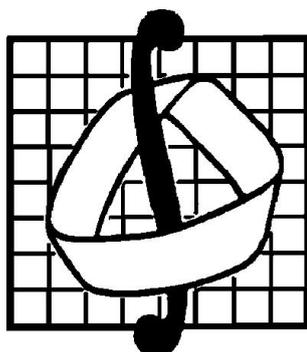


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том X

Математика

Выпуск 3

Теория вероятностей и математическая статистика

К 80-летию кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

Москва
2015

УДК 519.2
ББК 22
С 56

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том X. Математика. Выпуск 3. Теория вероятностей и математическая статистика / Под редакцией А.Н.Ширяева, А.В.Лебедева. — М.: Ленанд, 2015. — 208 с.

Сборник посвящен 80-летию кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, основанной в 1935 году великим русским ученым, академиком А.Н.Колмогоровым, ставшим первым заведующим кафедрой.

В настоящем выпуске представлен ряд статей сотрудников, аспирантов и студентов кафедры и ее лабораторий, а также задачи XIV Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей.

Сборник будет полезен преподавателям вузов, научным сотрудникам, студентам, аспирантам и всем, кто интересуется современной математикой.

Подготовка оригинал-макета: А.В.Лебедев

Научное издание

Формат 60 x 90/16. Печ. л. 13. Зак. № ИМ-34.

Отпечатано в ООО «Ленанд».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-2380-7

© Коллектив авторов, 2015

© Ленанд, 2015

*Выпуск посвящается 80-летию кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова*

Предисловие

Кафедра теории вероятностей была образована на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова в 1935 году. Ее возглавил великий русский ученый, академик А.Н.Колмогоров (1903–1987). Впоследствии кафедра стала одним из основных центров по подготовке специалистов и по научным исследованиям в области теории вероятностей и математической статистики в нашей стране. Многие поколения советских и российских ученых в этой области науки считают себя питомцами этой кафедры. А.Н.Колмогоров руководил кафедрой с 1935 по 1966 год. С 1966 по 1995 год ею заведовал академик Б.В.Гнеденко (1912–1995). С 1996 года заведующим кафедрой теории вероятностей является академик РАН, профессор А.Н.Ширяев.

На кафедре также работали такие всемирно известные ученые, как А.Я.Хинчин, В.И.Гливенко, Е.Е.Слущкий, Е.Б.Дынкин, Р.Л.Добрушин, Б.А.Севастьянов, Ю.В.Прохоров, И.В.Гирсанов, А.Д.Соловьев, Я.Г.Синай, А.Д.Вентцель, М.И.Фрейдлин, С.А.Молчанов и др.

В 2015 году кафедра насчитывает 37 сотрудников, из них: профессоров — 18, доцентов — 13, старших преподавателей — 2, ассистентов — 4.

Помимо преподавания предметов вероятностного цикла на механико-математическом факультете (общие потоки математиков и механиков, экономический поток, вечернее отделение), кафедра осуществляет обучение теории вероятностей и математической статистике на факультетах: химии, геологии, психологии, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, наук о материалах.

В 2014 году сотрудниками кафедры было издано 4 книги (монографии и учебные пособия).

На кафедре ведутся обширные и разнообразные исследования в области теории вероятностей и ее приложений. Эти исследования регулярно поддерживаются грантами РФФИ. В качестве основных направлений можно назвать следующие.

1. Теория вероятностей и математическая статистика (общие вопросы, предельные теоремы и их уточнения, теория статистических выводов).

2. Теория случайных процессов и стохастическое исчисление (предельные теоремы, семимартингалы, стохастические дифференциальные уравнения, броуновское движение, процессы Леви, ветвящиеся процессы, случайные блуждания, граничные задачи, теория экстремальных значений).

3. Применения к задачам математической физики, математической биологии, теории информации, теории массового обслуживания, актуарной и финансовой математики и др.

Результаты исследований 2014 года опубликованы в виде 97 научных статей и докладывались на научных конференциях в России и за рубежом (всего 71 доклад на 63 конференциях).

