \dots, \alpha_p u_{1p})^T \in U$.*

Рассмотрим множество $(p \times n)$-матриц $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^p_n$:

$$\mathcal{K} = \{X |\ X = (v_1, \dots, v_n), v_1 \in U_0, v_i = v_1 + \sum_{j=2}^{i} u_j, u_j \in U, i = \overline{2, n}\}. \tag{4}$$

Тогда множество $\mathcal{K}$, определенное таким образом, является матричным конусом.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что достаточно показать выполнение свойств 1 и 2 для введенного нами множества $\mathcal{K}$. Инвариантность относительно матричного сложения следует непосредственно из того, что U_0, U — выпуклые конусы.

Для доказательства инвариантности относительно умножения на $(p \times p)$-матрицу с неотрицательными элементами слева достаточно показать, что этим свойством обладают выпуклые конусы U_0, U. Таким образом, достаточно доказать следующую лемму 4, из которой будет следовать требуемое утверждение. □

Лемма 4. *Пусть U — выпуклый конус в $\mathbb{R}^p_1$. Тогда конус U инвариантен относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа тогда и только тогда, когда U инвариантен относительно линейных преобразований, матрицы которых имеют неотрицательные элементы.*

Доказательство. Пусть конус U инвариантен относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. Рассмотрим $(p \times p)$-матрицу $A = (\alpha_{ij})$ с неотрицательными элементами. Тогда для $u \in U$ вектор Au может быть представлен как сумма p векторов из U, которые могут быть получены путем перестановки координат вектора u и умножения их на неотрицательные числа.

Пусть теперь конус U инвариантен относительно умножения на $(p \times p)$-матрицы с неотрицательными элементами. Тогда для любых $u = (u_{11}, \dots, u_{1p})^T \in U$ и $1 \leq k \leq p$, $1 \leq m \leq p$ существует матрица A с неотрицательными элементами, что $Au = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, u_{1k}, 0, \dots, 0)^T$. Воспользовавшись теперь выпуклостью конуса U получаем, что U инвариантен относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. □

Из доказанного выше следует следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^p_n$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^p_1$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^p_1$, инвариантные относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. Тогда $\mathcal{K}$ — матричный конус в $\mathbb{R}^p_n$.*

Из леммы 5 следует, что матричный конус $\mathcal{K}$, состоящий из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \dots, x_n)$, может быть задан с помощью системы неравенств:

$$x_1 \prec \ldots \prec x_n, \tag{5}$$

где $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, и выпуклые конусы U_0, U инвариантны относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа.

Опишем структуру конусов в $\mathbb{R}_1^p$, которые инвариантны относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа.

Лемма 6. *Пусть выпуклый конус U в $\mathbb{R}_1^p$ инвариантен относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа. Тогда этот конус является одним из следующих:*

1. *пространство $\mathbb{R}_1^p$;*
2. *положительный ортант;*
3. *отрицательный ортант;*
4. *точка $\{0\}$.*

Доказательство. Если выпуклый конус U не содержит ни одного луча, то U есть точка $\{0\}$. Далее будем считать, что U содердит хотя бы один луч с направляющим вектором u. Теперь возможны три случая:

1. Вектор u имеем положительные и отрицательные координаты. В этом случае в силу инвариантности U относительно перестановки координат и умножения координат на неотрицательные числа конус U совпадает с пространством $\mathbb{R}_1^p$.

2. Все векторы, принадлежащие U, имеют неотрицательные координаты. Тогда в силу инвариантности U относительно умножения координат на неотрицательные числа конус U совпадает с положительным ортантом.

3. Все векторы, принадлежащие U, имеют неположительные координаты. Тогда в силу инвариантности U относительно умножения координат на неотрицательные числа конус U совпадает с отрицательным ортантом. □

3. Обобщенный матричный конус и его свойства.

В связи с тем, что множество матричных конусов, которые могут быть заданы неравенством 7, ограничено леммой 6, возникает необходимость расширить определение матричного конуса. Это возможно в случае перехода от полукольца $\mathbb{R}_{p+}^p$ к полукольцам, содержащимся в нем.

Введем следующие обозначения:

1. D_p — полукольцо диагональных $(p \times p)$-матриц с неотрицательными элементами.
2. E_p — полукольцо $(p \times p)$-матриц вида λI_p, $\lambda \geq 0$, где I_p — тождественный оператор.

Отметим, что имеет место вложение полуколец:

$$E_p \subset D_p \subset \mathbb{R}_{p+}^p. \tag{6}$$

Определим соответствующие обобщенные матричные конусы:

Определение 3. Обобщенным матричным конусом $\mathcal{K}_D \subset \mathbb{R}_n^p$ называется левый алгебраический полумодуль над полукольцом D_p.

Определение 4. Обобщенным матричным конусом $\mathcal{K}_E \subset \mathbb{R}_n^p$ называется левый алгебраический полумодуль над полукольцом E_p.

Из определений следует, что матричные конусы $\mathcal{K}_D$ и $\mathcal{K}_E$ инвариантны относительно сложения и умножения слева на $(p \times p)$-матрицы из полуколец D_p и E_p соответственно.

В силу вышесказанного для определенного обобщенного матричного конуса $\mathcal{K}_D$ выполнено следующее свойство.

Лемма 7. *$\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p тогда и только тогда, когда существует набор выкуклых конусов $C_1, \ldots, C_p \subset \mathbb{R}_n^1$ таких, что*

$$\mathcal{K}_D = \left\{X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in C_i, i = \overline{1,p}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p, и C_k, $k = \overline{1,p}$ — подмножество $\mathbb{R}_n^1$, состоящее из k-х строк матриц, входящих в $\mathcal{K}_D$. Тогда из определения 3 следует, что C_k — выпуклый конус.

Пусть теперь $\mathcal{K}_D = \left\{X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in C_i, i = \overline{1,p}\right\}$, где C_i, $i = \overline{1,p}$ — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_n^1$. Тогда легко видеть, что множество $\mathcal{K}_D$ инвариантно относительно матричного сложения и умножения на диагональные $(p \times p)$-матрицы слева, а значит, является полумодулем над полукольцом D_p, что и требовалось доказать. □

Для $(p \times n)$-матрицы $X = (x_1, \ldots, x_n)$ введем понятие *векторизации* матрицы:

$$vec(X) = (x_1^T, \ldots, x_n^T)^T,$$

т.е. $vec(X)$ является (pn)-вектором, составленным из столбцов матрицы X.

Легко видеть, что выполнена следующая лемма.

Лемма 8. *Множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_n^p$ является обобщенным матричным конусом над полукольцом E_p тогда и только тогда, когда множество $vec(\mathcal{K})$ является выпуклым конусом в $\mathbb{R}_1^{pn}$.*

Для обобщенных матричных конусов также выполнена лемма 5, однако ее условия можно ослабить следующим образом.

Лемма 9. *Пусть множество $\mathcal{K}_D \subset \mathbb{R}_n^p$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}_1^p$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_1^p$, инвариантные относительно умножения координат на неотрицательные числа. Тогда $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p в $\mathbb{R}_n^p$.*

Лемма 10. *Пусть множество $\mathcal{K}_E \subset \mathbb{R}_n^p$ состоит из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}_1^p$, что $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$, где U_0, U — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_1^p$. Тогда $\mathcal{K}_E$ — обобщенный матричный конус над полукольцом E_p в $\mathbb{R}_n^p$.*

Из лемм 9 и 10 следует, что обобщенный матричный конус, состоящий из $(p \times n)$-матриц $X = (x_1, \ldots, x_n)$, может быть задан с помощью системы неравенств:

$$x_1 \prec \ldots \prec x_n, \tag{7}$$

где $x_1 \in U_0$, $(x_{i+1} - x_i) \in U$, $i = \overline{1, n-1}$.

В случае обобщенного конуса $\mathcal{K}_D$ выпуклые конусы U_0, U инвариантны относительно умножения координат на неотрицательные числа.

В случае обобщенного конуса $\mathcal{K}_E$ выпуклые конусы U_0, U произвольны.

4. Проекции на матричные конусы.

Пусть Q — положительно определенная $(n \times n)$-матрица. Определим скалярное произведение двух векторов $x, y \in \mathbb{R}_n^1$ следующим образом:

$$\langle x, y \rangle = xQy^T.$$

В таком случае будем говорить, что скалярное произведение определяется матрицей Q.

Пусть M — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}_n^1$. *Двойственным множеством* к M, или *полярой* множества M, называют

$$M^\perp = \left\{ y |\ y \in \mathbb{R}_n^1, \langle y, x \rangle \leq 1, x \in M \right\}.$$

Если K — замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}_n^1$, то двойственное ему множество $K^\perp$ можно записать следующим образом

$$K^\perp = \left\{ y |\ y \in \mathbb{R}_n^1, \langle y, x \rangle \leq 0, x \in K \right\}.$$

Проекцией v на замкнутое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}_n^1$, в частности на конус, называют ближайшую к v точку из M. Ясно, что такая точка единственна. Проекцию v на M обозначим $proj_M(v)$.

Имеет место следующая лемма, которая будет использована в дальнейшем:

Лемма 11. *Если K — замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}_n^1$, то любой вектор v можно единственным образом представить в виде*

$$v = proj_K(v) + proj_{K^\perp}(v). \tag{8}$$

Дадим определение двойственного матричного конуса.

Определение 5. Пусть K — выпуклый конус в $\mathbb{R}_n^1$ и $\mathcal{K}$ — соответствующий ему матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$. Тогда двойственным конусом к конусу $\mathcal{K}$ называется:

$$\mathcal{K}^\perp = \left\{ X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in K^\perp, i = \overline{1, p} \right\}.$$

Аналогичным образом можно определить конус в $\mathbb{R}_n^p$, который является двойственным к обобщенному матричному конусу над полукольцом D_p.

Определение 6. Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p, заданный в виде:

$$\mathcal{K}_D = \left\{ X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in C_i, i = \overline{1, p} \right\},$$

где $C_1, \ldots, C_p$ — набор выпуклых конусов в $\mathbb{R}_n^1$. Тогда двойственным конусом к конусу $\mathcal{K}_D$ называется:

$$\mathcal{K}_D^\perp = \left\{ X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in C_i^\perp, i = \overline{1, p} \right\}.$$

Далее будем работать с обобщенными матричными конусами $\mathcal{K}_D$, заданными в виде

$$\mathcal{K}_D = \left\{ X |\ X = (g_1, \ldots, g_p)^T, g_i \in C_i, i = \overline{1, p} \right\}, \tag{9}$$

где $C_1, \ldots, C_p$ — набор замкнутых выпуклых конусов в $\mathbb{R}_n^1$. При этом, если не оговорено иное, будем подразумевать, что аналогичное выполнено и для обычных матричных конусов с заменой $C_i = K$, $i = \overline{1, p}$.

Введем понятие проекции на обобщенный матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$.

Определение 7. Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус в $\mathbb{R}_n^p$ над полукольцом D_p, заданный в (9). Тогда для $X = (f_1, \ldots, f_p)^T \in \mathbb{R}_n^p$, $f_i \in \mathbb{R}_n^1$, $i = \overline{1,p}$ проекцией на конус $\mathcal{K}_D$ называется

$$proj_{\mathcal{K}_D}(X) = (proj_{C_1}(f_1), \ldots, proj_{C_p}(f_p))^T.$$

Из соответствующих утверждений для линейного пространства $\mathbb{R}_n^1$ получаем следующие леммы:

Лемма 12. *Если $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p, заданный в* (9)*, то любой элемент X можно единственным образом представить в виде*

$$X = proj_{\mathcal{K}_D}(X) + proj_{\mathcal{K}_D^\perp}(X).$$

Лемма 13. *Если $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p, то проекция матрицы X на $\mathcal{K}_D$ обладает следующим экстремальным свойством:*

$$\min_{Y \in \mathcal{K}_D} Tr\left[(X-Y)(X-Y)^T\right] =$$

$$= Tr\left[(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))^T\right] = Tr\left[proj_{\mathcal{K}_D^\perp}(X) proj_{\mathcal{K}_D^\perp}(X)^T\right].$$

Доказательство. Заметим, что для $(p \times n)$-матрицы Z выражение $Tr(ZZ^T)$ есть сумма квадратов длин вектор-строк, образующих матрицу Z или, что то же самое, равно квадрату длины вектора $vec(Z^T)$. Таким образом, в силу определения проекции на замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}_n^1$ имеем:

$$\min_{Y \in \mathcal{K}_D} Tr\left[(X-Y)(X-Y)^T\right] = Tr\left[(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))^T\right].$$

Далее из леммы 11 заключаем, что

$$Tr\left[(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))(X - proj_{\mathcal{K}_D}(X))^T\right] = Tr\left[proj_{\mathcal{K}_D^\perp}(X) proj_{\mathcal{K}_D^\perp}(X)^T\right].$$

Утверждение леммы полностью доказано. □

5. Конические гипотезы.

Рассмотрим выборку из n гауссовских случайных p-мерных векторов $x_1, \ldots, x_n$, где $x_i = (\xi_i + m_i) \sim N_p(m_i, q_{ii} \cdot \Sigma)$, $\Sigma > 0$, $i = \overline{1,n}$. Составим случайную $(p \times n)$-матрицу $X = \Xi + M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $M = E(X) = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Будем предполагать, что

$$vec(X) = (x_1^T, \ldots, x_n^T)^T \sim N_{p \times n}(vec(M), Q \otimes \Sigma), \tag{10}$$

где $Q \otimes \Sigma$ обозначает произведение Кронекера двух положительно определенных матриц Q и Σ. В случае, если положительно определенная матрица Q совпадает с λI_n, $\lambda > 0$, гауссовские векторы x_i, $i = \overline{1,n}$ являются независимыми.

Нашей целью является построение статистики для проверки гипотезы

$$H_0 : M \in \mathcal{K}_D \tag{11}$$

против альтернативы

$$H_1 : M \notin \mathcal{K}_D, \tag{12}$$

где $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p.

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n) = (g_1, \ldots, g_p)^T$. Тогда в силу предположения (10) вектор-строки g_i имеют нормальное распределение $g_i \sim N_n(l_i, \sigma_{ii} \cdot Q)$, $i = \overline{1,p}$. Заметим, что согласно определению 12, проектор B в $\mathbb{R}^p_n$ действует по правилу:

$$Y = B(X) = (B_1(g_1), \ldots, B_p(g_p))^T = (f_1, \ldots, f_p)^T, \tag{13}$$

где B_i, $i = \overline{1,p}$ — набор проекторов в линейном пространстве $\mathbb{R}^1_n$.

Распределение критической статистики опишем в случае, когда рассматриваемый в (11) матричный конус является многогранным.

Определение 8. Будем называть обобщенный матричный конус $\mathcal{K}_D$ из (9) многогранным, если каждый соответствующий выпуклый конус C_i, $i = \overline{1,p}$ является многогранным.

Введем понятие фасетки выпуклого многогранного конуса C в линейном пространстве $\mathbb{R}^1_n$, которое будет использоваться в дальнейшем (подробнее см. [2]).

Определение 9. Фасетка $Cone(G(k), F(n-k))$ выпуклого многогранного конуса C представляет собой геометрическое место точек пространства, проекции которых на конус $C^\perp$ и на конус C попадают, соответственно, на грани $G(k) \subset C^\perp$ размерности k и $F(n-k) \subset C$ размерности $(n-k)$.

Отметим, что если $x \in Cone(G(k), F(n-k))$, то

$$proj_{C^\perp}(x) = proj_{L(G(k))}(x), proj_C(x) = proj_{L(F(n-k))}(x),$$

где $L(G(k))$ и $L(F(n-k))$ обозначают линейные подпространства, порожденные гранями $G(k)$ и $F(n-k)$ соответственно.

Заметим, что в зависимости от того, какой фасетке конуса принадлежит строка g_i, $i = \overline{1,p}$ матрицы X, будет зависеть, на грань какой размерности многогранного конуса C_i, $i = \overline{1,p}$ она проецируется.

Далее мы определим критическую статистику для случая, когда матрицы Q и Σ заданы с точностью до неизвестных множителей q^2 и σ^2, для каждого из которых есть независимая оценка $\hat{q}^2$ и $\hat{\sigma}^2$.

6. Критическая статистика в случае матриц Q, Σ, заданных с точностью до неизвестных множителей.

Пусть матрицы, определяющие ковариационную структуру X, заданы с точностью до неизвестных множителей q^2 и σ^2, т.е. равны $q^2 Q$ и $\sigma^2 \Sigma$ соответственно. Пусть для q^2 дана не зависящая от X оценка $\hat{q}^2$, и для σ^2 дана не зависящая от X и $\hat{q}^2$ оценка $\hat{\sigma}^2$, причем

$$k\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \chi^2(k),\ l\hat{q}^2 = q^2 \chi^2(l).$$

В работе [5] показано, что распределение случайной матрицы X можно преобразовать следующим образом:

$$vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}} X Q^{-\frac{1}{2}}) \sim q \cdot \sigma \cdot N_{pn}(vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}} M Q^{-\frac{1}{2}}), I_{pn}). \tag{14}$$

Имеет место следующая лемма о линейной комбинации выпуклых конусов.

Лемма 14. *Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^p_1$ и $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Тогда множество*

$$C = t_1 \cdot C_1 + \ldots + t_k \cdot C_k$$

также является выпуклым конусом в $\mathbb{R}^p_1$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из следующих двух фактов:

1. Если $t \in \mathbb{R}$ и K — выпуклый конус в $\mathbb{R}_1^p$, то множество $t \cdot K$ также является выпуклым конусом в $\mathbb{R}_1^p$.

2. Если $K_1, \ldots, K_m$ — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_1^p$, то множество $K_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} K_i$ также является выпуклым конусом в $\mathbb{R}_1^p$.

□

Из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма 15. *Пусть $\mathcal{K}_1$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p и $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_n^p$. Тогда множество $\mathcal{K}_2 = A\mathcal{K}_1$ также является обобщенным матричным конусом над полукольцом D_p.*

Доказательство. По лемме 7 существуют C_i, $i = \overline{1, p}$ — выпуклые конусы в $\mathbb{R}_1^n$ такие, что $\mathcal{K}_1 = (\mathrm{C}_1, \ldots, C_p)^T$. Тогда

$$\mathcal{K}_2 = (\sum_{j=1}^{p} \alpha_{1j} \cdot C_j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_{pj} \cdot C_j)^T.$$

По лемме 14 каждое из множеств $\sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \cdot C_j$ является выпуклым конусом в $\mathbb{R}_1^n$, а значит, по лемме 7 множество $\mathcal{K}_2 = A\mathcal{K}_1$ является обобщенным матричным конусом над полукольцом D_p, что и требовалось доказать. □

Также покажем, что класс обобщенных матричных конусов $\mathcal{K}_D$ над полукольцом D_p инвариантен относительно умножения на $(n \times n)$-матрицу справа.

Лемма 16. *Пусть $\mathcal{K}_D$ — обобщенный матричный конус над полукольцом D_p. Тогда для любой $(n \times n)$-матрицы A множество $\mathcal{K}_D A$ также является обобщенным матричным конусом над полукольцом D_p.*

Доказательство. Для доказательства верности утверждения леммы достаточно показать, что для любых матриц $X, Y \in \mathcal{K}_D A$, $D \in D_p$ выполнено:

1. $X + Y \in \mathcal{K}_D A$;

2. $DX \in \mathcal{K}_D A$.

Рассмотрим $X, Y \in \mathcal{K}_D A$, $D \in D_p$. Пусть $X = X_1 A, Y = Y_1 A$, где $X_1, Y_1 \in \mathcal{K}_D$. Тогда

1. $X + Y = X_1 A + Y_1 A = (X_1 + Y_1)A \in \mathcal{K}_D A$;

2. $DX = D(X_1 A) = (DX_1)A \in \mathcal{K}_D A$,

что и требовалось доказать. □

В качестве критической статистики для проверки гипотезы (11) против альтернативы (12) рассмотрим

$$H(X) = \hat{q}^{-2} \cdot \hat{\sigma}^{-2} \cdot \left[proj_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_D)^{\perp}}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)\right] Q^{-1} \left[proj_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_D)^{\perp}}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)\right]^T, \tag{15}$$

где проектирование относится к скалярному произведению, определяемому матрицей Q^{-1}. Для доказательства основной теоремы о распределении критической статистики нам понадобится следующая лемма, доказательство которой приведено в работе [2].

Лемма 17. *Пусть $x = a+\xi$ — случайный гауссовский p-вектор, имеющий распределение $N_p(a, Q)$, и C — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^p_1$. Тогда для проверки гипотезы*

$$H_0 : a \in C$$

против альтернативы

$$H_1 : a \notin C,$$

может быть использована статистика $D(x) = \|proj_{C^\perp}(x)\|^2$, обладающая следующими свойствами:

1. *При гипотезе для $z > 0$*

$$P(D(x) \geq z) \leq P(D(\xi) \geq z).$$

2. *Если C — многогранный конус, то для $z \geq 0$*

$$P(D(\xi) \geq z) = \sum_{m=0}^{p} g_m P(\chi^2(m) \geq z),$$

   где случайная величина $\chi^2(m)$ имеет распределение хи-квадрат с m степенями свободы и $\chi^2(0) = 0$.

3. *Пусть ковариационная матрица Q задана с точностью до неизвестного множителя q^2, т.е. равна q^2Q. Пусть для q^2 есть не зависящая от x оценка s^2, причем $Ns^2 \sim q^2\chi^2(N)$. Тогда для проверки рассматриваемой гипотезы может быть использована статистика*

$$E(x) = s^{-2} \left\|proj_{C^\perp}(x)\right\|^2,$$

   где норма и проектирование относятся к скалярному произведению, определяемому матрицей Q^{-1}.

   Если при этом C — многогранный конус, то для $z \geq 0$

$$P(E(\xi) \geq z) = \sum_{m=0}^{p} g_m P(m \cdot F(m, N) \geq z),$$

   где $F(m_1, m_2)$ обозначает распределение Фишера со степенями свободы m_1 и m_2. По определению считаем, что $F(0, m_2) = 0$.

4. *Коэффициенты g_m, $m = \overline{0, p}$ зависят только от конуса C.*

Теперь докажем основную теорему о распределении тестовой статистики $Tr(H(X))$.

Теорема 1. *Пусть* $X = \Xi + M = (x_1, \ldots, x_n)$ — $(p \times n)$*-матрица, составленная из случайных* p*-векторов такая, что*

$$vec(X) \sim q \cdot \sigma \cdot N_{pn}(vec(M), Q \otimes \Sigma).$$

Тогда статистика $Tr(H(X))$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *При гипотезе* (11) *для* $r \geq 0$

$$P\left[Tr(H(X)) \geq r\right] \leq P\left[Tr(H(\Xi)) \geq r\right].$$

2. *Если матричный конус* $\mathcal{K}_D$ *является многогранным, то для* $r \geq 0$

$$P\left[Tr(H(\Xi)) \geq r\right] = \sum_{i=0}^{p \cdot n} d_i \cdot P\left[l \cdot i \cdot \frac{F(i,k)}{\chi^2(l)} \geq r\right],$$

где $F(i,k) = 0$ *при* $i = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 15 множество $\mathcal{K} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_D$ является обобщенным матричным конусом над полукольцом D_p. Заметим, что $\hat{q}^2 \cdot \hat{\sigma}^2 \cdot Tr(H(X))$ есть квадрат нормы вектора

$$vec(proj_{\mathcal{K}^\perp}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X))^T,$$

где норма вектора определяется матрицей $I_p \otimes Q^{-1}$, а проектирование матрицей Q^{-1}. Теперь осталось заметить, что $vec(\mathcal{K}^\perp)^T$ является выпуклым конусом в $\mathbb{R}_1^{pn}$ и, кроме того,

$$vec(proj_{\mathcal{K}^\perp}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X))^T = proj_{vec(\mathcal{K}^\perp)^T}(vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)^T),$$

где проектирование в правой части относится к скалярному произведению, определяемому матрицей $I_p \otimes Q^{-1}$. Далее, применяя лемму 17 к вектору $proj_{vec(\mathcal{K}^\perp)^T}(vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)^T)$, получаем требуемое утверждение, поскольку из (14) имеем:

$$vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)^T \sim q \cdot \sigma \cdot N_{pn}(vec(\Sigma^{-\frac{1}{2}}M)^T, I_p \otimes Q).$$

Утверждение теоремы полностью доказано. □

Список литературы

[1] *Тюрин Ю.Н.*, Многомерный статистический анализ: геометрическая теория // Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, вып. 1, с. 36–58.

[2] *Тюрин Ю.Н.*, Проверка конических гипотез // Математика. Механика. Информатика: тр. конф., посвящ. 10-летию РФФИ. М. : Физматлит, 2005, с. 289–307.

[3] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 560 с.

[4] *Kashitsyn P.A.*, Multivariate model with a Kronecker product covariance structure: S.N.Roy method of estimation // Math. Methods Statist., 2011, v. 20, №1, p.75–78.

[5] *Кашицын П.А.*, Многомерная модель с коррелированными наблюдениями // Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, вып. 3, с. 602–606.

[6] *Robertson T., Wright F.T., Dykstra R.L.*, Order restricted statistical inference. Wiley, 1988, 544 p.

[7] *Cohen A., Kemperman J.H.B, Sackrowitz H.B.*, Properties of Likelihood Inference for Order Restricted Models // J. of Mult. Anal., 2000, v. 72, №1, p. 50–77.

[8] *Robertson T., Wright F.T.*, On approximation of the level probabilities and associated distributions in order restricted inference // Biometrika, 1983, v. 70, №3, p. 597–606.

Максимумы экстремального дробового шума в непрерывном и дискретном времени[1]

Лебедев А.В.[2]

Рассматривается процесс экстремального дробового шума. Предполагается, что распределение амплитуд имеет правильно меняющийся хвост. Найдена асимптотика хвоста предельного распределения процесса. Получено нетривиальное совместное предельное распределение максимумов по непрерывному и дискретному времени с общей нормировкой. Вычислен экстремальный индекс процесса с дискретным временем.

1 Введение

Асимптотическое поведение максимумов процессов дробового шума с тяжелыми хвостами ранее исследовалось автором в [1, 2] при различных предположениях.

Экстремальный дробовой шум получается из классического путем замены операции суммирования на максимум или минимум [3]. Отмечены приложения такого рода процессов и полей в геостатистике, стереологии, распознавании образов и др. В работе автора [4] рассматривалась модель топа новостей на основе экстремального дробового шума (описывающего динамику популярности).

Рассмотрим процесс

$$X(t) = \bigvee_{k=1}^{\infty} \xi_k f(t-\tau_k), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\vee$ — операция взятия максимума, ξ_k — независимые неотрицательные случайные величины с одинаковой функцией распределения A, τ_k — точки пуассоновского потока интенсивности $\lambda > 0$; $\{\xi_k\}$ и $\{\tau_k\}$ независимы; f — измеримая функция, обладающая следующими свойствами:

а) $f(t) = 0$, $t < 0$;

б) $f(0) = 1$;

в) $0 \leq f(t) \leq 1$, $\forall t > 0$;

г) f монотонно невозрастает при $t \geq 0$.

Обозначим $X_n = X(n)$. Заметим, что в частном случае, когда $f(t) = e^{-ct}$, $t \geq 0$, последовательность X_n представляет собой процесс максимум-авторегрессии первого порядка [5, 6]:

$$X_n = aX_{n-1} \vee \tilde{\xi}_n, \quad X_0 = 0, \quad a = e^{-c} \in (0,1),$$

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Лебедев Алексей Викторович, avlebed@yandex.ru, доцент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

где инновации $\tilde{\xi}_n$, $n \geq 1$, независимы и распределены как X_1.

Для подобных моделей отмечены приложения в описании систем накопления солнечной тепловой энергии, динамики воды во фьордах, полезности промышленного оборудования, эффектов эрозии и др.

В [5] изучались вопросы о стационарности последовательностей максимум-авторегрессии, взаимосвязи между стационарным распределением и распределением инноваций, свойства экстремумов последовательностей. В [6] введена более общая нестационарная максимум-авторегрессия со случайным множителем, изучались свойства максимумов и точечных процессов превышения высокого уровня. Степенная максимум-авторегрессия рассматривалась в [7].

Вопросы статистического анализа и прогнозирования процессов максимум-авторегрессии были затронуты автором в [8, 9].

Введем обозначения для максимумов в непрерывном и дискретном времени:

$$Y_n = \sup_{t \in [0,n]} X(t), \quad Z_n = \bigvee_{m=1}^{n} X_m.$$

Далее будем предполагать, что функция распределения амплитуд имеет правильно меняющийся хвост, т.е. $\bar{A}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$, L — медленно меняющаяся функция [10].

В этом предположении изучается асимптотическое поведение максимумов Y_n, Z_n вместе и по отдельности при $n \to \infty$.

Вычислен экстремальный индекс θ последовательности X_n. Наличие такого индекса означает, в частности, что максимум n членов последовательности ведет себя асимптотически (при $n \to \infty$) как максимум θn независимых случайных величин с тем же распределением. При $\theta \in (0,1)$ превышения высокого уровня происходят не по одиночке, а образуют группы (кластеры) со средним размером $1/\theta$. Эта проблематика изучается теорией экстремумов [11].

Особый интерес представляет следующий вопрос. Предположим, что мы наблюдаем процесс $X(t)$ не постоянно, а лишь периодически (через единичные промежутки времени). Можно ли по максимуму наблюдений в моменты $1, 2, \ldots, n$ оценить величину максимума на всем отрезке времени $[0,n]$? Установлено, что для стационарных гауссовских процессов эти максимумы оказываются асимптотически независимы [12] и ответ на данный вопрос отрицательный. Однако в нашем случае совместное предельное распределение максимумов (при общей нормировке), оказывается нетривиальным и поэтому может использоваться для оценивания.

2 Основные результаты

Введем обозначения

$$\gamma = \int_0^1 f(t)^\alpha \, dt; \quad \gamma_\infty = \int_0^\infty f(t)^\alpha \, dt.$$

Предполагается, что $\gamma > 0$. Введем дополнительное условие:

(*) *Интеграл $\int_0^\infty f(t)^\delta \, dt$ сходится при некотором $\delta < \alpha$, либо при $\delta = \alpha$, но при этом $L(x)$ не возрастает на бесконечности.*

Заметим, что из условия (*) в любом случае следует $\gamma_\infty < \infty$.

Теорема 1. *Если выполнено условие (*), то* $X_n \xrightarrow{d} X^*$, $n \to \infty$, *где* $\mathbf{P}(X^* > x) \sim \lambda\gamma_\infty \bar{A}(x)$, $x \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $u(s)$, $s > 0$, *— неотрицательная функция, такая, что* $s\bar{A}(u(s)) \to 1$, $s \to \infty$. *Тогда*

$$\frac{(Y_n, Z_n)}{u(\lambda n)} \xrightarrow{d} (Y^*, Z^*), \quad n \to \infty,$$

где совместное распределение определяется формулой

$$\mathbf{P}(Y^* \le y, Z^* \le z) = \exp\left\{-\int_0^1 \left(y^{-\alpha} \vee z^{-\alpha} f(t)^\alpha\right) dt\right\}, \quad y, z > 0. \tag{2}$$

Заметим, что функция $u(s)$ заведомо существует и является правильно меняющейся с показателем $1/\alpha$, т.е. $u(s) \sim s^{1/\alpha} L_2(s)$, $s \to \infty$, где $L_2(s)$ — медленно меняющаяся функция.

Следствие 1. $\mathbf{P}(Y_n/u(\lambda n) \le y) \to \exp\{-y^{-\alpha}\}$, $\mathbf{P}(Z_n/u(\lambda n) \le z) \to \exp\{-\gamma z^{-\alpha}\}$, $n \to \infty$.

Таким образом, $Z^* \stackrel{d}{=} \gamma^{1/\alpha} Y^*$.

Напомним теперь определение экстремального индекса [11].

Пусть имеется стационарная случайная последовательность ζ_n, $n \ge 1$, с одномерной функцией распределения F, и для любого числа $\tau > 0$ существует последовательность $u_n(\tau)$ такая, что

$$n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau, \quad \mathbf{P}\left(\bigvee_{m=1}^{n} \zeta_m \le u_n(\tau)\right) \to e^{-\theta\tau}, \quad n \to \infty.$$

Тогда θ называется экстремальным индексом последовательности ζ_n. Эта величина, в принципе, может принимать любые значения на отрезке $[0,1]$. В частности, процесс максимум-авторегрессии [5, 6] дает типичный пример $\theta \in (0,1)$, причем размеры кластеров оказываются распределены геометрически.

Очевидно, определение экстремального индекса, данное выше, может быть продолжено и на нестационарные последовательности, имеющие предельное распределение, которое можно в таком случае принять за F.

Следствие 2. *Если выполнено условие (*), то экстремальный индекс последовательности* X_n *равен* $\theta = \gamma/\gamma_\infty$.

Обозначим $T_0 = \sup\{t > 0 : f(t) > 0\}$. Получаем, что $\theta < 1$ тогда и только тогда, когда $T_0 > 1$. При $T_0 \le 1$ случайные величины X_n оказываются просто независимыми.

Пример 1. Пусть $f(t) = e^{-ct}$, $t \ge 0$, тогда $\theta = 1 - e^{-c\alpha}$.

Пример 2. Пусть $f(t) = e^{-(ct)^2}$, $t \ge 0$, тогда $\theta = 2\Phi_0(c\sqrt{2\alpha})$, где $\Phi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$.

Пример 3. Пусть $f(t) = 1/(1+ct)^{1/\beta}$, $t \ge 0$, $0 < \beta < \alpha$, тогда $\theta = 1 - (1+c)^{1-\alpha/\beta}$.

Графики $\theta(c)$ в примерах 1–3 при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, представлены на рис. 1 сплошной линией, пунктиром и штрихпунктиром соответственно.

Далее будем предполагать, что на отрезке $[0,1]$ функция f непрерывна и строго убывает. Отсюда следует, в частности, $T_0 \ge 1$. Можно определить обратную функцию f^{-1}.

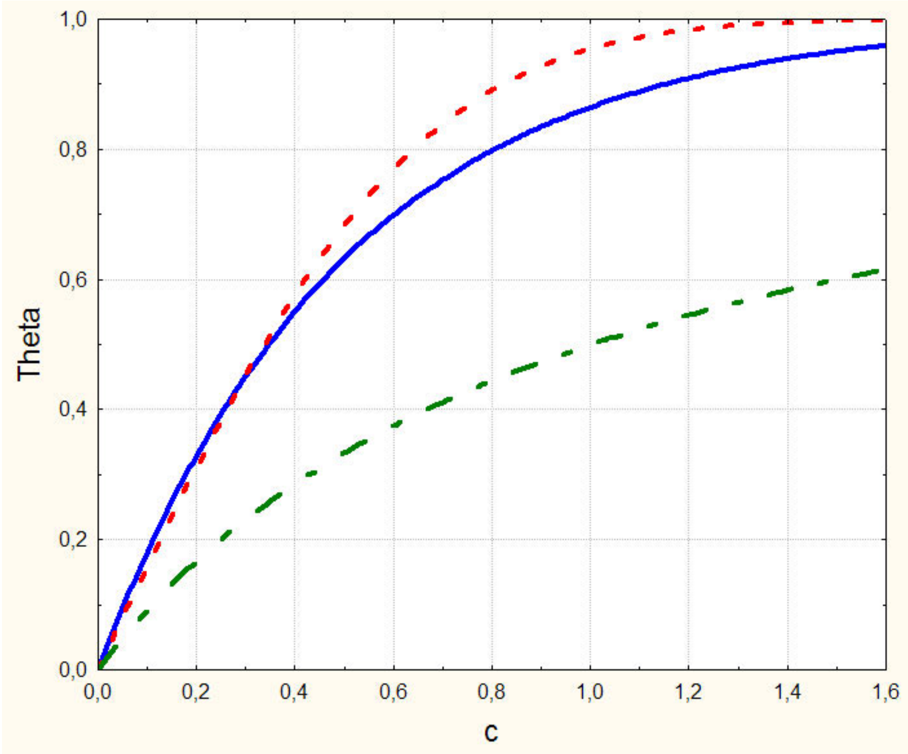

Рис. 1:

Тогда выражение под знаком экспоненты в правой части (2) раскрывается следующим образом:

$$\int_0^1 \left(y^{-\alpha} \vee z^{-\alpha} f(t)^\alpha\right) dt =$$
$$= \begin{cases} \gamma z^{-\alpha}, & 0 < s < f(1); \\ y^{-\alpha}(1-t_s) + z^{-\alpha}\displaystyle\int_0^{t_s} f(t)^\alpha\, dt, & f(1) \le s \le 1; \\ y^{-\alpha}, & s > 1; \end{cases} \tag{3}$$

где введены обозначения $s = z/y$, $t_s = f^{-1}(s)$. Наиболее содержательным здесь является случай $f(1) \le s \le 1$, поскольку всегда выполняются неравенства

$$f(1)Y_n \le Z_n \le Y_n, \quad f(1)Y^* \le Z^* \le Y^*.$$

Пусть U равномерно распределено на $[0,1]$. Обозначим функцию распределения случайной величины $f(U)$ через G, тогда $G(x) = 1 - f^{-1}(x)$, $x \in [f(1), 1]$; $G(x) = 0$, $x < f(1)$. Получаем эквивалентную запись

$$y^{-\alpha}(1-t_s) + z^{-\alpha}\int_0^{t_s} f(t)^\alpha\, dt = y^{-\alpha}G(s) + z^{-\alpha}\int_s^1 x^\alpha\, dG(x). \tag{4}$$

Кроме того, верно

$$\gamma = \int_0^1 x^\alpha\, dG(x).$$

Следствие 3. *Если* $f(1) \le s \le 1$, $z > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(Y^* \le y | Z^* = z) = \frac{1}{\gamma}\int_s^1 x^\alpha\, dG(x) \exp\left\{-z^{-\alpha}\int_0^s G(x)\, dx^\alpha\right\}$$

Пример 4. Пусть $f(t) = (1-t)^{1/\beta}$, $t \in [0,1]$, $\beta > 0$, тогда для любых $s \in [0,1]$, $z > 0$ верно

$$\mathbf{P}(Y^* \le y | Z^* = z) = (1 - s^{\alpha+\beta}) \exp\left\{ -z^{-\alpha} \frac{\alpha s^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \right\}.$$

Пример 5. Пусть $f(t) = e^{-ct}$, $t \ge 0$, тогда для любых $s \in [e^{-c}, 1]$, $z > 0$ верно

$$\mathbf{P}(Y^* \le y | Z^* = z) = \\ = \frac{1 - s^{\alpha}}{1 - e^{-c\alpha}} \exp\left\{ -z^{-\alpha} c^{-1} \left(s^{\alpha}(c - \alpha^{-1} + \ln s) + \alpha^{-1} e^{-c\alpha} \right) \right\}.$$

Пример 6. Пусть $f(t) = 1/(1+t)^{1/\beta}$, $t \ge 0$, $0 < \beta < \alpha$, тогда для любых $s \in [2^{-1/\beta}, 1]$, $z > 0$ верно

$$\mathbf{P}(Y^* \le y | Z^* = z) = \\ = \frac{1 - s^{\alpha-\beta}}{1 - 2^{1-\alpha/\beta}} \exp\left\{ -z^{-\alpha} \left(2s^{\alpha} + \frac{\beta 2^{1-\alpha/\beta} - \alpha s^{\alpha-\beta}}{\alpha - \beta} \right) \right\}.$$

Речь идет об условной вероятности того, что когда значение Z^* известно и равно z, оно составляет не менее чем долю s от Y^*.