16–21 июня 2003 года под эгидой Российской Академии наук и Московского университета проводилась Международная конференция «Колмогоров и современная математика», посвященная 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова. Основная нагрузка по организации конференции легла на сотрудников кафедры теории вероятностей во главе с А.Н.Ширяевым (вице-председателем оргкомитета конференции). Число участников

конференции составило почти 1000 человек. Сотрудниками кафедры было сделано 15 докладов. Сборник тезисов конференции составил 916 страниц.

26–30 июня 2012 года состоялась Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения академика Б.В.Гнеденко. Конференция была организована кафедрой на механико-математическом факультете МГУ при финансовой поддержке РФФИ и других спонсоров. Семь основных секций конференции отразили научные интересы и достижения Б.В.Гнеденко в различных областях теории вероятностей и ее приложений, истории математики и математического образования. В докладах конференции представлены итоги развития его идей и результатов. Количество участников составило 188 человек, из них зарубежных — 42, из МГУ — 41. Всего было сделано 170 докладов, из них сотрудниками МГУ — 31. По итогам конференции издан сборник тезисов объемом 400 страниц, его электронный вариант представлен на сайте кафедры.

12 октября 2014 года исполнилось 80 лет заведующему кафедрой академику А.Н.Ширяеву. Его научная деятельность охватывает различные области теории вероятности и математической статистики, как то: нелинейная теория стационарных случайных процессов, проблемы наискорейшего обнаружения спонтанно возникающих эффектов, стохастические дифференциальные уравнения с частными производными, стохастическая оптимизация, теория мартингалов, общая теория статистических экспериментов, предельные теоремы для случайных процессов, финансовая математика и др. Он автор многих фундаментальных результатов в перечисленных областях.

А.Н.Ширяев — лауреат премии имени А.А.Маркова АН СССР (1974), премии имени А.Н.Колмогорова РАН (1994), Гумбольдтовской научной премии (1996), международной премии А.Вальда (2011). Удостоен звания «Человек года» Американским биографическим институтом (1994). Почетный доктор Университета им. Альберта Людвиг г. Фрайбурга (на Брейсгау), Германия (2000). Почетный профессор Амстердамского университета (2002). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (2005). Президент Российского общества актуариев (1994–1998), президент Международного Общества Бернулли (1989–1991), президент Международного общества Башелье по финансовой математике (1998–1999); почетный член Королевского Статистического Общества Великобритании (1985); член Международного статистического института, Института математической статистики США; член Европейской Академии (1990), Московского математического общества. Многократно выступал в качестве пленарного докладчика, а также в роли основного организатора различных международных конференций.

А.Н.Ширяев — выдающийся организатор российской вероятностной школы, подготовил более 60 кандидатов наук и 30 докторов наук. Он является автором знаменитого учебника «Вероятность», который вышел уже 9 изданиями (в том числе, 4 зарубежными). В 2003 году издан учебник «Теория случайных процессов» (совместно с А.В. Булинским). Всего им опубликовано 10 монографий, 8 учебных пособий и около 300 научных статей. А.Н.Ширяев является главным редактором журнала «Теория вероятностей и ее применения» (журнал А.Н.Колмогорова), а также входит в состав редколлегий ряда других ведущих мировых научных журналов. Он является также редактором-составителем ряда книг о своем учителе А.Н.Колмогорове, в том числе юбилейного издания «Колмогоров» (2003).

Сотрудники кафедры приняли активное участие в проведении международных конференций «Stochastics, Statistics, Financial Mathematics» (МИАН, 13–15 октября 2014, посвященная 80-летию академика А.Н.Ширяева), «Probability, Analysis and Geometry» (мехмат МГУ, 30 сентября — 4 октября 2014), «Probability Theory and its Applications» (МИАН,

ВМК МГУ, 12–14 февраля 2015, посвященная 85-летию со дня рождения Ю.В.Прохорова). На Ломоносовских чтениях, посвященных 260-летию МГУ имени М.В.Ломоносова, профессор А.В.Булинский выступил с докладом «Статистические методы отбора значимых переменных».

Тема доклада была связана с ранее осуществленным проектом по вероятностно-статистическому анализу генетических данных (в сотрудничестве с факультетом фундаментальной медицины МГУ), направленным на изучение рисков сложных заболеваний (руководители — академики РАН В.А.Садовничий и В.А.Ткачук). От кафедры, помимо А.В.Булинского, в нем участвовали доцент А.П.Шашкин и ассистент П.А.Яськов, а также аспиранты. При реализации разрабатываемых методов понадобилось создать соответствующее программное обеспечение и использовать суперкомпьютер МГУ «Чебышев».