Графики зависимости условной вероятности от s в примерах 4–6 при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $c = 1$, $z = 1$ представлены на рис. 2 сплошной линией, пунктиром и штрихпунктиром соответственно. Отметим, что все графики мало отличаются в области $s > 0,7$.

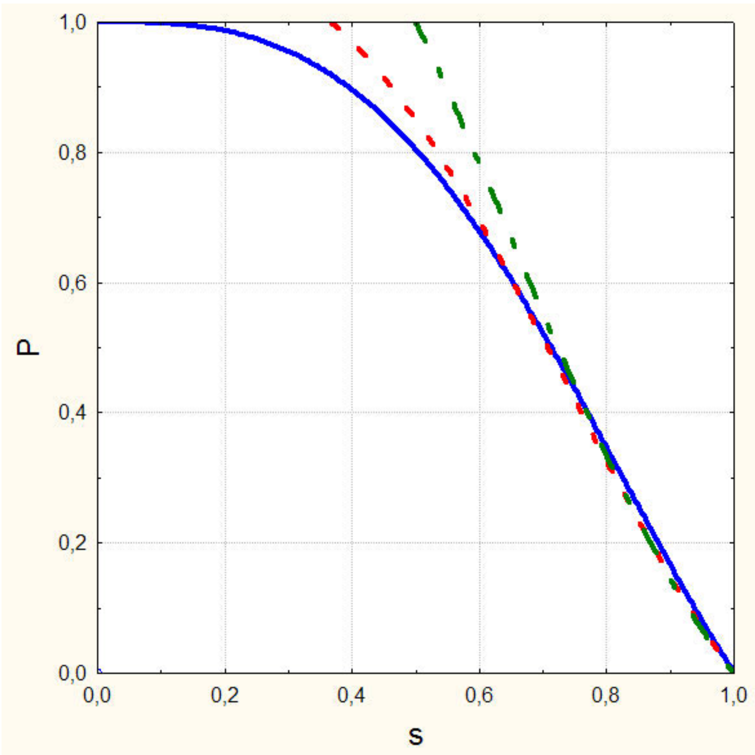

Рис. 2:

3 Леммы и доказательства

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся известным свойством пуассоновского потока, согласно которому на любом отрезке точки распределены равномерно и независимо, при условии, что число их там фиксировано. Получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n \le x) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^l e^{-\lambda n}}{l!} \left\{ \frac{1}{n} \int_0^n A\left(\frac{x}{f(t)}\right)\, dt \right\}^l = \exp\left\{ -\lambda \int_0^n \bar{A}\left(\frac{x}{f(t)}\right)\, dt \right\}.\end{aligned}$$

Используя теорему 2.6 [10, §2.3] об интегралах, содержащих правильно меняющиеся функции, можно показать, что при условии (*) сходится интеграл

$$\int_0^\infty \bar{A}\left(\frac{x}{f(t)}\right)\, dt,$$

так что существует предельное распределение при $n \to \infty$:

$$\mathbf{P}(X^* \le x) = \exp\left\{ -\lambda \int_0^\infty \bar{A}\left(\frac{x}{f(t)}\right)\, dt \right\}.$$

С помощью той же теоремы получаем

$$\mathbf{P}(X^* > x) \sim \lambda \int_0^\infty \bar{A}\left(\frac{x}{f(t)}\right)\, dt \sim \lambda \bar{A}(x) \int_0^\infty f(t)^\alpha\, dt, \quad x \to \infty.$$

□

Прежде чем доказывать теорему 2, докажем некоторые леммы.

Обозначим $K_m = \{k : \tau_k \in (m-1, m]\}$ и

$$\eta_m = \sup_{k \in K_m} \xi_k, \quad \chi_m = \bigvee_{k \in K_m} \xi_k f(m - \tau_k), \quad m \ge 1.$$

Заметим, что пары (η_m, χ_m) независимы и одинаково распределены.

Лемма 1.

$$(Y_n, Z_n) = \bigvee_{m=1}^{n} (\eta_m, \chi_m).$$

Доказательство. Имеем

$$Y_n = \sup\{\xi_k : \tau_k \in [0, n]\} = \bigvee_{m=1}^{n} \eta_m.$$

С другой стороны, в силу свойств f выполняются неравенства

$$\chi_m \le X_m \le \bigvee_{i=1}^{m} \chi_i, \quad m \ge 1,$$

откуда следует

$$Z_n = \bigvee_{m=1}^{n} X_m = \bigvee_{m=1}^{n} \chi_m.$$

□

Лемма 2. *Для любых $y, z > 0$ имеет место асимптотика*

$$1 - \mathbf{P}(\eta \le yr, \chi \le zr) \sim \lambda \bar{A}(r) \int_0^1 \left(y^{-\alpha} \vee z^{-\alpha} f(t)^\alpha\right) dt, \quad r \to \infty.$$

Доказательство. Воспользовавшись снова тем же свойством пуассоновского потока, как в доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\eta \le v, \chi \le w) = \\ &= \exp\left\{-\lambda \int_0^1 (1 - \mathbf{P}(\xi \le v, f(t)\xi \le w))\, dt\right\} = \\ &= \exp\left\{-\lambda \int_0^1 \bar{A}\left(v \wedge \frac{w}{f(t)}\right) dt\right\}, \quad v, w > 0,\end{aligned}$$

где через $\wedge$ обозначен минимум. Полагая $v = yr$, $w = zr$, имеем

$$\bar{A}\left(v \wedge \frac{w}{f(t)}\right) = \bar{A}\left(r\left(y \wedge \frac{z}{f(t)}\right)\right) \sim \bar{A}(r)\left(y \wedge \frac{z}{f(t)}\right)^{-\alpha}, \quad r \to \infty.$$

С помощью свойств правильно меняющихся функций [10] получаем отсюда утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 2. В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Y_n \le yu(\lambda n), Z_n \le zu(\lambda n)) = \mathbf{P}^n(\eta \le yu(\lambda n), \chi \le zu(\lambda n)) \to \\ &\to \exp\left\{-\int_0^1 \left(y^{-\alpha} \vee z^{-\alpha} f(t)^\alpha\right) dt\right\}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

□

Доказательство следствия 1. Поочередно устремляя в (2) аргументы y и z к бесконечности, получаем соответственно

$$\mathbf{P}(Y^* \le y) = e^{-y^{-\alpha}}, \quad \mathbf{P}(Z^* \le z) = e^{-\gamma z^{-\alpha}}, \quad y, z > 0.$$

□

Доказательство следствия 2. Для любого $\tau > 0$ положим $u_n(\tau) = (\tau/\gamma_\infty)^{-1/\alpha} u(\lambda n)$, тогда

$$n\mathbf{P}(X^* > u_n(\tau)) \to \tau, \quad \mathbf{P}(Z_n \le u_n(\tau)) \to e^{-(\gamma/\gamma_\infty)\tau}, \quad n \to \infty.$$

□

Доказательство следствия 3. Обозначим

$$H(y, z) = \mathbf{P}(Y^* \le y, Z^* \le z), \quad H_\infty(z) = \mathbf{P}(Z^* \le z) = e^{-\gamma z^{-\alpha}}, \quad y, z > 0.$$

По теореме 2 и (3), (4), а также с помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}H(y, z) &= \exp\left\{-z^{-\alpha}\left(s^\alpha G(s) + \int_s^1 x^\alpha \, dG(x)\right)\right\} = \\ &= \exp\{-z^{-\alpha}(\gamma + g(s))\}, \quad g(s) = \int_0^s G(x)\, dx^\alpha.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y^* \le y | Z^* = z) &= \frac{\partial H(y,z)/\partial z}{dH_\infty(z)/dz} = \\ &= \frac{\alpha z^{-(\alpha+1)}(\gamma + g(s)) - z^{-\alpha} y^{-1} g'(s)}{\alpha\gamma z^{-(\alpha+1)}} \exp\{-z^{-\alpha} g(s)\} = \\ &= \frac{\alpha(\gamma + g(s)) - s g'(s)}{\alpha\gamma} \exp\{-z^{-\alpha} g(s)\}.\end{aligned}$$

С учетом того, что $g'(s) = \alpha s^{\alpha-1} G(s)$, и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\alpha(\gamma + g(s)) - s g'(s)}{\alpha\gamma} = 1 - \frac{s^\alpha G(s) - g(s)}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\int_s^1 x^\alpha \, dG(x).$$

$\square$

Список литературы

[1] *Лебедев А.В.*, Максимумы рекуррентных случайных последовательностей. Случай тяжелых хвостов // Вестник МГУ. Сер.1. Матем. Мех., 2001, №3, с. 63–66.

[2] *Лебедев А.В.*, Экстремумы субэкспоненциального дробового шума // Матем. заметки, 2002, т. 71, №2, с. 227–231.

[3] *Heinrich L., Molchanov I.S.*, Some limit theorems for extremal and union shot-noise processes // Math. Nachr., 1994, v. 168, p. 139–159.

[4] *Лебедев А.В.*, Об одной модели топа новостей // Пробл. перед. информ., 2009, т. 45, №3, с. 98–105.

[5] *Alpuim M.T.*, An extremal Markovian sequence // J. Appl. Probab., 1989, v. 26, №2, p. 219–232.

[6] *Alpuim M.T., Catkan N.A., Hüsler J.*, Extremes and clustering of nonstationary max-AR(1) sequences // Stoch. Proc. Appl., 1995, v. 56, №1, p. 174–184.

[7] *Ferreira M., Canto e Castro L.*, Asymtotic and pre-asymptotic tail behavior of a power max-autoregressive model // ProbStat Forum, 2010, v. 3, p. 91–107. http://probstat.org.in/PSF-0610.pdf

[8] *Лебедев А.В.*, Статистический анализ MARMA-процессов первого порядка // Матем. заметки, 2008, т. 83, №4, с. 552–558.

[9] *Лебедев А.В.*, Нелинейное прогнозирование процессов максимум-авторегрессии // Матем. заметки, 2009, т. 85, №4, с. 636–640.

[10] *Сенета Е.*, Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

[11] *Лидбеттер М., Линдгрен Г, Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[12] *Piterbarg V.I.*, Discrete and continuous time extremes of Gaussian processes // Extremes, 2004, v. 7, p. 161–177.

О взаимосвязи между α-устойчивыми и максимум-устойчивыми распределениями[1]

Лебедев А.В.[2]

Рассматриваются три семейства коммутативных и ассоциативных операций, промежуточных между суммой и максимумом. С их помощью устанавливается связь между α-устойчивыми и максимум-устойчивыми распределениями.

1 Введение

Параллели между теорией сумирования и теорией экстремумов случайных величин давно и хорошо известны. В теории суммирования важными объектами изучения являются устойчивые распределения: гауссовское и α-устойчивые [1, 2, 3]. В теории экстремумов аналогичное место занимают максимум-устойчивые распределения трех экстремальных типов (Гумбеля, Фреше и Вейбулла) [4, 5]:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\};\\
&\Phi_\gamma(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}, \quad x > 0, \gamma > 0;\\
&\Psi_\gamma(x) = \exp\{-(-x)^{\gamma}\}, \quad x < 0, \gamma > 0.
\end{aligned}
$$

Обе теории в настоящее время развиваются относительно независимо. Однако еще в монографии В.М.Золотарева [6] была высказана идея построения единой теории для обобщенных операций суммирования, обладающих свойствами коммутативности и ассоциативности. Тогда сумма, максимум и другие аналогичные операции могут рассматриваться как частные случаи.

Ранее автором, в частности, рассматривались безгранично делимые и ветвящиеся случайные процессы с обобщенными операциями суммирования, в том числе стохастическими [7].

Возникает вопрос: нельзя ли построить «мост» между α-устойчивыми и максимум-устойчивыми распределениями? Для этого мы рассмотрим семейства коммутативных и ассоциативных операций, «промежуточных» между суммой и максимумом, а также устойчивые относительно них распределения, и получим из последних максимум-устойчивые предельным переходом.

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Лебедев Алексей Викторович, avlebed@yandex.ru, доцент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

2 Основные результаты

Введем операцию
$$x \oplus_\nu y = (x^\nu + y^\nu)^{1/\nu}; \quad x, y \geq 0, \nu > 0.$$
При $\nu = 1$ получаем обычную сумму, а при $\nu \to +\infty$ имеет место предел $x \oplus_\nu y \to \max\{x, y\}$.

На рис. 1 представлены графики линий уровня $x \oplus_\nu y = 1 \oplus_\nu 1$, различными видами пунктира. При возрастании ν от 1 до бесконечности кривые проходят путь от прямой (сумма) до прямого угла (максимум).

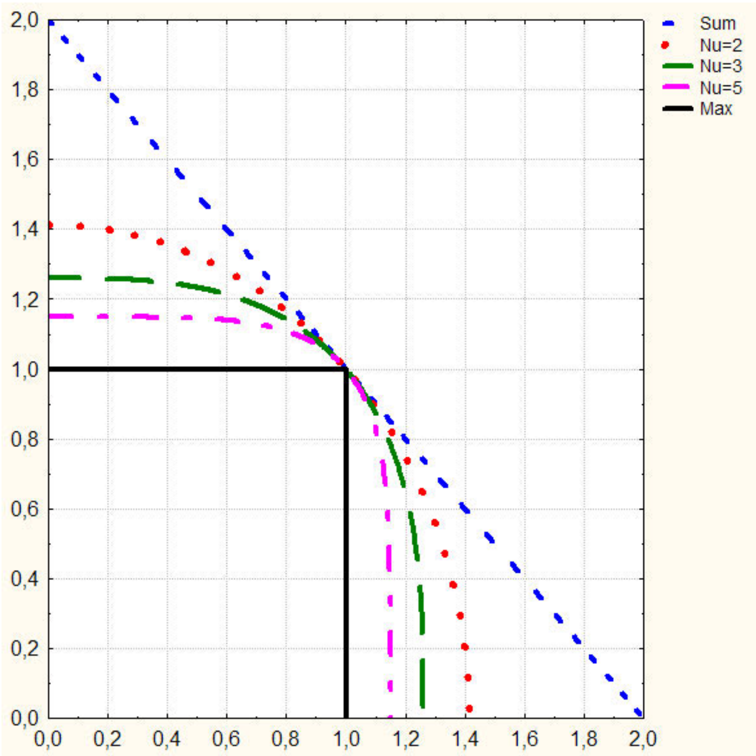

Рис. 1:

Теорема 1. *Пусть ξ_α, $0 < \alpha < 1$, — положительные α-устойчивые случайные величины с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\varphi_\alpha(t) = e^{-t^\alpha}$, и $\eta_{\alpha,\nu} = \xi_\alpha^{1/\nu}$. Тогда:*

1) случайные величины $\eta_{\alpha,\nu}$ устойчивы относительно $\oplus_\nu$;

2) если $\alpha \to 0$, $\nu \to +\infty$ и $\alpha\nu \to \gamma > 0$, то $\mathbf{P}(\eta_{\alpha,\nu} \leq x) \to \Phi_\gamma(x)$, $x > 0$.

Доказательство. Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_\alpha^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, распределенные как ξ_α, тогда
$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_\nu (\xi_\alpha^{(i)})^{1/\nu} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_\alpha^{(i)}\right)^{1/\nu} \stackrel{d}{=} n^{1/(\alpha\nu)} \xi_\alpha^{1/\nu}.$$
Таким образом, устойчивость доказана.

Далее используем две следующие модификации неравенства Чебышева. Пусть неотрицательная случайная величина ξ имеет преобразование Лапласа-Стилтьеса $\varphi(t)$, тогда для любых $x, t > 0$ верно:
$$\mathbf{P}(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbf{M}(1 - e^{-t\xi})}{1 - e^{-tx}} = \frac{1 - \varphi(t)}{1 - e^{-tx}}$$

и

$$\mathbf{P}(\xi \le x) = \mathbf{P}(e^{-t\xi} \ge e^{-tx}) \le \frac{\mathbf{M}e^{-t\xi}}{e^{-tx}} = \varphi(t)e^{tx}.$$

Обозначим $\eta_\alpha = \eta_{\alpha,1/\alpha} = \xi_\alpha^\alpha$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \ge x) = \mathbf{P}(\xi_\alpha \ge x^{1/\alpha}) \le \frac{1-e^{-t^\alpha}}{1-e^{-tx^{1/\alpha}}}.$$

Положим $t = x^{-1/\alpha}/\alpha$, тогда

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \ge x) \le \frac{1-e^{1/(\alpha^\alpha x)}}{1-e^{-1/\alpha}} \to 1-e^{-1/x}, \quad \alpha \to 0,$$

откуда следует $\liminf_{\alpha\to 0}\mathbf{P}(\eta_\alpha < x) \ge e^{-1/x}$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) = \mathbf{P}(\xi_\alpha \le x^{1/\alpha}) \le e^{-t^\alpha}e^{tx^{1/\alpha}}.$$

При $t = \alpha x^{-1/\alpha}$ имеем

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \le e^{-\alpha^\alpha/x}e^\alpha \to e^{-1/x}, \quad \alpha \to 0,$$

откуда следует $\limsup_{\alpha\to 0}\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \le e^{-1/x}$. Таким образом, из двусторонней оценки получаем предел $\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \to e^{-1/x}$, $\alpha \to 0$, так что $\mathbf{P}(\eta_{\alpha,\nu} \le x) = \mathbf{P}(\eta_\alpha \le x^{\alpha\nu}) \to \Phi_\gamma(x)$, $\alpha \to 0$, $x > 0$. □

После того, как мы получили предельное распределение Фреше, понятно, как можно получить распределения Гумбеля и Вейбулла. А именно, введем операции

$$x \otimes_\lambda y = \frac{1}{\lambda}\ln(e^{\lambda x} + e^{\lambda y}), \quad x, y \in \mathbf{R}, \lambda \ne 0,$$

и

$$x \odot_\mu y = -((-x)^{-\mu} + (-y)^{-\mu})^{-1/\mu}, \quad x, y < 0, \mu \ne 0.$$

В первом случае $x \otimes_\lambda y \to \max\{x, y\}$ при $\lambda \to +\infty$. К сожалению, при $\lambda \to 0$ данная операция не переходит непосредственно в сумму, однако сходится к ней при следующей линейной нормировке:

$$2\left(x \otimes_\lambda y - \frac{\ln 2}{\lambda}\right) \to x + y, \quad \lambda \to 0.$$

Аналогичные операции рассматривались в работах В.П.Маслова, например, в [8].

Во втором случае $x \odot_\mu y \to \max\{x, y\}$ при $\mu \to +\infty$ и $x \odot_\mu y = x + y$ при $\mu = -1$. При переходе параметра через нуль возникает неопределенность, но более тонкий анализ показывает, что

$$2^{1/\mu}(x \odot_\mu y) \to -\sqrt{xy}, \quad \mu \to 0.$$

Графики линий уровня для операций $\otimes_\lambda$ и $\odot_\mu$ аналогичны рис. 1.

Следствие 1. *Пусть $\zeta_{\alpha,\lambda} = \lambda^{-1}\ln\xi_\alpha$, тогда:*

1) случайные величины $\zeta_{\alpha,\lambda}$ устойчивы относительно $\otimes_\lambda$;

2) если $\alpha \to 0$, $\lambda \to +\infty$ и $\alpha\lambda \to 1$, то $\mathbf{P}(\zeta_{\alpha,\lambda} \le x) \to \Lambda(x)$, $x > 0$.

Следствие 2. *Пусть $\delta_{\alpha,\mu} = -\xi_\alpha^{-1/\mu}$, тогда:*

1) случайные величины $\delta_{\alpha,\lambda}$ устойчивы относительно $\odot_\mu$;

2) если $\alpha \to 0$, $\mu \to +\infty$ и $\alpha\mu \to \gamma$, то $\mathbf{P}(\delta_{\alpha,\lambda} \le x) \to \Psi_\gamma(x)$, $x < 0$.

В обоих случаях устойчивость элементарно доказывается подстановкой, а предельные соотношения следуют из теоремы 1 и соответствующих преобразований для распределений.

Следствие 2 можно доказать и по-другому. Как отмечено в [1, гл. 13, §8], распределение случайной величины $\xi_\alpha^{-\alpha}$ имеет преобразование Лапласа-Стилтьеса, заданное степенным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(1+k\alpha)}.$$

При $\alpha \to 0$ оно переходит в $1/(1+t)$, что соответствует стандартному показательному распределению. С учетом знака «минус» получаем $\Psi_1(x) = e^x$, $x < 0$.

С помощью теоремы 1 можно вывести и некоторые интересные свойства максимум-устойчивых распределений.

Следствие 3. *Пусть τ — случайная величина с распределением Фреше Φ_1, не зависящая от ξ_β, $0 < \beta < 1$. Тогда*

$$(\tau\xi_\beta)^\beta \stackrel{d}{=} \tau.$$

Доказательство. Пусть ξ_α и ξ_β независимы, тогда согласно известному свойству произведения строго устойчивых случайных величин [1, гл. 6, §2], верно $\xi_\alpha\xi_\beta^{1/\alpha} \stackrel{d}{=} \xi_{\alpha\beta}$. Тогда по теореме 1 при $\alpha \to 0$ случайная величина $(\xi_\alpha\xi_\beta^{1/\alpha})^{\alpha\beta} = (\xi_\alpha^\alpha\xi_\beta)^\beta$ сходится по распределению к τ, и первый множитель в скобках также сходится к τ. □

Это соотношение можно доказать и непосредственно:

$$\mathbf{P}((\tau\xi_\beta)^\beta \le x) = \mathbf{P}(\tau \le x^{1/\beta}/\xi_\beta) = \mathbf{M}e^{-\xi_\beta/x^{1/\beta}} = e^{-1/x}, \quad x > 0,$$

однако тогда остается неясной его мотивировка.

Подобным образом можно получить и многомерные максимум-устойчивые распределения [9, гл. 5]. Пусть, например, τ', τ'' — независимые случайные величины со стандартным распределением Фреше, тогда для вектора $((\tau'\xi_\beta)^\beta, (\tau''\xi_\beta)^\beta)$ получаем совместную функцию распределения

$$G(x,y) = \exp\{-(x^{-1/\beta} + y^{-1/\beta})^\beta\}, \quad x, y > 0.$$

В данном случае компоненты вектора имеют стандартное распределение Фреше, а β определяет их зависимость: при $\beta \to 1$ получаем независимость, а при $\beta \to 0$ совершенную положительную зависимость (комонотонность).

Из соотношений между различными типами максимум-устойчивых распределений понятно, что для случайной величины $\theta = -1/\tau$ с распределением Вейбулла Ψ_1 будет выполнено

$$-(-\theta/\xi_\beta)^\beta \stackrel{d}{=} \theta,$$

а для случайной величины $\zeta = \ln\tau$ с распределением Гумбеля Λ

$$\beta(\zeta + \ln\xi_\beta) \stackrel{d}{=} \zeta.$$

Отсюда, кстати, следует, что стационарным распределением процесса авторегрессии первого порядка

$$\zeta_n = \beta\zeta_{n-1} + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \beta\ln\xi_\beta$ независимы, является распределение Гумбеля, при любом $0 < \beta < 1$.

3 Обсуждение

Интересно, что α-устойчивые распределения с $\alpha \in [1,2]$ (включая гауссовское) оказываются в данной схеме «лишними». Это связано с тем, что они рассредоточены по всей числовой прямой, а мы существенно использовали неотрицательность слагаемых (степеней и экспонент) в определениях операций.

Можно продолжить, например, операцию $\oplus_\nu$ на все $x, y \in \mathbf{R}$, полагая $f_\nu(x) = |x|^\nu \operatorname{sign} x$ и

$$x \oplus_\nu y = f_\nu^{-1}(f_\nu(x) + f_\nu(y)),$$

однако в таком случае при $\nu \to +\infty$ она перейдет не в максимум, а в операцию выбора числа, наибольшего по абсолютному значению, которую можно определить следующим образом:

$$x \diamond y = \begin{cases} x, & |x| > |y|; \\ (x+y)/2, & |x| = |y|; \\ y, & |x| < |y|. \end{cases}$$

Операция $\diamond$ остается коммутативной, но перестает быть ассоциативной, если допустить, что аргументы могут принимать одинаковые по модулю значения. В случае, если речь идет о применении к независимым непрерывным случайным величинам, это не проблема.

Распределение Фреше Φ_γ по-прежнему устойчиво относительно данной операции, а распределения Вейбулла и Гумбеля — уже нет. Легко видеть, что относительно $\diamond$ окажутся устойчивы также распределения случайных величин вида $\eta = \kappa\tau$, где τ имеет распределение Фреше, а κ принимает значения ± 1; κ и τ независимы.

Следует также отметить, что о «типах» устойчивых распределений (как сдвигово-масштабных семействах) здесь можно говорить только применительно к сумме и максимуму. Для операций $\oplus_\nu$, $\odot_\mu$, $\diamond$ устойчивые распределения образуют только масштабные семейства, а для $\otimes_\lambda$ — сдвиговые.

В [10] рассматривались строго α-устойчивые элементы в банаховых пространствах. Такие элементы могут быть построены с помощью представления ЛеПажа:

$$\xi_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{-1/\alpha} \varepsilon_k,$$

где τ_k — точки пуассоновского потока интенсивности $\lambda > 0$, ε_k — независимые элементы, одинаково распределенные на единичной сфере; $\{\epsilon_k\}$ и $\{\tau_k\}$ независимы.

При этом различные пространства с их вероятностными аспектами представляют собой «параллельные миры», в чем-то похожие, а в чем-то отличающиеся между собой. Особенность же настоящей работы в том, что мы движемся «поперек» множества этих миров и наблюдаем непрерывность в предельном переходе к «миру максимумов».

Операций, промежуточных между суммой и максимумом, можно придумать много, однако наш выбор $\oplus_\nu$, $\otimes_\lambda$, $\odot_\mu$, является не вполне произвольным. Оказывается, их можно рассматривать как индуцированные максимум-устойчивыми распределениями.

Действительно, пусть X_1 и X_2 являются независимыми вероятностными копиями X с функцией распределения G. Тогда:

1) если $G = \Phi_\gamma$, то

$$c_1 X_1 \vee c_2 X_2 \stackrel{d}{=} (c_1 \oplus_\gamma c_2) X, \quad c_1, c_2 > 0;$$

2) если $G(x) = \Lambda(\lambda x)$, то

$$(X_1 + c_1) \vee (X_2 + c_2) \stackrel{d}{=} (c_1 \otimes_\lambda c_2)X, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R};$$

3) если $G = \Psi_\gamma$, то

$$(-c_1)X_1 \vee (-c_2)X_2 \stackrel{d}{=} -(c_1 \odot_\gamma c_2)X \quad c_1, c_2 < 0.$$

В силу этих соотношений, образно говоря, «мир максимумов» сам стремится к контактам с «миром сумм» и указывает нам пути для предельного перехода.

Некоторые результаты работы докладывались на Ломоносовских чтениях в МГУ (2009) и VII Международных Колмогоровских чтениях (Ярославль, 2009) [11], где вызвали большой интерес аудитории.

Список литературы

[1] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984.

[2] *Золотарев В.М.*, Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

[3] *Borak S., Härdle W., Weron R.*, Stable distributions. SFB649 Discussion Paper 2005-008. E-print: http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de

[4] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[5] *Embrechts P., Klüppelberg C.P., Mikosh T.*, Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.

[6] *Золотарев В.М.*, Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

[7] *Лебедев А.В.*, Случайные процессы с обобщенными операциями суммирования // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2005, №4, с. 3–5.

[8] *Маслов В.П.*, Нелинейное среднее в экономике // Математические заметки, 2005, т. 78, №3, с. 377–395.

[9] *Галамбош Я.И.*, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

[10] *Davydov Yu., Molchanov I., Zuyev S.*, Strictly stable distributions on convex cones // Electronic Journal of Probability, 2008, v. 13, p. 259–321.

[11] *Лебедев А.В.*, Предельный переход от α-устойчивых распределений к максимум-устойчивым // Труды VII Колмогоровских чтений. Ярославль, 2009, с. 85–90.

Асимптотическое разложение Лапласа вероятностей редких событий для одного класса распределений из области максимального притяжения Гумбеля[1]

Родионов И.В.[2]

В работе найдено асимптотическое поведение вероятностей редких событий для важного класса распределений из области максимального притяжения Гумбеля.

Во многих приложениях статистики экстремумов, в частности, относящихся к задачам страхования больших рисков, возникает задача различения распределений с похожими хвостами (вероятностями редких событий), см., например, [1], [2]. При этом зачастую распределения умеренных значений удобно моделировать стандартными распределениями, отличными от асимптотического распределения хвостов. Представляется, что важным инструментом различения семейств распределений с близкими хвостами и оценивания мощности различных критериев различения является теория контигуальных мер, [3]. Эта теория может быть применена для различения близких гипотез о хвостах распределения (вероятностях редких событий) по наблюдениям старших членов вариационного ряда выборки. При этом изучение асимптотического поведения соответствующих отношений правдоподобий может быть основано на методе исследования условных распределений $k-1$ старших членов вариационного ряда при фиксированном k-м члене,$X_{(n-k)} = q$. Как это принято в статистической теории экстремумов (см., например, [4]), полагаем $k = k_n \to \infty$ при $n \to \infty$, при этом $k_n/n \to 0$. Важным классом распределений из области максимального притяжения Гумбеля являются распределения с плотностью вида $f(x,\gamma) = e^{-S(x,\gamma)}$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x,\gamma)}{\ln x} = +\infty$. Этому классу принадлежат, например, распределения вейбулловского и логнормального типа. В вышеописанной схеме исследования отношения правдоподобий ключевым моментом является изучение асимптотического поведения интеграла $F(q) = \int\limits_q^{+\infty} e^{-S(x)}dx$. В настоящей работе мы находим асимптотическое разложение для этого интеграла при $q \to \infty$.

Сначала докажем две вспомогательные леммы, которые являются аналогами первого и второго правил Лопиталя соответственно.

Лемма 1. *Пусть*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №11-01-00050).

[2]Родионов Игорь Владимирович, vecsell@rambler.ru, м.н.с., лаборатория теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

1) *$f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некотором интервале вида $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 > 0$;*

2) *$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;*

3) *$f'(x), g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta_2, a)$ при некотором $\delta_2 > 0$;*

4) *существует конечный или бесконечный предел при $x \to a-$ отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Тогда существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ и имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Можно считать, что предел $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a-$ является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a слева. Поскольку $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in (a-\delta_3, a)$ выполнено

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. По теореме Коши (см. например [6], теорема 19.2), $\forall x \in (a-\delta, a)\ \exists c \in (x, a)$ такое, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)},$$

следовательно,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| = \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, по определению предела,

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некотором интервале вида $(a-h, a)$, $h > 0$;*

2) *$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-} g(x) = \infty$;*

3) *$f'(x), g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-h, a)$;*

4) *существует конечный или бесконечный предел при $x \to a-$ отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Тогда существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ и имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, можно считать, что

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$, то существует такое $h_1 > 0$, что $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ на интервале $(a - h_1, a)$. Возьмём ε_1 такое, что $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$, тогда, согласно четвёртому условию леммы, существует такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, $\delta_1 < \min(h, h_1)$, что $\forall x \in (a - \delta_1, a)$ выполнено

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon_1.$$

Отсюда получим:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \left(\frac{f(x)}{g(x)} - l \right) + l \right| \leq \varepsilon_1 + |l|.$$

Пусть $x_0 \in (a - \delta_1, a)$. Т.к. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \infty$, то существует такое $\delta_2 = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1} \ \forall x \in (a - \delta_2, a).$$

Аналогично, существует такое $\delta_3 = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что

$$|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1} \ \forall x \in (a - \delta_3, a).$$

Обозначим $\delta_4 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, а также $I = \{x : \ x \in (a - \delta_4, a)\}$. Обозначим $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. В силу теоремы Коши (см. лемму 1) для любого $x \in I$ имеем:

$$\left| \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right|$$

для некоторого $c \in (x_0, x) \subset I$. Таким образом, имеем:

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| = \left| \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \left| \frac{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}}{\frac{\Delta g(x_0)}{g(x)}} - 1 \right| + \varepsilon_1 \leq (|l| + \varepsilon_1) A + \varepsilon_1.$$

Но т.к.

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)} = 1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} = 1 + \alpha, \text{ где } |\alpha| < \varepsilon_1, \text{ и}$$

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x)} = 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} = 1 + \beta, \text{ где } |\beta| < \varepsilon_1,$$

то

$$A = \left| \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} - 1 \right| = \left| \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta} \right| \leq \frac{2\varepsilon_1}{0,5} = 4\varepsilon_1.$$

Следовательно, получаем

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| \leq (|l| + 1) 4\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 (4|l| + 5) = \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon \in (0; 2|l| + 2,5)$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$, что для любого $x \in (a-\delta, a)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| \le \varepsilon$. Лемма 2 доказана. □

Замечание 1. Леммы 1 и 2 очевидным образом переформулируются и доказываются в случае $x \to a$.

Замечание 2. В леммах 1 и 2 условие $x \to a-$ можно заменить условием $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Доказательство проводится с помощью подходящей замены переменной. Например, в случае $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ надо положить $x = -\frac{1}{t}$. Тогда

$$\left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=-1/t} = \frac{f'_t\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}}{g'_t\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}} = \frac{f'_t\left(-\frac{1}{t}\right)}{f'_t\left(-\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'_1(t)}{g'_1(t)},$$

остальное доказательство с учётом замен $f(x)$ на $f_1(t)$ и $g(x)$ на $g_1(t)$ проводится без изменений.

Основной результат работы является аналогом асимптотического метода Лапласа (см. например [5]).

Теорема 1. *Рассмотрим поведение интеграла* $F(q) = \int\limits_q^{+\infty} \exp(-S(x))dx$. *Пусть выполнены условия:*

1) $\frac{S(x)}{\ln x} \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$.

2) $\exists x_0 > 0$ *такой, что* $S(x)$ *трижды непрерывно дифференцируема при* $x \in (x_0; +\infty)$.

3) $\exists x_1 > x_0$ *такой, что* $S(x)$ *– строго монотонная функция при* $x \in (x_1; +\infty)$, *кроме того,* $S^{(k)}(x)$, *где* $k = 1, 2, 3$, *имеет предел при* $x \to +\infty$.

4) *Для* $k = 1, 2, 3$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln S^{(k)}(x)}{S(x)} = 0$.

Тогда при $q \to +\infty$

$$F(q) = \exp(-S(q))\left(\sum_{k=0}^{2} c_k(q) + o(c_2(q))\right),$$

где $c_k(q) = M^k\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q}$, $M = \frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}$.

Доказательство. Рассмотрим $q > x_1$. Из условия 1 следует, что $\exists C > 1$ такое, что $\int\limits_q^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C}S(x))dx < \infty$. Из условий 1 и 3 следует, что $\exists!\ \varepsilon(q) > 0$ такое, что $\frac{S(q+\varepsilon(q))}{S(q)} = C$ $\forall q > x_1$. В дальнейшем будем писать ε вместо $\varepsilon(q)$. Рассмотрим $F(q+\varepsilon) - F(q) = \int\limits_q^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_q^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx = \int\limits_q^{q+\varepsilon} \frac{1}{-S'(x)} d(\exp(-S(x))) = \frac{\exp(-S(x))}{-S'(x)}\Big|_q^{q+\varepsilon} +$$

$$+\int\limits_q^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\exp(-S(x))dx$$

Интегрируя таким же образом по частям ещё 2 раза, получаем:

$$\int\limits_q^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx = \sum_{k=0}^{2} \exp(-S(x))M^k\left(\frac{1}{-S'(x)}\right)|_q^{q+\varepsilon} + \int\limits_q^{q+\varepsilon}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)'\exp(-S(x))dx,$$

где M^0 - единичный оператор. Поскольку $\frac{S(x)}{(\ln x)^\alpha} \to +\infty$, а также учитывая выбор ε, получаем, что при $q \to \infty$ $\sum\limits_{k=0}^{2}\exp(-S(q+\varepsilon))M^k\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q+\varepsilon}$ экспоненциально мало по сравнению с $\sum\limits_{k=0}^{2}\exp(-S(q))M^k\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q}$. Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_q^{q+\varepsilon}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)'\exp(-S(x))dx$. Оценка остаточного члена опирается на леммы 1 и 2 и разбивается на 3 случая: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = C$, где $C > 0$, и 3) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$, ведь, по условию, у $S'(x)$ есть предел на бесконечности.

1 случай. Докажем сначала, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = 0$. По условию теоремы 1, $\ln S'(x) = o(S(x))$ при $x \to +\infty$. Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln S'(x) = +\infty$, то, по лемме 2,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln S'(x)}{S(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln S'(x))'}{S'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = 0.$$

Далее,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)^2 + \frac{1}{S'(x)}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) =$$

$$= 3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4} - \frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}.$$

Очевидно, первое слагаемое асимптотически меньше, чем $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = -\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}$, при $x \to +\infty$. Докажем, что аналогичное свойство верно и для второго слагаемого. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = +\infty$ или 0 (он существует по свойству 3). Тогда, используя свойство 4 и лемму 2, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}}{\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{S^{(3)}(x)}{S''(x)S'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\ln S''(x))}{\frac{d}{dx}(S(x))} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln S''(x)}{S(x)} = 0,$$

что и требовалось. Если же $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C$, $C \neq 0$ то, по свойству 3, $\lim\limits_{x\to+\infty} S^{(3)}(x) = 0$ и $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3} = o\left(\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}\right)$ при $x \to \infty$. Для того, чтобы доказать, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)$, достаточно проверить, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\max\left(\left|\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}\right|, \left|\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}\right|\right)\right)$. Это может быть неверным лишь в том случае, когда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}} = 1.$$

Докажем, что при $\lim\limits_{x\to+\infty} S'(x) = +\infty$ это соотношение не выполняется. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = +\infty$ или 0, то по второму правилу Лопиталя получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3\ln S'(x))}{\frac{d}{dx}(\ln S''(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln S'(x)}{\ln S''(x)} = 1,$$

т.е. $(S'(x))^3 = (S''(x))^{1+o(1)}$ при $x\to\infty$. Такое невозможно, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = 0$. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C,\ C\neq 0$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S'(x)}{x} = C$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3C}{xS^{(3)}(x)} = 1.$$

Значит, $\exists y_0 > 0$ такое, что $\forall x > y_0$ $S^{(3)} > \frac{C_1}{x}$, тогда для $x > y_0$

$$S''(x) - S''(y_0) = \int\limits_{y_0}^{x} S^{(3)}(x)dx > \int\limits_{y_0}^{x} \frac{C_1}{x}dx = C_1 \ln\frac{x}{y_0} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty,$$

что противоречит $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C$. Итак, проверим, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\max\left(\left|\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}\right|, \left|\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}\right|\right)\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = 10\frac{S''(x)S^{(3)}(x)}{(S'(x))^5} - 15\left(\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}\right)^3 - \frac{S^{(4)}(x)}{(S'(x))^4}.$$

Первое слагаемое из последнего выражения асимптотически меньше, чем $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$, второе – асимптотически меньше, чем $\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}$, доказательство того факта, что третье асимптотически меньше, чем $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$, с незначительными изменениями повторяет доказательство асимптотической малости $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$ по сравнению с $\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}$, проведённое выше. Итак, случай $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, полностью разобран.