Профессор А.В.Булинский также является координатором сотрудничества с Институтом стохастики университета Ульма (Германия) в рамках общего договора о сотрудничестве между МГУ и университетом Ульма, по которому осуществляется обмен преподавателями, аспирантами и студентами с российской и немецкой сторон, проведение совместных исследований и симпозиумов и др.

Профессор Е.В.Булинская с 2007 года является членом программных комитетов конференций IWS (International Workshop on Simulation), ASMDA (Applied Stochastic Models and Data Analysis) SMTDA (Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis) и организует специальные секции на этих и других конференциях. В частности, ею организованы секции на IWS-2015 и ASMDA-2015.

Кафедра ведет активную работу со студентами, привлекая их к науке. На кафедре регулярно проводятся Колмогоровские студенческие олимпиады.

25 апреля 2015 года, в ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова, была проведена XIV Колмогоровская студенческая олимпиада по теории вероятностей. В олимпиаде приняли участие 54 студента (18 – младших курсов, 36 – старших) механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, а также СПбГУ и МГСУ. Задачи и результаты всех Колмогоровских олимпиад представлены на сайте кафедры.

Студенты и аспиранты кафедры регулярно выступают на ежегодной Международной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «Ломоносов», проходящей в МГУ имени М.В.Ломоносова. В 2015 году на подсекции «Теория вероятностей и математическая статистика» (13–15 апреля) ими было представлено 20 докладов из 29.

В 2014 году студенты кафедры (4 курс) прошли производственную практику в ряде организаций: педагогических (Центр дополнительного образования одаренных школьников, лицей № 1533 (информационных технологий), лицей «Вторая школа»), научных (Научная педагогическая библиотека имени К.Д.Ушинского Российской академии образования, Московский научно-исследовательский телевизионный институт, Государственный научно-исследовательский центр профилактической медицины, Институт гуманитарного развития мегаполиса), коммерческих (Яндекс, Рамблер Интернет Холдинг, Кэшофф Лаб, Олимпия Капитал ЛТД, ЕТС, Внешэкономбанк, ПиДжиЭм Евразия, Комос-строй, ЭйТи Консалтинг, Форсет, Барамист Менеджмент Лимитед и др.).

В 2015 году на кафедре обучается 21 аспирант, из них 13 участвует в грантах РФФИ сотрудников. В 2014 году состоялось три защиты кандидатских диссертаций аспирантов и выпускников кафедры в МГУ. Кроме того, ассистент кафедры А.А.Голдаева в 2014 году защитила кандидатскую диссертацию на тему «Тяжёлые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей» (руководитель — доцент А.В.Лебедев), а младший научный сотрудник И.В.Родионов на тему «Статистический

анализ и проверка гипотез о распределении экстремумов временного ряда» (руководитель — профессор В.И.Питербарг).

Кафедра теории вероятностей поддерживает инновации в образовании и науке. С весны 2014 году профессор А.В.Булинский начал вести спецкурс на английском языке «Introduction to Markov Processes»; профессор Г.И.Фалин подготовил курсы «Risk Models» и «Mathematics of finance and investment», профессор Е.В.Булинская — курс «Stochastic inventory and insurance models».

В 2014 году доцент Е.Б.Яровая (в соавторстве с академиком В.С. Ткачуком, доцентом Л.М. Самоходской, к.м.н. Е.М. Демидовой и к.м.н. О.Н.Садековой) получила патент на изобретение «Способ определения наследственной предрасположенности к развитию привычного невынашивания беременности». Изобретение относится к области молекулярной биологии и медицины, основано на применении вероятностно-статистических методов к анализу данных и предназначено для определения генетической предрасположенности к заболеванию. Совместная научная и преподавательская работа на факультетах фундаментальной медицины и биоинженерии и биоинформатики проводится уже более 10 лет. Е.Б.Яровой за эти годы подготовлен ряд спецкурсов для сотрудников, специализирующихся в области медико-биологических исследований. В 2015 году Е.Б.Яровая организовала на 60 Всемирном конгрессе по статистике секцию «Сложные стохастические модели и их статистический анализ».