2 случай. Теперь $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = 0$. По условию 1, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = +\infty$, тогда, по лемме 2,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = +\infty,$$

т.е. $\frac{1}{S'(x)x} \to 0$ при $x\to\infty$. По лемме 1 отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{S'(x)}}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{S'(x)x} = 0,$$

что и требовалось. Заметим, что т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$, поскольку у $S''(x)$ и $S^{(3)}(x)$ есть предел при $x\to\infty$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство, проведённое для случая $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, с тем изменением, что теперь всегда $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$.

3 случай. Осталось рассмотреть случай, когда $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = C,\ C > 0$. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{C^2} = 0$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как и для первого случая, за исключением одного момента. Рассмотрим поведение отношения $\frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)}$ при $x \to +\infty$. Т.к. это отношение не зависит от C, то примем $C = 1$. Используя второе правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S''(x))^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{-\frac{1}{S''(x)}} = 1,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} 3xS''(x) = -1$. Значит, $\exists y_0 > 0$ такое, что $\forall x > y_0\ S''(x) < -\frac{C_1}{x}$, где $C_1 > 0$, тогда для $x > y_0$

$$S'(x) - S'(y_0) = \int\limits_{y_0}^{x} S''(x)dx < -\int\limits_{y_0}^{x} \frac{C_1}{x}dx = -C_1 \ln\frac{x}{y_0} \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty,$$

что противоречит $\lim\limits_{x\to+\infty} S'(x) = C$. Итак, для всех трёх случаев поведения $S'(x)$ на бесконечности доказано $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)$. Таким образом,

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)' e^{-S(x)}dx = \int\limits_{q}^{q+\varepsilon} o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) e^{-S(x)}dx.$$

Но

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}dx = -\left. M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}\right|_{q}^{q+\varepsilon} + \int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)' e^{-S(x)}dx,$$

где последнее слагаемое, как мы уже установили, асимптотически меньше левой части, поэтому

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}dx = -\left. M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}\right|_{q}^{q+\varepsilon} (1 + o(1)) =$$

$$= e^{-S(q)}\ \left. M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right|_{x=q} (1 + o(1))$$

т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-S(q+\varepsilon)}\ M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\Big|_{x=q+\varepsilon}}{e^{-S(q)}\ M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\Big|_{x=q}} = 0$ по свойству 4 и из-за того, что $S(q+\varepsilon) = CS(q)$. Таким образом, доказано, что $F(q) - F(q+\varepsilon) = \exp(-S(q))\left(\sum\limits_{k=0}^{2} c_k + o(c_2)\right)$. Докажем теперь, что интеграл $F(q+\varepsilon)$ экспоненциально мал по сравнению с $F(q)$.

$$F(q+\varepsilon) = \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-S(x))dx = \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(S(q+\varepsilon) - S(q) - S(x))dx =$$

$$= \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)\right) \exp\left(\frac{S(q+\varepsilon) - S(q)}{S(q+\varepsilon)} (S(q+\varepsilon) - S(x))\right) dx \le$$

$$\le \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)\right) dx =$$

$$= \exp(-(C-1)S(q)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C} S(x)) dx < \infty,$$

т.к. $\frac{S(q+\varepsilon)-S(q)}{S(q+\varepsilon)}(S(q+\varepsilon) - S(x)) < 0 \ \forall x \ge q+\varepsilon$. Оценим теперь $\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C}S(x))dx$ сверху.

$$\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C} S(x)) dx = \exp(-S(q)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)) dx.$$

По условию 1, $\forall C > 0$ найдётся такой $x_2(C)$, что $\forall x > x_2$ $S(x) > 2C \ln x$. Рассмотрим функцию $h(x,q) = S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)$. Легко заметить, что $h(x,q) \le 0$ при $x \ge q+\varepsilon$, монотонно убывает при $x \to +\infty$ по условию 3 и $h(q+\varepsilon, q) = 0$. Кроме того, по условиям 1 и 3 и лемме 2, найдётся такой $x_3 > x_2$, что $h_x'(x,q) = -\frac{1}{C} S'(x) < -\frac{2}{x} < -\frac{2}{x-q-\varepsilon+1} < 0$ для всех $x > \max(x_3, q+\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)) dx < \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-2\ln(x-q-\varepsilon+1)) dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \exp(-2\ln x) dx < +\infty.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Автор благодарит профессора В.И. Питербарга за руководство научной работой.

Список литературы

[1] *Gupta R.D., Kundu D.*, Discriminating between Weibull and generalized exponential distributions // Computational Statistics and Data Analysis, 2003, 43, №2, 179–196.

[2] *Kundu D., Raqab M. Z.,* Discriminating Between the Generalized Rayleigh and Log-Normal Distribution // Statistics, 2007, 41, №6, 505–515.

[3] *Русас Дж.,* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975.

[4] *Fereira A., Haan L. de,* Extreme value theory. An introduction. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. N. Y.: Springer, 2006.

[5] *Федорюк М.В.,* Метод перевала. М.: 1977.

[6] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.,* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2008.

Флуктуации α-эффекта и уравнение среднего поля в короткокоррелированном приближении[1]

Рубашный А.С.[2], Соколов Д.Д.[3]

Модель динамо среднего поля с флуктуирующим α-коэффициентом неплохо описывает поведение солнечного цикла. Тем не менее, математическая структура моделей такого рода остается гораздо менее понятной, чем традиционных моделей динамо средних полей. Для того чтобы прояснить ее, мы получили уравнение для магнитного поля, в котором проведено дополнительное усреднение по α-флуктуациям в короткокоррелированном приближении. Результат оказался существенно иным, чем для уравнений динамо, усредненных только по короткокоррелирующим флуктуациям скорости. По-видимому, короткокоррелированное приближение в рассматриваемой задаче гораздо менее адекватно, чем в традиционной теории средних полей.

1 Введение

Традиционные представления о генерации магнитного поля Солнца [1] опираются на концепцию дифференциального вращения, в результате которого происходит рост тороидальной компоненты поля за счёт полоидальной компоненты, и концепции регенерации полоидальной компоненты из тороидальной, связанной с т.н. α-эффектом. Модель этого эффекта, предложенная Штеенбеком, Краузе и Редлером [2], связывает его с зеркально-антисимметричной турбулентностью, возникающей во вращающихся телах под действием сил Кориолиса. Ими же были выведены уравнения динамо с α-эффектом для магнитного поля, усредненного по флуктуациям поля скорости турбулентности. Такое среднее магнитное поле $\mathbf{B}$ считается крупномасштабным. На ранних этапах развития теории динамо идеи рассматривать флуктуации α вызывали возражения (см. [4], [5], [6]) на том основании, что если α становится флуктуирующей величиной, то коэффициент диффузии может становится отрицательным, что приводит к неограниченному росту магнитного поля.

Хоинг [7] отметил, что статистическое среднее, которое приводит к уравнениям среднего поля, должно вычисляться более аккуратно, чем усреднение в традиционной статистической физике. Дело в то, что количество турбулентных ячеек, будучи большим, всё

[1] Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 12-02-00170.

[2] Рубашный Алексей Сергеевич, alex.rubashny@gmail.com, аспирант, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3] Соколов Дмитрий Дмитриевич, sokoloff.dd@gmail.com, профессор, кафедра математики, физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

же значительно меньше числа Авогадро. В результате компонент с неопределенностью в коэффициентах турбулентного переноса может быть существенным и должен приниматься во внимание. Чоудури [8] применил эту идею к динамо моделям Солнца. Недавно были предложены подходящие описания α-флуктуаций, на основе которых были рассчитаны динамо модели солнечного цикла [9], [10], [11], [12] и последовательности геомагнитных инверсий [13], [14], которые разумно укладываются в соответствующие наблюдения, и этот подход стал важной частью астрофизики и геофизики.

Тем не менее, формулировка самого понятия α-флуктуаций остается гораздо менее разработанной, чем исходная концепция динамо средних полей. Наивная точка зрения здесь заключается в том, что уравнения среднего динамо как результат усреднения должны содержать только не флуктуирующие величины. В работах [15], [16] предложено формальное описание процесса усреднения, который позволяет ввести флуктуации в коэффициенты переноса в уравнениях среднего динамо. Для этого достаточно ввести в задачу два случайных параметра: усреднение по первому параметру приводит к уравнениям среднего поля, в то время как второй параметр задаёт флуктуации α. Такой формальный подход позволяет использовать теорию вероятностей, однако получаемые результаты требуют аккуратной физической интерпретации. Дело в том, что возможны два подхода для исследования динамо модели с α-флуктуациями [15]. Прежде всего, можно рассматривать конкретные реализации флуктуации α и исследовать соответствующее поведение магнитного поля. Этот подход выбран в подавляющем большинстве работ в описываемой теме. Другой возможный путь – выполнить дополнительное усреднение по второму случайному параметру, по возможности получить замкнутую систему уравнений среднего поля и исследовать их решения [17].

Отметим, что первый подход рассматривает магнитное поле $\mathbf{B} =< \mathbf{H} >$. Здесь $\mathbf{H}$ – истинное магнитное поле, которое зависит от случайных параметров ω_1 и ω_2, а $< \cdots >$ обозначает усреднение по ω_1, поэтому B остается случайной величиной по ω_2. Второй подход рассматривает магнитное поле $\mathfrak{B} = M\mathbf{B}$, где M – усреднение по ω_2 и $\mathfrak{B}$ не имеет случайности. На самом деле поведение $\mathbf{B}$ и $\mathfrak{B}$ в одной и той же динамо модели может значительно отличаться [15], [16], [17]: например, конкретные реализации B могут расти, в то время как $\mathfrak{B}$ может убывать вследствие того, что различные реализации $\mathbf{B}$ с противоположными направлениями компенсируются.

Один из стандартных путей формального вывода замкнутой системы уравнений среднего динамо – использование короткокоррелированной модели [18]. Задача этой статьи – получить замкнутое уравнение для $\mathfrak{B}$ в рамках этого подхода. Для простоты мы полагаем все остальные коэффициенты переноса, т.е. среднюю скорость $\mathbf{V}$ и турбулентную диффузию β, не содержащими случайности. Более того, чтобы упростить алгебраические выкладки, положим $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ и $\beta = \text{const}$.

2 Модель коротких корреляций для α-флуктуаций

Следуя работам [19] и [20], мы вводим модель короткокоррелированного времени для α-флуктуаций следующим образом. Первым делом мы введём так называемую модель обновления для α: предположим, что в моменты $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$ α обновляется. Это значит, α на различных интервалах $(n\Delta, (n+1)\Delta)$ полагаются статистически независимыми случайными полями с одинаковыми статистическими свойствами. Моменты обновления $n\Delta$ делают случайное поле α статистически нестационарным. В частности, его корреляционная функция $M(\alpha(t_1, \mathbf{x})\alpha(t_2, \mathbf{y}))$ зависит от моментов t_1 и t_2, а не от $t_1 - t_2$.

Введение моментов обновления $n\Delta$ позволяет выполнить усреднение уравнения для $\mathbf{B}$ и получить замкнутое уравнение для $\mathbf{B}$ (см. ниже). Мы восстанавливаем статистическую однородность, устремляя время обновления Δ к нулю, что и даёт нам короткокоррелированную модель. Конечно, нужно помнить, что Δ, несмотря на малость, остается конечной и может быть соотнесено с 2τ, где τ – время корреляции турбулентности. Физическая интерпретация этого ограничения заключается в том, что мы пренебрегаем деталями магнитного поля на масштабах времени τ.

Отметим, что среднеквадратичное значение от α остается постоянным и Δ стремится к 0, когда флуктуации становятся незначительными для эволюции магнитного поля. Разобьём α на среднее ($\bar{\alpha}$) и флуктуирующее значение ($\tilde{\alpha}$). Первое остаётся постоянным при убывающем Δ [21], в то время как второе растёт при убывающем Δ, чтобы скомпенсировать это убывание к 0 в неубывающих коэффициентах переноса. Ниже мы покажем, что подходящая скорость – поведение $\tilde{\alpha} \propto \Delta^{-1/4}$. Более точно, мы предполагаем, что существует предел

$$L = \beta^{-2} \lim_{\Delta\to 0} M(\tilde{\alpha})^4\, \Delta, \tag{1}$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha} = M\alpha$. По отношению к времени, мы предполагаем L статистически однородной величиной.

3 Формула Каца-Фейнмана

Следующий шаг в выводе управляющего уравнения для $\mathfrak{B}$ – получить точное решение управляющего уравнения для $\mathbf{B}$, т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\alpha\,\mathbf{B}) + \mathrm{rot}\,[\mathbf{V}\times\mathbf{B}] + \beta\Delta\mathbf{B}, \tag{2}$$

в терминах винеровского интеграла по траекториям [22]. Точные решения такого рода известны как формулы Каца-Фейнмана. Желаемая формула Каца-Фейнмана имеет вид [15]

$$B_j(\mathbf{x},t) = E_{\mathbf{x}}\left(B_i(\xi)\prod_0^t\left(\delta_{ij} + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} + \frac{\alpha^2}{\beta}\delta_{ij}\right)dt + \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}\epsilon_{ijk}\,d(w_t)_k\right)\right), \tag{3}$$

где

$$\xi(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \int_0^t v(\xi(\mathbf{x},s),t-s)ds + \sqrt{2\beta}w_t. \tag{4}$$

Здесь $\prod$ – стохастический мультипликативный интеграл, $(w_t)_k$ – стандартные винеровские процессы, $E_{\mathbf{x}}$ – усреднение по случайным траекториям ξ, которые приходят в точку $\mathbf{x}$ в момент времени t.

Уравнение (3) может быть проверено прямым вычислением частной производной $\partial B_j/\partial t$. При выполнении этого вычисления следует принять во внимание, что

$$d\,F(w_t) = F'(w_t)w_{dt} + \frac{1}{2}F''(w_t)dt, \tag{5}$$

где F – гладкая функция от винеровского процесса (так называемая формула Ито); отметим, что $w_{dt} \propto \sqrt{dt}$ (см., например, [22]). Отметим, что член $\alpha^2\delta_{ij}/\beta$, который определяет неочевидный вклад в искомое уравнение, получается из второго члена уравнения (5).

4 Уравнение для $\mathfrak{B}$

Отметим, что вследствие так называемого марковского свойства формулы Каца-Фейнмана (см. подробности в [22]), мы можем использовать момент $t = n\Delta$ как начальный момент в уравнении (3).

Рассмотрим

$$B_j(\mathbf{x},(n+1)\Delta) = E_{\mathbf{x}}\left(B_i(\xi_\Delta)\prod_{n\Delta}^{(n+1)\Delta}\left(\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\,\alpha'_k\right)dt + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\alpha\epsilon_{ijk}d(w_t)_k\right)\right), \qquad (6)$$

где

$$(\xi - x)_j = \sqrt{2\beta}(w_\Delta)_j$$

(напоминаем, что $\mathbf{V} = 0$). Тогда

$$B_i(\xi_\Delta) = B_i(x) + \sqrt{2\beta}\frac{\partial B_i}{\partial x_j}(w_\Delta)_j + \beta\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k \partial x_l}(w_\Delta)_k(w_\Delta)_l + o(\Delta).$$

Пусть

$$A_{ij} = \frac{1}{\beta}\left(\bar{\alpha}^2\delta_{ij} + 2\bar{\alpha}\tilde{\alpha}\delta_{ij} + \tilde{\alpha}^2\delta_{ij} + \beta\epsilon_{ijk}\,\bar{\alpha}'_k + \beta\epsilon_{ijk}\,\tilde{\alpha}'_k\right)\Delta + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\left(\bar{\alpha}\epsilon_{ijk} + \tilde{\alpha}\epsilon_{ijk}\right)(w_\Delta)_k,$$

тогда

$$\prod_{n\Delta}^{(n+1)\Delta}\left(\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\,\alpha'_k\right)dt + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\alpha\epsilon_{ijk}d(w_t)_k\right) =$$

$$= \delta_{ij} + A_{ij} + A_{ip}A_{pj} + A_{ip}A_{pg}A_{gj} + A_{ip}A_{pg}A_{gs}A_{sj} + o(\Delta). \qquad (7)$$

Заметим, что

$$E_{\mathbf{x}}(A_{ij} + A_{ip_1}A_{p_1j} + A_{ip_1}A_{p_1p_2}A_{p_2j} + A_{ip_1}A_{p_1p_2}A_{p_2p_3}A_{p_3j}) =$$

$$= \epsilon_{ijk}\,\bar{\alpha}'_k\,\Delta + \epsilon_{ijk}\,\tilde{\alpha}'_k\,\Delta - \frac{\tilde{\alpha}^4}{\beta^2}\delta_{ij}\,\Delta^2 + o(\Delta). \qquad (8)$$

Выполняя усреднение $E_{\mathbf{x}}$ и принимая во внимание, что $\tilde{\alpha} \sim \Delta^{-1/4}$ and $E_{\mathbf{x}}w_k = 0$, $E_{\mathbf{x}}w_kw_lw_p = 0$, мы получим

$$\frac{B_j(\mathbf{x},(n+1)\Delta) - B_j(\mathbf{x},n\Delta)}{\Delta} = -B_j(\mathbf{x},n\Delta)\frac{\tilde{\alpha}^4}{\beta^2}\Delta + (\mathrm{rot}\,(\alpha B((\mathbf{x},n\Delta)))_j + \beta(\Delta B(\mathbf{x},n\Delta))_j + o(1).$$

Заметим, что $\mathbf{B}(\mathbf{x},n\Delta)$ и α при указанном усреднении являются статистически независимыми, поскольку первая величина определяется полем скорости до момента обновления $n\Delta$, в то время как вторая определяется полем скорости после этого момента.

После следующего усреднения $< ... >$ мы делаем предельный переход $\Delta \to 0$, что приводит к результату

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{B}) + \beta\Delta\mathfrak{B} - L\mathfrak{B}, \qquad (9)$$

где L задано уравнением (1).

5 Дальнейшие обобщения

Уравнение (9) представляет формальный результат данной статьи. Его физическая интерпретация и сравнение с другими результатами в рассматриваемой теме требуют специального обсуждения (см. ниже, раздел 6). Здесь мы приводим обобщение уравнения (9).

Отметим, что традиционная интерпретация уравнений среднего динамо предполагает ограниченность сверху для α. Действительно,

$$\alpha = \frac{\tau}{3} < \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} > \leq \frac{\tau v^2}{3l} \tag{10}$$

(см. [6]), где $\mathbf{v}$ – поле турбулентной скорости, v – его среднее значение и l – масштаб турбулентности.

Мы предполагаем, что $\beta = \tau v^2/3$ остается константой, когда $\Delta \to 0$, поэтому нам следует считать, что $l \propto \Delta^{1/4}$ (см. уравнение (1)). Это значит, что $\alpha'_k \propto \alpha/l \propto \Delta^{-1/2}$, в то время как $\alpha \propto \Delta^{-1/4}$. Другими словами, α выглядит как $f(x) = (\Delta/\tau)^{-1/4}\sin(\Delta/\tau)^{-1/4}x$, в то время как α' выглядит как $f' = (\Delta/\tau)^{-1/2}\sin(\Delta/\tau)^{-1/4}x$.

В свете этого мы можем добавить в уравнение (1) следуюшее условие

$$\tilde{L}_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} M(\tilde{\alpha}'_i\tilde{\alpha}'_j)\,\Delta, \tag{11}$$

где $\tilde{L}_{ij}$ – новая тензорная константа.