Заслуги сотрудников кафедры высоко отмечены руководством МГУ. На кафедре работает много заслуженных профессоров (А.Н.Ширяев, Л.Г.Афанасьева, Е.В.Булинская, О.П.Виноградов, Ю.Н.Тюрин, В.Н.Тутубалин) и преподавателей МГУ (Д.Б.Гнеденко, В.В.Козлов). Упомянем лишь последние события.

В 2013 году профессора Л.Г.Афанасьева и В.Н.Тутубалин награждены почетной грамотой Минобрнауки РФ. Младший научный сотрудник Е.А.Илларионов получил стипендию МГУ для молодых преподавателей и научных сотрудников на 2014 год, а доцент Д.А.Шабанов на 2015 год. В 2014 году инженеру Н.В.Власовой присвоено звание заслуженного работника МГУ, в 2015 году инженер Т.А.Нифонтова награждена почетной грамотой Минобрнауки РФ.

При кафедре теории вероятностей функционируют три лаборатории.

Лаборатория теории вероятностей (ЛТВ) существует с 1976 года. С 1997 года ее заведующим является профессор В.И.Питербарг.

В 2015 году в лаборатории работает 7 сотрудников: главный научный сотрудник (зав. лаб.), 2 ведущих научных сотрудника, 3 старших научных сотрудника, 1 младший научный сотрудник.

На протяжении многих лет в лаборатории работало два научных семинара: вероятностных методов в технике и случайных процессов и полей, которые оказали значительное влияние на развитие соответствующих областей теории вероятностей и приложений. На их базе было организовано несколько всесоюзных и международных конференций, школ и симпозиумов.

В настоящее время основные исследования в лаборатории ведутся в области разработки асимптотических методов исследования локальных свойств и глобального поведения траекторий гауссовских случайных процессов и полей, а также статистической теории экстремумов. В.И.Питербарг является членом редколлегии международного научного журнала «Extremes».

Помимо грантов РФФИ, в последние годы лаборатория работала по хозяйственному договору со Всероссийским институтом подшипниковой промышленности (ВНИП) и по гранту Евросоюза FP7 «Risk Analysis, Ruin and Extremes» (в рамках которого проводятся

совместные исследования, стажировки и конференции).

Лаборатория вычислительных средств (ЛВС) работает при кафедре теории вероятностей с 1976 года. Заведующим лабораторией с момента ее основания является доцент Е.В.Чепурин.

В 2015 году в лаборатории работает 7 сотрудников: доцент (зав. лаб.), 1 младший научный сотрудник, 5 инженеров.

В настоящее время в ЛВС работает компьютерный класс, где студенты и аспиранты в режиме свободного доступа выполняют свои работы. Там же проводятся статистические практикумы для студентов кафедры теории вероятностей. С 1993 года, после создания на механико-математическом факультете по инициативе академика Б.В.Гнеденко математико-экономической специализации (экономического потока), эта лаборатория стала базовой для студентов данной специализации.

В 2014 году под руководством Е.В.Чепурина по договору с ЦБ РФ была выполнена НИР «Расчет тарифов по обязательному страхованию гражданской ответственности владельцев транспортных средств (ОСАГО) в связи с увеличением страховой суммы за причинение вреда жизни или здоровью потерпевшего». Во исполнение договора на основе статистического анализа данных РСА (Российского союза автостраховщиков), ГИБДД и Минздрава об ущербах жизни или здоровья потерпевших был подготовлен отчет, где приведены прогнозные характеристики величин.

Лаборатория больших случайных систем (ЛБСС) основана в 1991 году. Инициатором ее создания и заведующим лабораторией с момента основания является профессор В.А.Мальшев.

В 2015 году в лаборатории работает 4 сотрудника: главный научный сотрудник (зав. лаб.), 1 старший научный сотрудник, 2 научных сотрудника.

Основные направления научной деятельности лаборатории — математическая статистическая физика и математика больших социальных сетей (связи, транспорта, массового обслуживания, экономики, финансов). С точки зрения теории вероятностей это бесконечномерные динамические системы (классические и квантовые), гиббсовские случайные поля и процессы с локальным взаимодействием.

С 1995 года на базе лаборатории, под руководством В.А.Мальшева, выходит научный журнал «Markov Processes and Related Fields». Журнал выходит на английском языке, имеет международную редколлегию, на него подписаны многие зарубежные библиотеки. Вышло уже 20 томов, журнал признан самым международным из российских научных журналов (наибольший процент зарубежных авторов). Выпуск 3 тома 20 был посвящен академику Б.В.Гнеденко.

Профессор В.А.Мальшев (с сотрудниками) участвовал в создании учебного пособия «Введение в математическое моделирование транспортных потоков», входил в экспертную группу по транспорту «Стратегии 2020» (Концепции долгосрочного социально-экономического развития РФ до 2020 года), делал доклады на транспортных семинарах и конференциях в Институте ГенПлана Москвы, ИПМ им. М.В. Келдыша и др. Важной задачей на сегодня остается борьба с пробками. Примером нового типа задач является моделирование потока машин без водителей (транспорт будущего).

С более подробной и текущей информацией о кафедре теории вероятностей можно ознакомиться на ее сайте (<http://www.math.msu.su/department/probab>), а с публикациями и другой деятельностью сотрудников — в системе ИСТИНА (Наука-МГУ) (<http://istina.imec.msu.ru/organizations/department/275918/workers/>).

В настоящем выпуске представлен ряд статей сотрудников, аспирантов и студентов кафедры и ее лабораторий.

Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании ¹

Антоненко Е.А.², Яровая Е.Б.³

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание с конечной дисперсией скачков по многомерной решетке с непрерывным временем и конечным числом источников генерации частиц. Изучена структура положительного дискретного спектра оператора, описывающего эволюцию средних численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании с конечной дисперсией скачков.

1 Введение

Пусть \mathbb{Z}^d обозначает множество векторов $\{n_1, n_2, \dots, n_d\}$ с целочисленными координатами n_i , называемое в дальнейшем d -мерной целочисленной решеткой. Ветвящимся случайным блужданиям (ВСБ) по \mathbb{Z}^d с непрерывным временем в последние десятилетия посвящено достаточно большое количество публикаций, см., например, [15, 14, 16, 2, 10, 12].

До последнего времени основное внимание при исследовании такого рода моделей уделялось случаю ВСБ с одним источником ветвления (т.е. источником размножения и гибели частиц). Для анализа этого случая предложены различные подходы, среди которых плодотворным оказался подход, основанный на представлении эволюционных уравнений для моментов численностей частиц как уравнений в банаховых пространствах [15, 14, 10, 12]. Случай N источников ветвления, расположенных в узлах \mathbb{Z}^d , был, по-видимому, впервые изучен в [13].

При таком подходе исследование ВСБ разбивается на три этапа [13]. На первом из них эволюционные уравнения для переходных вероятностей и моментов численностей частиц представляются как линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. На втором этапе в силу линейности полученных уравнений исследование асимптотического поведения решений при $t \rightarrow \infty$ сводится к изучению спектра операторов в правых частях соответствующих уравнений. Наконец, на третьем этапе анализ структуры спектра эволюционных операторов позволяет выявить фазовые переходы в асимптотическом

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00653).

²Антоненко Екатерина Александровна, eka.antonenko@gmail.com, аспирант кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

³Яровая Елена Борисовна, yarova@mech.math.msu.su, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

поведении моментов численностей частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке.

В работе рассматривается модель ВСБ по \mathbb{Z}^d с непрерывным временем и конечным числом N источников ветвления. Предполагается, что частицы в системе эволюционируют независимо друг от друга и от всей предыстории. Каждая из частиц блуждает по решетке до тех пор, пока не попадет в один из источников ветвления. Будем предполагать, что в источниках ветвления гибель и размножение частиц происходит без нарушения симметричности случайного блуждания. Напомним, что для такой модели ВСБ в статье [13] было введено обозначение $BRW/N/0/0$.