Мы выводим уравнение (9), принимая во внимание уравнение (11), что приводит к выражению

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{\mathrm{j}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{B})_j + \beta\Delta\mathfrak{B}_j - L\mathfrak{B}_{\mathrm{j}} + \mathfrak{B}_i\tilde{L}_{ij} - \tilde{L}_{kk}\mathfrak{B}_j. \tag{12}$$

Очевидно, уравнения (1) и (11) сохраняют условие $\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$, если начальное условие бездивергентно. В случае статистической неоднородности, условие на $\mathrm{div}\,\mathfrak{B}$ приводит к связи между L и $\tilde{L}_{ij}$. Если $\tilde{L}_{ij} = \tilde{L}\delta_{ij}$ (локально изотропная среда) условие имеет вид $\tilde{L} = -L/(2\beta^2) + \mathrm{const}$. Если мы полагаем, что коэффициенты переноса убывают на бесконечности (пространства), то константа зануляется, а член, пропорциональный $\mathfrak{B}$ в уравнении (12) исчезает. Нетривиальный вклад может, тем не менее, дать член с ротором в правой части этого уравнения. Дело в том, что этот член

$$\mathbf{N} = \beta^{-1}\lim_{\Delta\to 0} M(\tilde{\alpha}^2\nabla\tilde{\alpha})\,\Delta, \tag{13}$$

может быть конечным и неисчезающим в неоднородном случае (отметим, что он исчезает в однородной среде). Тогда основное уравнение для $\mathfrak{B}$ принимает вид

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\bar{\alpha}\,\mathfrak{B}) + \beta\Delta\mathfrak{B} + \mathbf{N}\times\mathfrak{B}. \tag{14}$$

Если мы требуем, чтобы уравнение (14) сохраняло условие $\mathrm{div}\mathfrak{B} = 0$, то нам приходится полагать $\mathbf{N} = 0$.

6 Обсуждение и заключение

Прямая интерпретация полученных результатов заключается в том, что флуктуации α не способствуют генерации поля $\mathfrak{B}$, усредненного по всем случайным параметрам, участвующим в проблеме. Действительно, последний член в уравнении (9) означает, что флуктуации подавляют динамо.

Однако на самом деле ситуация хуже – мы видим, что в рамках короткокоррелированной модели возникают проблемы с условием соленоидальности. Конечно, некоторые проблемы с короткокоррелированным приближением возникают всегда. В его рамках предполагается, что скорость неограниченно растет при уменьшении Δ, что противоречит нерелятивистской природе проблемы динамо. Однако эта трудность не отражается на результатах осреднения по флуктуациям поля скорости. Напротив, предположение, что α становится большим, когда Δ становится малым, приводит к проблемам с соленоидальностью. Трудности с физической интерпретацией моделей динамо средних полей, в которых предполагается большие значения α, появляются также в задаче дискового динамо с δ-образным распределением α [23].

С прагматической точки зрения мы заключаем, что лучше не проводить усреднение $\mathbf{B}$ по флуктуациям α, а рассматривать только частичные реализации $\mathbf{B}$, однако эту рекомендацию здравого смысла непросто реализовать в задаче, которой интересуются различные научные группы.

Отметим, что мы рассмотрели здесь наиболее простую постановку задачи и не учли возможные вклады в управляющее уравнение для $\mathfrak{B}$ флуктуаций турбулентвной диффизии β или среднего скорости $\mathbf{V}$, так же как и эффекты конечных корреляций при выводе управляющего уравнения (2). В частности, последние отвечают за члены, обсуждаемые в [4], [5], [6], которые не представлены в нашем анализе. Соответствующее расширение анализа математически возможно, однако сделает множество моделей ещё более богатым.

Резюмируя дискуссию выше, мы заключаем, что короткокоррелированная модель не дает простой и основательной базы для вывода уравнений среднего поля в динамо моделях с α-флуктуациями. Это новое и неожиданное свойство моделей с α-флуктуациями по сравнению со стандартным динамо средних полей. Метод интегрирования по траекториям предоставляет возможность получить уравнения среднего поля для малого, но конечного времени Δ (см., например, [24], [25]). Это требует более глубокого математического исследования и явно выходит за рамки этой статьи. Однако такое исследование может пролить новый свет на рассматриваемую проблему.

Список литературы

[1] *Parker E.N.*, Hydromagnetic dynamo models. // Astrophys. J., 1955, v. 122, p. 293–314.

[2] *Krause F. and Rädler K.-H.*, Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Pergamon, Oxford, 1980.

[3] *Choudhuri A.R., Schüssler M. and Dikpati M.*, The solar dynamo with meridional circulation. // Astron. Astrophys., 1995, v. 303, p. 29–32.

[4] *Kraichnan R.H.*, Consistency of the α-effect turbulent dynamo // Phys. Rev. Lett., 1976, v. 42, p. 1677–1680.

[5] *Knobloch E.*, The diffusion of scalar and vector fields by homogeneous stationary turbulence // J. Fluid Mech., 1977, v. 83, p. 129–146.

[6] *Moffatt H.K.*, Magnetic Field in Electrically Conducting Fluids. Univ. Press, Cambridge, 1978.

[7] *Hoyng P.*, Turbulent transport of magnetic fields. III - Stochastic excitation of global magnetic modes // Astrophys. J., 1988, v. 332, p. 857–871.

[8] *Choudhuri A.R.*, Stochastic fluctuations of the solar dynamo // Astron. Astrophys., 1992, v. 253, №1, p. 277–285.

[9] *Moss D., Sokoloff D., Usoskin I. and Tutubalin V.*, Solar Grand minima and random fluctuations in dynamo parameters // Solar Phys., 2008, v. 250, №2, p. 221–234.

[10] *Usoskin I., Sokoloff D. and Moss D.*, Grand minima of solar activity and the mean-field dynamo // Solar Phys., 2009, v. 254, №2, p. 345–355.

[11] *Karak B.B. and Choudhuri A.R.*, The Waldmeier effect and the flux transport solar dynamo // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2011, v. 410, №3, p. 1503–1512.

[12] *Pipin V.V. and Sokoloff D.D.*, The fluctuating α-effect and Waldmeier relations in the nonlinear dynamo models // Phys. Scr., 2011, v. 84, №6, ID065903.

[13] *Ryan D.A. and Sarson G.R.*, Are geomagnetic field reversals controlled by turbulence within the Earth's core? // Geophys. Res. Lett., 2007, v. 34, IDL02307.

[14] *Sobko G.S., Zadkov V.N., Trukhin V.I. and Sokoloff D.*, Geomagnetic reversals in a simple geodynamo model // Geomagnetism and Aeronomy, 2012, v. 52, №2, p. 254–260.

[15] *Соколов Д.Д.*, Уравнения электродинамики средних полей и функциональные интегралы // Вестник МГУ, сер. физика и астрономия, 1997, №6, с. 9–11.

[16] *Соколов Д.Д.*, Дисковое динамо с флуктуирующей спиральностью // Астрономический журнал, 1997, т. 74, с. 68–72.

[17] *Mitra D. and Brandenburg A.*, Scaling and intermittency in incoherent α-shear dynamo // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2012, v. 420, №3, p. 2170–2177.

[18] *Kazantsev A.P.*, Enhancement of magnetic field by a conducting fluid // JETP, 1967, v. 53, p. 1806–1813.

[19] *Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A. and Sokoloff D.D.*, Kinematic dynamo in random flow // Sov. Phys. Usp., 1985, v. 28, p. 307–327.

[20] *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A. and Sokoloff D.D.*, The Almighty Chance. World Sci., Singapore, 1990.

[21] *Tomin D.N. and Sokoloff D.D.*, Dynamo in fluctuating ABC flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 2010, v. 104, p. 183–188.

[22] *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A. and Sokoloff D.D.*, Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Sov. Sci. Rev., C. Math. Phys., 1988, v. 7, p. 1–110.

[23] *Соколов Д.Д.*, Сосредоточенная спиральность в локальной задаче дискового динамо // Магнитная гидродинамика, 1994, т. 30, р. 107–111.

[24] *Dittrich P., Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A. and Sokoloff D.D.*, Mean magnetic field in renovating random flow // Astron. Nachr., 1984, v. 305, №3, p. 119–125.

[25] *Kleeorin N., Rogachevskii I. and Sokoloff D.*, Magnetic fluctuations with a zero mean field in a random fluid flow with a finite correlation time and a small magnetic diffusion // Phys. Rev. E, 2002, v. 65, №3, ID036303.

О некоторых свойствах когерентных мер риска, основанных на минимумах, и связанных с ними задачах

Сверчков Р.А.[1]

Рассматриваются когерентные меры риска, основанные на минимумах, из семейства MINV@R. Изучаются свойства мер для симметричных распределений, решается задача диверсификации портфеля в случае распределения Лапласа, а также задача восстановления распределения по значениям его мер риска.

1 Введение

Определение меры риска можно задавать по-разному, поэтому было решено определить важные свойства, которыми должна обладать мера риска, чтобы её было целесообразно использовать в задачах финансовой математики, так в работах [1, 2] было введено понятие когерентной меры риска.

Определение 1. Когерентной мерой риска на L^∞ называется отображение $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$, для которого выполнено:

(a) (Субаддитивность) $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$;
(b) (Монотонность) Если $X \leq Y$, то $\rho(X) \geq \rho(Y)$;
(c) (Положительная однородность) $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ для $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$;
(d) (Инвариантность относительно сдвигов) $\rho(X+m) = \rho(X) - m$ для $\forall m \in \mathbb{R}$;
(e) (Свойство Фату) Если $|X_n| \leq 1, X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, то $\rho(X) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \rho(X_n)$.

Будем рассматривать семейство мер риска, которое были введено и изучалось в работах [3, 4, 5]:

Определение 2.

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = -\mathsf{E}\min\{X_1, \ldots, X_N\},$$

где $X_1, \ldots, X_N$ — независимые копии случайной величины X.

Легко проверить, что для таким образом определенной меры риска выполняются свойства (a)–(e), т.е. $\mathsf{MINV@R}_N$ — когерентная мера риска.

В данной работе установлена связь между $\mathsf{MINV@R}_N(X)$ при различных N, когда случайная величина X распределена симметрично. Также приведен способ восстановления функции распределения X по значениям $\mathsf{MINV@R}_N(X)$. Решена задача о диверсификации портфеля с двумя активами, доходности которых имеют распределение Лапласа и независимы.

[1]Сверчков Руслан Андреевич, sverchkov.r@gmail.com, аспирант, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

2 Свойства мер риска в случае симметричного распределения

Пусть X имеет распределение, симметричное относительно нуля. Выразив минимум через максимум, получим

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = -\min\{X_1, \dots, X_N\} = \max\{-X_1, \dots, -X_N\}.$$

Если случайная величина имеет симметричное распределение, то $X \stackrel{d}{=} -X$, поэтому для таких X:

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = \mathsf{E}\max\{X_1, \dots, X_N\}.$$

Пусть $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$, тогда ее функция распределения

$$F_Y(x) = (F_X(x))^N.$$

Так как X симметрично распределена, то для ее функции распределения и плотности верно:

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x), \quad p_X(-x) = p_X(x).$$

И поэтому $\mathsf{MINV@R}_N(X)$ можно представить в виде

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = \mathsf{E}\max\{X_1, \dots, X_N\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xd(F_X(x))^N$$

$$= N\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)(F_X(x))^{N-1}dx$$

$$= N\int\limits_{0}^{+\infty} xp_X(x)(F_X(x))^{N-1}dx + N\int\limits_{-\infty}^{0} xp_X(x)(F_X(x))^{N-1}dx$$

$$= N\int\limits_{0}^{+\infty} xp_X(x)((F_X(x))^{N-1} - (1-F_X(x))^{N-1})dx.$$

Если обозначить $A_N = A_N(x) = (F_X(x))^{N-1} - (1-F_X(x))^{N-1}$ и $t = t(x) = F_X(x)$, тогда

$$A_2 = t - 1 + t = -1 + 2t, \quad A_3 = t^2 - 1 + 2t - t^2 = -1 + 2t,$$

$$A_4 = t^3 - 1 + 3t - 3t^2 + t^3 = -1 + 3t - 3t^2 + 2t^3,$$

$$A_5 = t^4 - 1 + 4t - 6t^2 + 4t^3 - t^4 = -1 + 4t - 6t^2 + 4t^3.$$

Общая формула

$$A_N = t^{N-1} - \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^k(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N-2} C_{N-1}^k(-1)^{k+1}t^k + (1+(-1)^N)t^{N-1}.$$

Пусть $N = 2l+1$, тогда

$$A_{2l+1} = \sum_{k=0}^{2l-2} C_{2l}^k(-1)^{k+1}t^k + C_{2l}^{2l-1}t^{2l-1} = \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}A_{2l} + \sum_{k=0}^{2l-2}(-1)^{k+1}t^k\left(C_{2l}^k - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^k\right).$$

Так как при $k = 2l-2$

$$C_{2l}^k - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^k = 0\ ,$$

то

$$A_{2l+1} = \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}A_{2l} + \sum_{k=0}^{2l-3}(-1)^{k+1}t^k\left(C_{2l}^k - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^k\right)$$

$$= \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}A_{2l} + \frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-3} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-3}\right)A_{2l-2}$$

$$+\sum_{k=0}^{2l-4}(-1)^{k+1}t^k\left(C_{2l}^k - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^k - \frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-3} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-3}\right)C_{2l-3}^k\right).$$

При $k = 2l-4$ выполнено

$$C_{2l}^k - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^k - \frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-3} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-3}\right)C_{2l-3}^k = 0\ ,$$

поэтому можно записать равенство

$$A_{2l+1} = \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}A_{2l} + \frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-3} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-3}\right)A_{2l-2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-5} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-5} - \frac{1}{2}\left(C_{2l}^{2l-3} - \frac{1}{2}C_{2l}^{2l-1}C_{2l-1}^{2l-3}\right)C_{2l-3}^{2l-5}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{2l-6}(-1)^{k+1}t^k\Big(\dots\Big)\ .$$

Таким образом, получим, что при нечетных N многочлены A_N выражаются через предыдущие A_N с четными N. Так как $\mathsf{MINV@R}_N(X) = N\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)A_N(x)dx$, то же будет верно и для величин $M_N = \frac{\mathsf{MINV@R}_N}{N}$.

А именно

$$M_{2l+1} = \frac{1}{2}C_{2l}^1M_{2l} + \frac{1}{2}(C_{2l}^3 - \frac{1}{2}C_{2l}^1C_{2l-1}^2)M_{2l-2}+$$

$$+\frac{1}{2}(C_{2l}^5 - \frac{1}{2}C_{2l}^1C_{2l-1}^4 - \frac{1}{2}(C_{2l}^3 - \frac{1}{2}C_{2l}^1C_{2l-1}^2)C_{2l-2}^2)M_{2l-4} + \dots$$

По формуле:

$$M_3 = M_2, \quad M_5 = 2M_4 - M_2, \quad M_7 = 3M_6 - 5M_4 + 3M_2,$$

$$M_9 = 4M_8 - 14M_6 + 28M_4 - 17M_2.$$

3 Задача диверсификации

3.1 Оптимальный портфель при малых N

Определение 3. Портфель — случайная величина

$$X = w_1X_1 + \ldots + w_NX_N,$$

где $X_1, \ldots, X_N$ — доходности по активам (случайные величины), а $w_1, \ldots, w_N$ — веса, такие, что $w_1 > 0, \ldots, w_N > 0$ и $w_1 + \ldots + w_N = 1$.

Суть задачи диверсификации состоит в том, чтобы минимизировать риск портфеля, оцененный по некоторой мере. Средние доходности активов для простоты считаем равными нулю.

Рассмотрим задачу диверсификации с двумя независимыми активами и мерой риска $\mathsf{MINV@R}_N(X)$, тогда формализация выглядит следующим образом

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = -\mathsf{E}\min\{\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_N\} \to \min_{w_1>0, w_2>0, w_1+w_2=1},$$

где $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_N$ — независимые копии случайной величины $X = w_1X_1 + w_2X_2$.

Пусть X_1 и X_2 — независимые случайные величины с распределением Лапласа с параметрами λ_1 и λ_2, их плотности имеют вид

$$p_{X_i}(x) = \frac{\lambda_i}{2}e^{-\lambda_i|x|}.$$

Плотность случайной величины $X = w_1X_1 + w_2X_2$ — свертка двух плотностей. Она имеет вид

$$p_X(x) = \frac{w_2\lambda_1^2\lambda_2 e^{-\frac{\lambda_2|x|}{w_2}} - w_1\lambda_2^2\lambda_1 e^{-\frac{\lambda_1|x|}{w_1}}}{2(w_2^2\lambda_1^2 - w_1^2\lambda_2^2)}.$$

Функция распределения X —

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{w_2^2\lambda_1^2 e^{\frac{\lambda_2 x}{w_2}} - w_1^2\lambda_2^2 e^{\frac{\lambda_1 x}{w_1}}}{2(w_2^2\lambda_1^2 - w_1^2\lambda_2^2)}, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - \frac{w_2^2\lambda_1^2 e^{-\frac{\lambda_2 x}{w_2}} - w_1^2\lambda_2^2 e^{-\frac{\lambda_1 x}{w_1}}}{2(w_2^2\lambda_1^2 - w_1^2\lambda_2^2)}, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$$

Чтобы получить значения $\mathsf{MINV@R}_N(X, w_1, w_2, \lambda_1, \lambda_2)$, интегрируем по формуле $\mathsf{MINV@R}_N(X) = N\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)(F_X(x))^{N-1}dx$. Так как случайная величина X распределена симметрично, можно производить вычисления только для четных N. Имеем

$$\mathsf{MINV@R}_2(X) = \frac{3w_1^4\lambda_2^4 + 9w_1^3w_2\lambda_1\lambda_2^3 + 11w_1^2w_2^2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 9w_1w_2^3\lambda_1^3\lambda_2 + 3w_2^4\lambda_1^4}{4\lambda_1\lambda_2(w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1)^3}$$

$$\mathsf{MINV@R}_4(X) = (798w_1^{10}\lambda_2^{10} + 8645w_1^9w_2\lambda_1\lambda_2^9 + 40005w_1^8w_2^2\lambda_1^2\lambda_2^8 + 105875w_1^7w_2^3\lambda_1^3\lambda_2^7 +$$
$$+181409w_1^6w_2^4\lambda_1^4\lambda_2^6 + 215375w_1^5w_2^5\lambda_1^5\lambda_2^5 + 181409w_1^4w_2^6\lambda_1^6\lambda_2^4 + 105875w_1^3w2^7\lambda_1^7\lambda_2^3 +$$
$$+40005w_1^2w_2^8\lambda_1^8\lambda_2^2 + 8645w_1w_2^9\lambda_1^9\lambda_2 + 798w_2^{10}\lambda_1^{10})/$$
$$(96\lambda_1\lambda_2(w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1)^5(w_1\lambda_2 + 2w_2\lambda_1)(2w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1)(w_1\lambda_2 + 3w_2\lambda_1)(3w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1)).$$

Выражения для $\mathsf{MINV@R}$ симметричны по λ_1, w_1 и λ_2, w_2. Зафиксируем $\lambda_2 = 1$ и воспользуемся тем, что $w_2 = 1 - w_1$. Продифференцируем $\mathsf{MINV@R}_2(\lambda_1, w_1)$ по w_1. Значения производной при $w_1 = 0$ и $w_1 = 1$

$$(\mathsf{MINV@R}_2)'_{w_1}(\lambda_1, 0) = -\frac{3}{4}, \quad (\mathsf{MINV@R}_2)'_{w_1}(\lambda_1, 1) = \frac{3}{4\lambda_1}.$$

Таким образом, минимум $\mathsf{MINV@R}_2(\lambda_1, w_1)$ по w_1 содержится внутри отрезка $[0; 1]$. Это же верно и для бо́льших N. Найдем точки минимума $\mathsf{MINV@R}_2$ при различных значениях λ_1.

Табл. 1: Оптимальные веса w_1 для $\mathsf{MINV@R_2}$.