В [1, 10] исследовалась модель $BRW/1/0/0$, для которой были установлены условия экспоненциального роста численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке. Такой характер роста численностей частиц в этих процессах определялся наличием изолированного положительного собственного значения в спектре оператора, описывающего эволюцию средних численностей частиц. Отметим, что для $BRW/1/0/0$ соответствующий эволюционный оператор может быть представлен как сумма ограниченного самосопряженного и вполне непрерывного операторов (одноточечное возмущение). Необходимые и достаточные условия, при которых подобного рода возмущения приводят к появлению изолированного положительного собственного значения в структуре спектра эволюционного оператора для $BRW/1/0/0$, не меняя при этом его существенного спектра, указаны, например, в [10].

В моделях $BRW/N/0/0$ с источниками ветвления, расположенными в конечном числе точек решетки x_1, x_2, \dots, x_N , возникают более сложные (многоточечные) возмущения генератора симметричного случайного блуждания \mathcal{A} , имеющие в случае одинаковой интенсивности источников вид

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{Z}^d, \quad (1)$$

в которых $\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, — это симметрический оператор, $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, а $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ обозначает вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке x и нулевое значение в остальных точках. В [13] показано, что возмущение $\beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}$ линейного оператора \mathcal{A} может привести к появлению положительных собственных значений оператора \mathcal{H}_β , причем кратность каждого из них не будет превышать N . В настоящей заметке будет построен пример, показывающий, что максимально возможная кратность положительных собственных значений оператора \mathcal{H}_β равна $N - 1$.

В [17] показывается, каким образом операторы вида (1) возникают в моделях ВСБ, и демонстрируется, что структура их спектра определяет асимптотическое поведение численностей частиц. При исследовании эволюционных уравнений для средних численностей частиц в [17] использовалась техника дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В [13] показано, что \mathcal{H}_β является линейным ограниченным оператором в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$. При этом все точки его спектра, не принадлежащие кругу $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - a(0)| \leq |a(0)|\}$, где $a(0) = \delta_0^T \mathcal{A} \delta_0$, могут быть только собственными значениями конечной кратности. Это утверждение позволило предложить общий метод получения конечного набора уравнений, определяющих условия существования в спектре оператора \mathcal{H}_β изолированных положительных собственных значений, не принадлежащих C . Соответствующие условия для ВСБ с двумя источниками ветвления выписаны в явном виде в [13].

Структура работы следующая. В разделе 2 напомним формальное описание модели $BRW/N/0/0$. В разделе 3 сформулированы основные результаты и построен пример

о влиянии “симметрии” расположения источников на \mathbb{Z}^d на появление совпадающих собственных значений в спектре оператора (1). Раздел 4 содержит доказательства сформулированных ранее теорем. В разделе 5 приведены некоторые примеры “точно решаемых” моделей, для которых значения параметра β , соответствующие появлению собственных значений $\lambda(\beta)$ в дискретном положительном спектре оператора \mathcal{H}_β при $d \geq 3$, могут быть вычислены в явном виде.

2 ВСБ с несколькими источниками

Эволюция системы частиц в ВСБ по \mathbb{Z}^d описывается числом частиц $\mu_t(y)$ в момент времени t в каждом из узлов $y \in \mathbb{Z}^d$ в предположении, что при $t = 0$ система состоит из одной частицы, находящейся в некотором узле $x \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $\mu_0(y) = \delta_x(y)$. Таким образом, общее число частиц на \mathbb{Z}^d удовлетворяет равенству $\mu_t = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu_t(y)$. Через $p(t, x, y)$ будет обозначаться переходная вероятность случайного блуждания в рассматриваемом ВСБ. Пусть \mathbb{E}_x обозначает математическое ожидание численностей частиц при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, тогда моменты численностей частиц определяются как $m_n(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t^n(y)$ и $m_n(t, x) := \mathbb{E}_x \mu_t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Случайное блуждание определяется матрицей $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ переходных интенсивностей, в которой $a(x, y) = a(x - y)$ при всех x и y . Таким образом, переходные интенсивности пространственно однородны, а матрица A симметрична. Закон блуждания удобно описывать в терминах функции $a(z)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, для которой $a(0) < 0$, $a(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $a(z) \equiv a(-z)$. Будем предполагать, что $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) = 0$ и

$$\sum_z |z|^2 a(z) < \infty, \quad (2)$$

где $|z|$ — евклидова норма вектора z . Пусть, кроме того, матрица A неприводима, т.е. для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$.