λ_1	w_1
0.1	0.0075
0.3	0.0671
0.5	0.1764
0.7	0.3101
0.9	0.4410
1.0	0.5000

λ_1	w_1
1.2	0.6010
1.5	0.7126
2.0	0.8235
3.0	0.9175
4.0	0.9531
5.0	0.9699

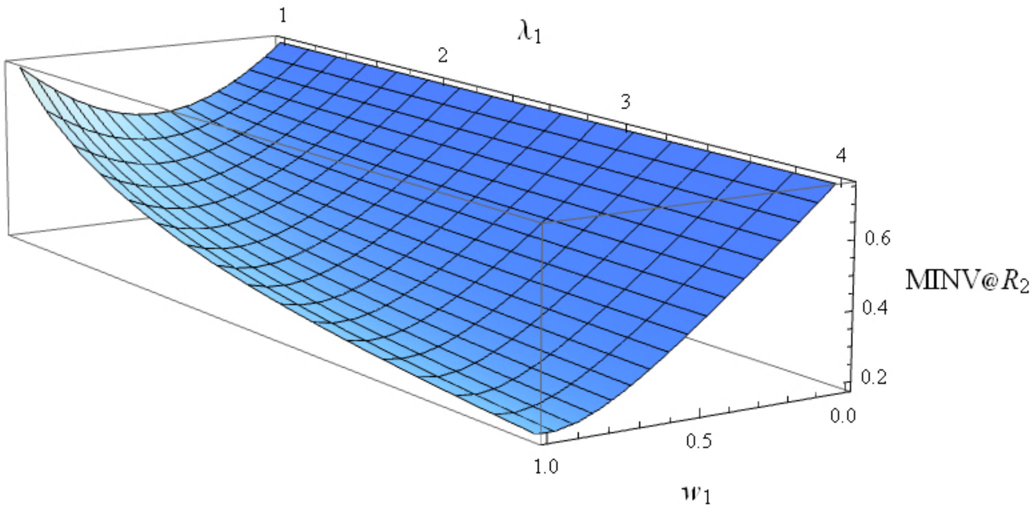

Рис. 1: Зависимость $\mathsf{MINV@R_2}$ от λ_1 и w_1 при $\lambda_1 \in [1.0; 4.0]$

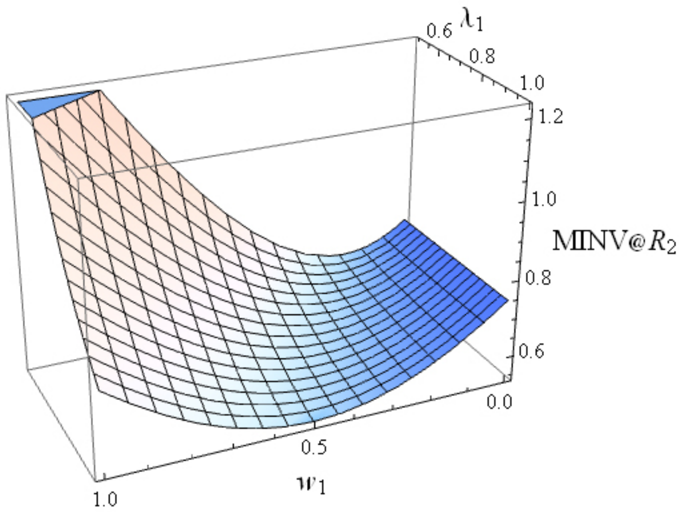

Рис. 2: Зависимость $\mathsf{MINV@R}_2$ от λ_1 и w_1 при $\lambda_1 \in [0.5; 1.0]$

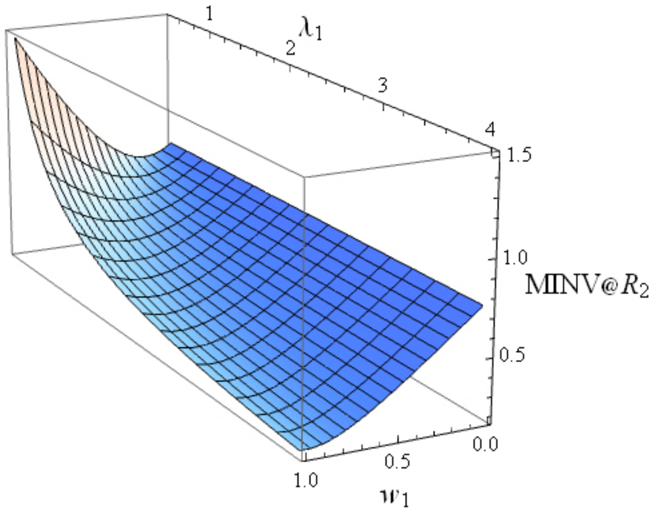

Рис. 3: Зависимость $\mathsf{MINV@R}_2$ от λ_1 и w_1 при $\lambda_1 \in [0.5; 4.0]$

Из трехмерных графиков хорошо видно, что с ростом λ_1 минимум $\mathsf{MINV@R}_2$ постепенно сдвигается от $w_1 = 0$ к $w_1 = 1$.

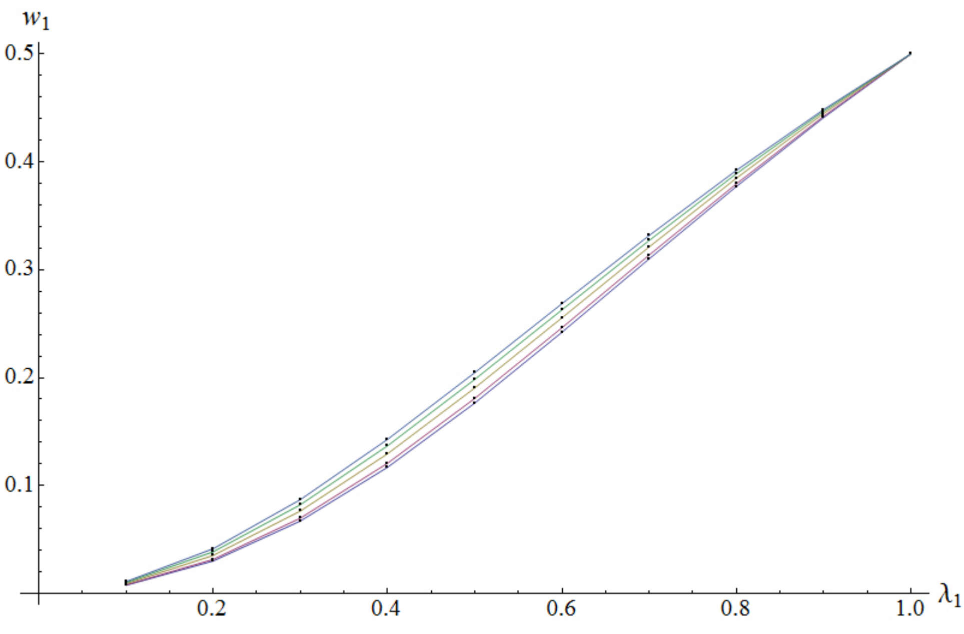

Рис. 4: Оптимальные w_1 при $\lambda_1 = 0.1; 0.2; \ldots; 0.9; 1.0$ для $\mathsf{MINV@R}_N$. Снизу вверх $N = 2, 4, 6, 8, 10$.

Как и следовало ожидать, при $\lambda_1 = 1$ оптимальные веса $w_1 = 0.5$, а при $\lambda_1 \to 0$ имеем $w_1 \to 0$.

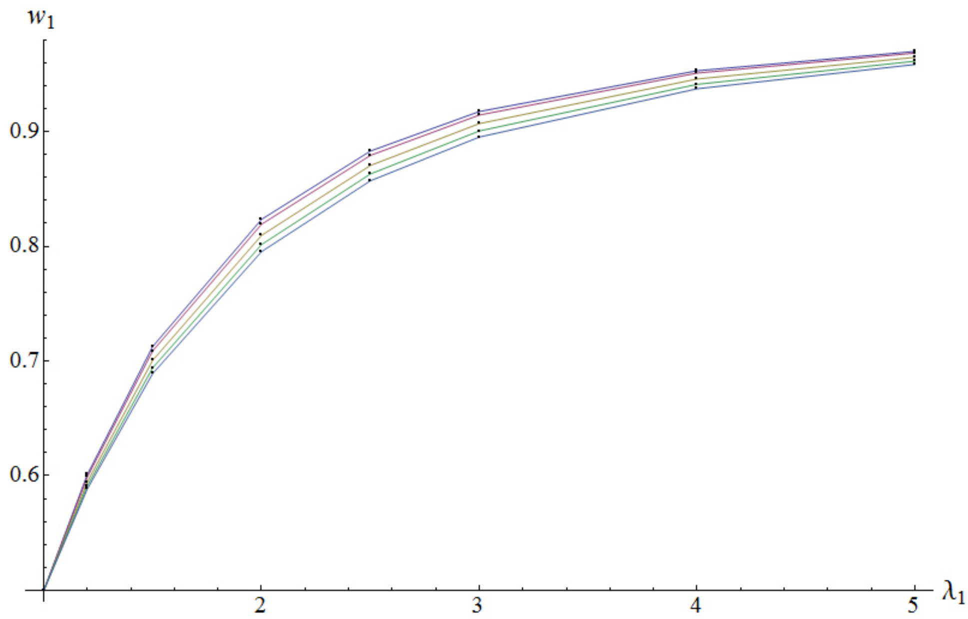

Рис. 5: Оптимальные w_1 при $\lambda_1 = 1.0; 1.2; 1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 4.0; 5.0$ для $\mathsf{MINV@R}_N$. Сверху вниз $N = 2, 4, 6, 8, 10$.

При $\lambda_1 \to \infty$ оптимальные веса $w_1 \to 1$.

Можно сравнить полученные оптимальные по $\mathsf{MINV@R}_N$ значения w_1 с оптимальным весом w_1', полученным традиционным методом минимизации дисперсии портфеля X [6, гл. 1, §2b]. В случае, когда $\lambda_2 = 1$, оптимальный вес $w_1' = \frac{\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}$.

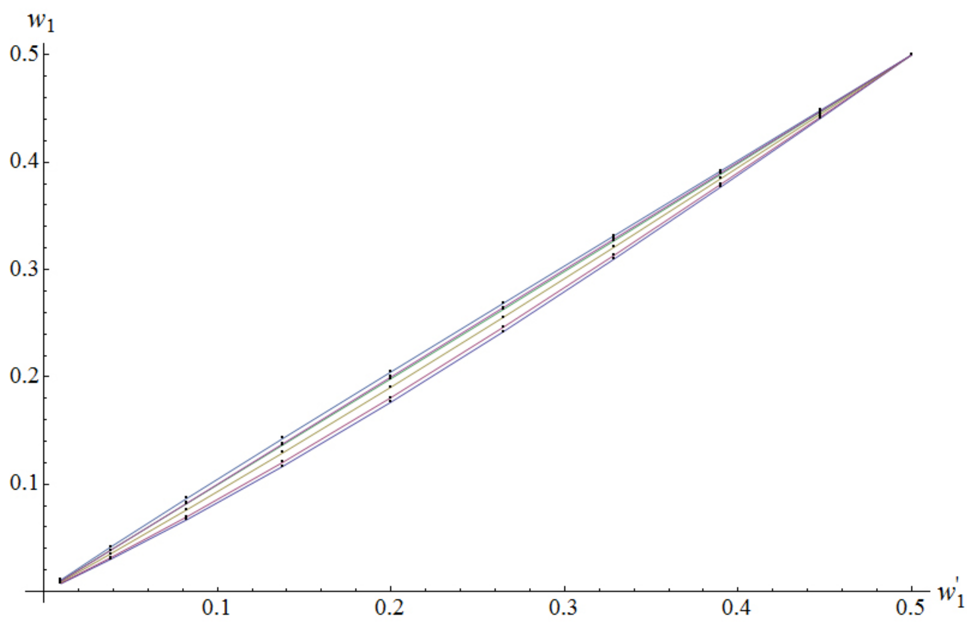

Рис. 6: Оптимальные значения w_1 в зависимости от w_1' при $\lambda_1 = 0.1; 0.2; \ldots; 0.9; 1.0$ и $w_1' \in [0.0; 0.5]$. Снизу вверх $N = 2, 4, 6, 8, 10$.

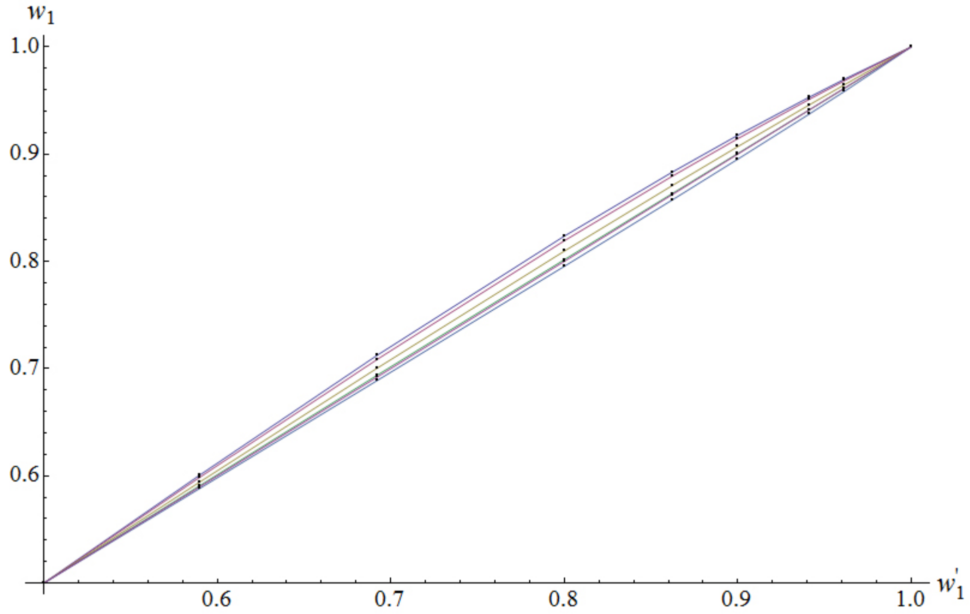

Рис. 7: Оптимальные значения w_1 в зависимости от w_1' при $\lambda_1 = 1.0; 1.2; 1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 4.0; 5.0; 500.0$ и $w_1' \in [0.5; 1.0]$. Сверху вниз $N = 2, 4, 6, 8, 10$.

Можно отметить, что оптимальные по дисперсии веса w_1' довольно близко совпадают с оптимальными w_1, полученными при помощи $\mathsf{MINV@R}_8$.

3.2 Оптимальный портфель при $N \to \infty$.

Для вывода оптимальных w_1 и w_2 при $N \to \infty$ необходимо вывести предельное распределение случайной величины $M_N = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$, т.е. найти такие a_N, b_N и $G(x)$, при которых

$$P\{a_N(M_N - b_N) \leq x)\} \xrightarrow{w} G(x).$$

Все возможные невырожденные функции распределения $G(x)$ образуют класс максимум-устойчивых распределений. Приведем три теоремы из [7].

Теорема 1. *Каждое M-устойчивое распределение имеет (с точностью до преобразований сдвига и масштаба) одну из следующих трех параметрических форм, называемых тремя распределениями экстремальных значений.*

Тип 1. $G(x) = exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty;$

Тип 2. $G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ exp(-x^{-\alpha}) \text{ для некоторого } \alpha > 0, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

Тип 3. $G(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^{\alpha}) \text{ для некоторого } \alpha > 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

Теорема 2. *Пусть функция распределения F н.о.р. случайных величин, образующих последовательность $\{X_N\}$, абсолютно непрерывна и имеет плотность f. Тогда приводимые ниже условия являются достаточными для того чтобы функция распределения F принадлежала соответствующей зоне притяжения:*

Тип 1: f имеет отрицательную производную f' для всех x в некотором интервале (x_0, x_F) $(x_F \le \infty)$, $f(x) = 0$ для $x \ge x_F$ и

$$\lim_{t \uparrow x_F} \frac{f'(t)(1 - F(t))}{f^2(t)} = -1;$$

Тип 2: $f(x) > 0$ для всех конечных $x \ge x_0$ и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{tf(t)}{1 - F(t)} = \alpha > 0;$$

Тип 3: $f(x) > 0$ для всех x в некотором конечном интервале (x_0, x_F), $f(x) = 0$ для $x > x_F$ и

$$\lim_{t \uparrow x_F} \frac{(x_F - t)f(t)}{1 - F(t)} = \alpha > 0.$$

Теорема 3. *Пусть $\{X_N\}$ — последовательность н.о.р. с.в. Пусть $0 \le \tau \le \infty$, и предположим, что $\{u_N\}$ — последовательность вещественных чисел, для которой $N(1 - F(u_N)) \to \tau$ при $N \to \infty$. Тогда $P\{M_N \le u_N\} \to e^{-\tau}$ при $N \to \infty$.*

Ещё нам понадобится одна теорема из [8].

Теорема 4. *(Пикандса) Если для некоторого положительного вещественного m при достаточно больших N выполнено $\mathbf{E}(M_N)_-^m < \infty$, то*

$$\lim_{N \to \infty} a_N^m \mathbf{E}(M_N - b_N)_-^m = \int_{-\infty}^{0} (-x)^m dG(x)$$

$$\lim_{N \to \infty} a_N^m \mathbf{E}(M_N - b_N)_+^m = \int_{0}^{+\infty} x^m dG(x),$$

при условии существования интегралов в правых частях равенств.

Легко проверить, что наше распределение с плотностью и хвостом

$$f(x) = \frac{w_2 \lambda_1^2 \lambda_2 e^{-\frac{\lambda_2 |x|}{w_2}} - w_1 \lambda_1 \lambda_2^2 e^{-\frac{\lambda_1 |x|}{w_1}}}{2(w_2^2 \lambda_1^2 - w_1^2 \lambda_2^2)} \qquad 1 - F(x) = \frac{w_2^2 \lambda_1^2 e^{-\frac{\lambda_2 x}{w_2}} - w_1^2 \lambda_2^2 e^{-\frac{\lambda_1 x}{w_1}}}{2(w_2^2 \lambda_1^2 - w_1^2 \lambda_2^2)}$$

удовлетворяет условию для первого типа из теоремы 2. Поэтому можем воспользоваться теоремой 3 для нахождения последовательностей a_N и b_N.

Введем новые параметры $c_1 = \frac{\lambda_1}{w_1}$ и $c_2 = \frac{\lambda_2}{w_2}$, тогда

$$1 - F(x) = \frac{c_1^2 e^{-c_2 x} - c_2^2 e^{-c_1 x}}{2(c_1^2 - c_2^2)} \sim \begin{cases} \frac{c_2^2}{2(c_2^2 - c_1^2)} e^{-c_1 x}, & \text{если } c_1 < c_2, \\ \frac{c_1^2}{2(c_1^2 - c_2^2)} e^{-c_2 x}, & \text{если } c_1 > c_2; \end{cases}$$

при $x \to \infty$. Рассмотрим первый случай. Чтобы условие теоремы 3 выполнялось, потребуем

$$\frac{c_2^2}{2(c_2^2 - c_1^2)} e^{-c_1 u_N} = \frac{\tau}{N}.$$

Тогда

$$P\left\{M_N \le -\frac{\ln \frac{\tau}{N}\frac{2(c_2^2-c_1^2)}{c_2^2}}{c_1}\right\} \to e^{-\tau}$$

при $N \to \infty$ и, произведя замену $\tau = e^{-x}$, получим

$$P\left\{M_N \le \frac{x + \ln N - \ln \frac{2(c_2^2-c_1^2)}{c_2^2}}{c_1}\right\} \to exp(-e^{-x}).$$

Таким образом, $a_N = c_1$ и $b_N = \frac{\ln N - \ln \frac{2(c_2^2-c_1^2)}{c_2^2}}{c_1}$ при $c_1 < c_2$, а во втором случае, при $c_1 > c_2$, получаем $a_N = c_2$ и $b_N = \frac{\ln N - \ln \frac{2(c_1^2-c_2^2)}{c_1^2}}{c_2}$.

В общем случае из сходимости по распределению сходимость математических ожиданий не следует. Однако, в случае сходимости максимумов к распределению экстремального типа можно воспользоваться теоремой 4. Положим $m = 1$ и вычтем из положительной части отрицательную

$$\lim_{N\to\infty} a_N \mathbf{E}(M_N - b_N)_+ - \lim_{N\to\infty} a_N \mathbf{E}(M_N - b_N)_- = \lim_{N\to\infty} a_N \mathbf{E}(M_N - b_N)$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x dG(x) - \int\limits_{-\infty}^{0} (-x) dG(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dG(x)$$

Таким образом, $\mathbf{E}a_N(M_N - b_N) \to \mathbf{E}Y$ при $N \to \infty$, где Y имеет функцию распределения $G(x)$, и можно считать, что

$$\mathbf{E}M_N \approx b_N + \frac{\mathbf{E}Y}{a_N}.$$

Обозначим правую часть приближенного равенства через $\widehat{\mathbf{E}M_N}$.

Так как $P\{a_N(M_N - b_N) \le x\} \xrightarrow{w} G(x)$ и для $Y \sim G(x)$ математическое ожидание $\mathbf{E}Y = \gamma$ — постоянная Эйлера, то при $N \to \infty$

$$\widehat{\mathbf{E}M_N} = \begin{cases} \frac{\gamma + \ln N - \ln \frac{2(c_2^2-c_1^2)}{c_2^2}}{c_1}, & \text{если } c_1 < c_2, \\ \frac{\gamma + \ln N - \ln \frac{2(c_1^2-c_2^2)}{c_1^2}}{c_2}, & \text{если } c_1 > c_2. \end{cases}$$

Для нахождения минимума $\widehat{\mathbf{E}M_N}$ возьмем производную по w_1.

$$(\widehat{\mathbf{E}M_N})'_{w_1} = \begin{cases} -\frac{2(1-w_1)\lambda_1}{w_1^2\lambda_2^2-(1-w_1)^2\lambda_1^2} + \frac{\gamma+\ln N - \ln 2\left(1-\frac{(1-w_1)^2\lambda_1^2}{w_1^2\lambda_2^2}\right)}{\lambda_1}, & \text{если } \frac{\lambda_1}{w_1} < \frac{\lambda_2}{1-w_1}; \\ \frac{2w_1\lambda_2}{(1-w_1)^2\lambda_1^2-w_1^2\lambda_2^2} - \frac{\gamma+\ln N - \ln 2\left(1-\frac{w_1^2\lambda_2^2}{(1-w_1)^2\lambda_1^2}\right)}{\lambda_2}, & \text{если } \frac{\lambda_1}{w_1} > \frac{\lambda_2}{1-w_1}. \end{cases}$$

Видно, что при $N \to \infty$ производная не обращается в ноль при ограничениях, но особая точка $\frac{\lambda_1}{w_1} = \frac{\lambda_2}{1-w_1}$ является минимумом. В итоге оптимальный вес $w_1^\infty = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Сравним полученный вес w_1^∞ с весами w_1^N при больших N. Оптимальные значения для $N = 10, 20, 30, 40, 50$ вычислены при помощи программного пакета Wolfram Mathematica.

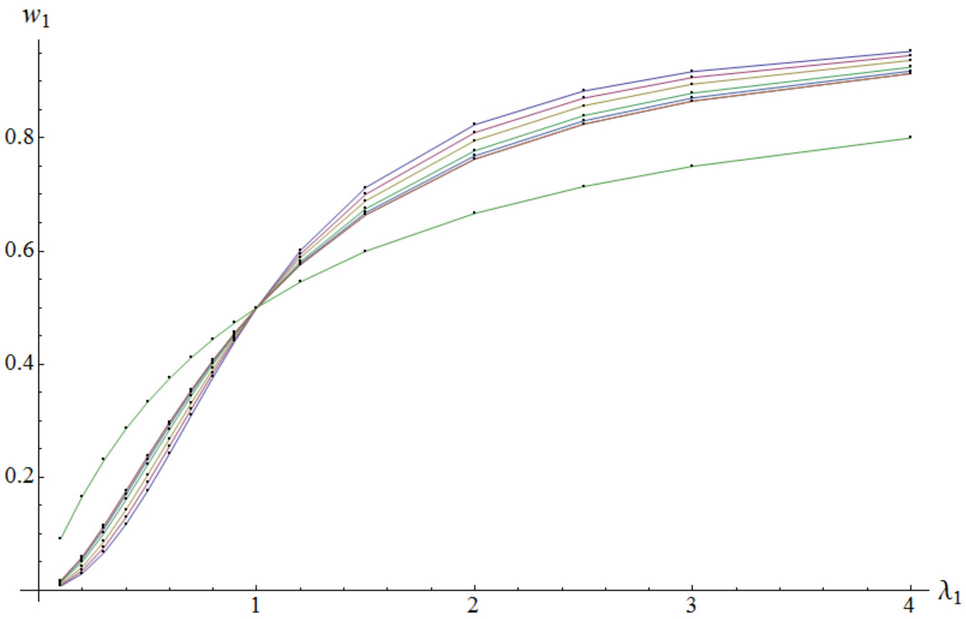

Рис. 8: Оптимальные w_1^∞ в сравнении с оптимальными w_1^N для $\mathsf{MINV@R}_N$ при $\lambda_1 = 0.1; 0.2; \ldots; 0.9; 1.0; 1.2; 1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 4.0; 5.0$ и $N = 2, 6, 10, 20, 30, 40, 50$.

Из графика видно, что с ростом N оптимальные веса w_1^N постепенно приближаются к предельным значениям w_1^∞, однако это происходит довольно медленно.

Следует отметить, что в реальности активы обычно не являются независимыми. Учет этого обстоятельства при оптимизации остается предметом дальнейших исследований.

4 Задача о восстановлении квантилей функции распределения

Зададимся вопросом: существует ли взаимно однозначное соответствие между распределением случайной величины X и последовательностью $\mathsf{MINV@R}_N(X)$? Эта проблема аналогична той, что возникает при изучении моментов распределения. Как отмечено в [9, гл. 7, §3] в общем случае распределение не определяется однозначно своими моментами (существуют семейства распределений, у которых все моменты совпадают). В нашем же случае ответ оказывается положительным: взаимная однозначность имеет место.

Поставим конструктивную задачу о восстановлении квантилей функции распределения по значениям $\mathsf{MINV@R}$. Воспользуемся свойством интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dI_a(x) = a, \text{ где } I_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq a; \\ 0, & \text{если } x < a. \end{cases} \text{ — индикатор.}$$

Подставив функцию распределения в индикатор, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dI_a(F(x)) = q_a,$$

где q_a — a-квантиль функции распределения.

По определению,

$$\mathsf{MINV@R}_N(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X^N(x),$$

то есть, приблизив индикатор комбинациями многочленов, можно приблизить квантиль функции распределения комбинациями $\mathsf{MINV@R}_N(X)$.

Будем искать приближающий многочлен $I_{kl}(x)$ в виде интеграла функции $f_{kl}(x)$, стремящейся к дельта-функции в точке a, положив

$$f_{kl}(x) = C_{kl} x^k (1-x)^l, \quad 0 < x < 1.$$

Из условия $f'_{kl}(a) = 0$ находим $\frac{k}{k+l} = a$, а из условия $\int\limits_0^1 f_{kl}(x)dx = 1$ получаем $C_{kl} = \frac{(k+l+1)!}{k!l!}$. Если брать $l = [\alpha k]$, то из первого условия следует $\alpha = \frac{1}{a} - 1$. Интегрируя, находим функцию

$$I_{kl}(x) = \frac{(k+l+1)!}{k!l!} \int_0^x x^k (1-x)^l dx$$

$$= \frac{(k+l+1)!}{k!l!} \sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} \frac{(-1)^m}{m+k+1} x^{m+k+1} \to I_a(x) \text{ при } k \to \infty.$$

В итоге,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dI_{kl}(F(x)) = \frac{(k+l+1)!}{k!l!} \sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} \frac{(-1)^m}{m+k+1} \mathsf{MINV@R}_{k+m+1}(X) \to$$

$$\to q_a = \int_{-\infty}^{+\infty} x dI_a(F(x)).$$

Для проверки возьмем распределение Лапласа с параметром 1 и попробуем восстановить его функцию распределения, которая имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2}, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$$

Параметр k выбираем таким образом, чтобы $l \approx 1000$. Значения $\mathsf{MINV@R}_N(X)$ считаем по формуле $\mathsf{MINV@R}_N(X) = N \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)(F(x))^{N-1}dx$, где $p(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$ — плотность распределения, используя программный пакет Wolfram Mathematica.

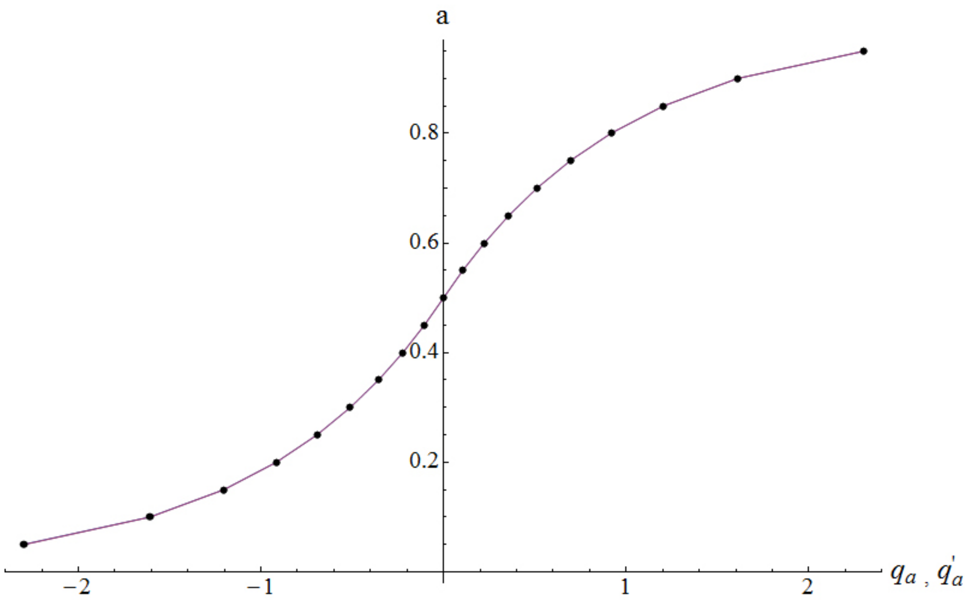

Рис. 9: График q_a, q'_a.

Графики функции распределения и функции, построенной по полученным квантилям, практически совпадают.

Список литературы

[1] *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.*, Thinking coherently // Risk, 1997, v. 10, №11, p. 68–71.

[2] *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.*, Coherent measures of risk // Mathematical Finance, 1999, v. 9, №3, p. 203–228.

[3] *Cherny A.S.*, Weighted V@R and its properties // Finance and Stochastics, 2006, v. 10, p. 367–393.

[4] *Cherny A.S., Orlov D.V.*, On two approaches to coherent risk contribution // Mathematical Finance, 2010, v. 21, №3, p.557–571.

[5] *Орлов Д.В.*, О двух оценках одной меры риска // Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, №1, с.168–172.

[6] *Ширяев А.Н.*, Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.

[7] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. Москва, Мир, 1989.

[8] *Pickands J.*, Moment convergence of sample extremes // Annals of Mathematical Statistics, 1968, v. 39, №3, p. 881–889.

[9] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

Abstracts

From infinite divisibility to compensatory approach to limit theorems for semimartingales

Shiryaev A.N., academician of RAS;
general scientific researcher, Steklov Mathematical Institute;
professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU;
e-mail: albertsh@mi.ras.ru

Monograph "Limit theorems for sums of independent random variables" (1946) by B.V.Gnedenko and A.N.Kolmogorov signified not only creation of the general theory of weak convergence of sums of independent random variables but also opened the way of the finding limit theorems for dependent random variables. In sixties–seventies of the last century the martingales and semimartingales theory got great development including the theory of limit theorems for such processes. The aim of the paper consists in the presentation of the "compensators" approach in the limit theorems for semimartingales where convergence is expressed in terms of convergence of the triplets of the predictable chracteristics, thus extending, conditions of Gnedenko and Kolmogorov.

Inventory systems with order constraints

Bulinskaya E.V., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: ebulinsk@yandex.ru
Shakhgildyan K.D., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: ksy-shakhgildyan@yandex.ru

The aim of the paper is investigation of a periodic-review inventory system. There is a possibility of sending replenishment orders to either of two suppliers or both of them. It is supposed that the first supplier delivers the ordered items immediately. The second one being unreliable delivers immediately only with probability $p \in (0, 1)$, whereas with probability $q = 1-p$ there is a one-period delivery lag. At first we consider the possibility of any order size at each of suppliers. After that the budget restrictions are introduced. The optimal policy minimizing the discounted mean costs is established for any planning horizon.

Some considerations upon the methods of presentation of two fundamental questions of the theory of probability in the physic-mathematical schools

Vinogradov O.P., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: ovinogradov@mail.ru

An elementary approach is proposed for the study of the fundamental questions of the probability theory (the law of large numbers, the independence of the events).

Optimal time to sell one stock and buy another

Vorobyev A.L., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: alvorobyev88@gmail.com

A new formulation of the optimal stopping problem for selling one stock and buying another is presented. It is reduced to the problem of selling one stock in the Black-Merton-Scholes model (continuous time) and in particular case in Cox-Ross-Rubinstein model (discrete time).

Indices of multivariate recursive stochasic sequences

Goldaeva A.A., assistant, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU;
e-mail: gold_ann@list.ru

We find formulae of tail and extreme indices for some recursive stochastic sequences.

Optimal investments in model with capital injections

Gromov A.N., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: gromovaleksandr@gmail.com

Discrete time model of insurance company is considered. We assume that additional capital is injected into insurance company when its surplus falls below some fixed level. In order to minimize the total amount of such injections, the insurer invests money into the risky asset and the amount invested each year is fixed on the base of claim history. Our goal is to minimize the discounted sum of capital injections by choosing the optimal investment strategy. We show that the minimal amount of injected capital satisfies the Bellman equation, and the optimal volume of investment is defined by the single solution of some integral equation. Numerical example in case of exponentially distributed claims is provided.

On the upper hedging price of nonnegative contingent claims

Gushchin A.A., leading scientific researcher, Steklov Mathematical Institute;
professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: gushchin@mi.ras.ru

We consider an abstract market model $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \mathcal{A}(x))$, where $\mathcal{A}(x) = x\mathcal{A}$, $x \geq 0$, is the set of terminal wealths of an investor corresponding to strategies with initial wealth x. Main results of the paper give necessary and sufficient condition for the upper hedging price $\pi(B)$ of a nonnegative contingent claim B to be represented in the form $\sup_{\eta\in\mathcal{D}} \mathsf{E}\eta B$, where $\mathcal{D}$ is a set of nonnegative (or strictly positive) random variables or probability densities.

Estimation of cubic copulas parameters

Zaytsev V.N., student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU;
e-mail: zaytsev_victor@mail.ru

Estimates with optimal uniformly bounded variance for parameters of a family of copulas with cubic sections are obtained.

Matrix cones and conic hypotheses in multivariate Gaussian analysis

Kashitsyn P.A., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: pavel.kash@gmail.com

The concept of a matrix cone in $\mathbb{R}^p_n$ is introduced and its main properties are investigated. On the basis of this concept we consider the problem of testing conic hypotheses in multivariate Gaussian analysis. This problem is a generalization of the corresponding univariate analogs. The distribution of the critical test is obtained under the hypothesis.

Continuous and discrete time maxima of the extremal shot noise

Lebedev A.V., associate professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: avlebed@yandex.ru

We consider the extremal shot noise process. It is assumed that the amplitude distribution has a regularly varying tail. We find the tail asymptotics of the limiting distribution. A nontrivial joint limit distribution of maxima in continuous and discrete time, with a common normalization, is obtained. We calculate the extremal index for the discrete time process.

On relationship between α-stable and max-stable distributions

Lebedev A.V., associate professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: avlebed@yandex.ru

We consider three families of commutative and associative operations which are intermediate between the sum and the maximum. They help to find a relationship between α-stable and max-stable distributions.

The Laplace asymptotic decomposition of rare event probabilities for some class of distributions from the Gumbel maximal domain of attraction

Rodionov I.V., junior researcher, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: vecsell@rambler.ru

The asymptotic behavior of rare event probabilities for the important class of distributions from the Gumbel maximal domain of attraction is found.

Fluctuations of α-effect and mean-field equations in short correlation time approximation

Rubashny A.S., Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: alex.rubashny@gmail.com
Sokoloff D.D., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: sokoloff.dd@gmail.com

Mean-field dynamo model with fluctuating α-coefficient demonstrated recently its ability to mimic long-term behaviour of solar cycle. Mathematical status of such models remains however much less clear than that of traditional mean-field dynamos. In order to clarify this status we derive the governing equation for magnetic field additionally averaged over α-fluctuations in the framework of short-correlated approximation for the fluctuations. We demonstrate that the result turns out to be much less robust then that for the dynamo governing equations averaged over short-correlated velocity fluctuations. It seems that the approximation of short correlations in the problem under consideration is much less adequate then that in traditional mean-field theory.

On some properties of minimum-based coherent risk measures and related problems

Sverchkov R.A., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: sverchkov.r@gmail.com

We consider minimum-based coherent risk measures from the family of MINV@R. We study properties of symmetric distributions measures, we solve the portfolio diversification problem in the case of the Laplace distribution, as well as the problem of the distribution reconstruction on the base of its risk measures.

СОДЕРЖАНИЕ

Предыдущие выпуски серии «Современные проблемы математики и механики»

Том I. Прикладные исследования

Выпуск 1. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.
Выпуск 2. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Том II. Механика

Выпуск 1. Под редакцией Г.Г. Черного, В.П. Карликова.
Выпуск 2. Под редакцией Б.Е. Победри, Е.В. Ломакина.

Том III. Математика

Выпуск 1. Под редакцией Т.П. Лукашенко, В.Н. Чубарикова.
Выпуск 2. Геометрия и топология. Под редакцией А.Т. Фоменко.
Выпуск 3. Дискретная математика. Под редакцией О.М. Касим-Заде.

Том IV. Математика

Выпуск 1. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева.

Выпуск 2. Динамические системы. Под редакцией А.Т. Фоменко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. Алгебра и теория чисел. Под редакцией В.А. Артамонова, В.Н. Латышева, Ю.В. Нестеренко.

Том V. Математика

Выпуск 1. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.Н. Сергеева, А.С. Шамаева.

Выпуск 2. Прикладная математика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева, Г.М. Кобелькова.

Выпуск 3. Математическая кибернетика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева.

Том VI. Математика

Выпуск 1. К 105-летию С.М. Никольского. Под редакцией М.К. Потапова, И.Н. Сергеева, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Том VII. Математика. Механика

Выпуск 1. К 190-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова, А.С. Кулешова.

Выпуск 2. Научные достижения кафедр к 80-летию механико-математического факультета.

Том VIII. Математика

Выпуск 1. К 80-летию А.Г. Костюченко (В.В. Власов, Д.А. Медведев, Н.А. Раутиан, Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. 2011).

Выпуск 2. К 80-летию мехмата, к 130-летию Н.Н Лузина, к 85-летию П.Л. Ульянова.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том VIII. Математика

Выпуск 3
К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
и 110-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова
Теория вероятностей и математическая статистика

Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева

Подготовка оригинал-макета: А.В. Лебедев

Подписано в печать 30.04.2013
Формат 60 x 90 /8 Бумага офс. №1. Усл. печ. л. 9.
Отпечатано в типографии МГУ. 119991, ГСП-1, г. Москва,
Ленинские горы, д. 1, стр. 15. Заказ . Тираж 100 экз.