Обозначим через $p(t, x, y)$ переходную вероятность случайного блуждания; естественно, функция $p(t, x, y)$ определяется переходными интенсивностями $a(x, y)$ (см., например, [4, 10]). Тогда функцию Грина оператора \mathcal{A} можно представить в виде преобразования Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$:

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt, \quad \lambda \geq 0.$$

Анализ ВСБ существенно зависит от того, является ли величина $G_0 = G_0(0, 0)$ конечной или бесконечной. При выполнении условия (2) (конечности дисперсии скачков в ВСБ) $G_0 = \infty$ при $d = 1, 2$ и $G_0 < \infty$ при $d \geq 3$ (см., например, [10]).

Для описания ветвления в источниках будет использоваться функция b_n , $n \geq 0$, где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 \leq 0$ и $\sum_n b_n = 0$. Ветвление осуществляется в конечном числе источников x_1, \dots, x_N и задается инфинитезимальной производящей функцией $f(u) = \sum_{n=0}^\infty b_n u^n$, такой, что $\beta_r = f^{(r)}(1) < \infty$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Величина $\beta_1 = f'(1)$, характеризующая интенсивность источника, в дальнейшем обозначается через β . Отметим, что время пребывания частицы в каждом из источников экспоненциально распределено с параметром $-(a(0) + b_1)$ [11].

Анализ модели $BRW/1/0/0$ в [15, 1, 10, 12] показал, что поведение средних численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке, определяется структурой спектра линейного оператора (1) при $N = 1$. Здесь \mathcal{A} — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, определяющий случайное блуждание, а $\beta\Delta_{x_1}$ — слагаемое, задающее механизм ветвления в источнике x_1 . Отметим, что оператор \mathcal{A} порождается матрицей переходных интенсивностей A . В [13] данная модель обобщается, в частности, и на случай $BRW/N/0/0$.

Трактуя переходную вероятность $p(t, \cdot, y)$ как функцию $p(t)$ со значениями в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, зависящую от времени t и параметра y , запишем, следуя [10, 13], эволюционное уравнение для $p(t)$ в виде дифференциального уравнения в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{A}p, \quad p(0) = \delta_y,$$

где оператор \mathcal{A} действует по формуле

$$(\mathcal{A}u)(z) := \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a(z - z')u(z').$$

Аналогично, для математического ожидания $m_1(t, \cdot, y)$, трактуемого как функция $m_1(t)$ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, может быть получено дифференциальное уравнение в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\frac{dm_1}{dt} = \mathcal{H}_\beta m_1, \quad m_1(0) = \delta_y. \quad (3)$$

Формально это же уравнение, но в пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$, справедливо и для $m_1(t) = m_1(t, \cdot)$ с начальным условием $m_1(0) = 1$.

Как следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах (см., например, [5]), вопрос о поведении при $t \rightarrow \infty$ решений уравнения (3) сводится к анализу спектра линейных операторов в правых частях соответствующих уравнений. В необходимом для целей настоящей работы объеме спектральный анализ оператора \mathcal{H}_β вида (1) выполнен в [13].

3 Конфигурация источников ветвления

Обозначим через β_c такое значение интенсивности источника, что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора \mathcal{H}_β содержатся положительные собственные значения.

Перечислим основные результаты, которые будут доказаны ниже:

Теорема 1. *Если $d = 1$ или $d = 2$, то $\beta_c = 0$; если $d \geq 3$, то $\beta_c = (G_0)^{-1}$ при $N = 1$ и $0 < \beta_c < (G_0)^{-1}$ при $N \geq 2$.*

Определение 1. Если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\beta \in (\beta_c, \beta_c + \varepsilon_0)$ оператор \mathcal{H}_β имеет одно (с учетом кратности) положительное собственное значение $\lambda(\beta)$, удовлетворяющее условию $\lambda(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \downarrow \beta_c$, то надкритическое ВСБ назовем *слабо надкритическим* при β близких к β_c .

В связи с данным определением возникает вопрос о том, *каждое ли надкритическое ВСБ является слабо надкритическим*. Следующая теорема утвердительно отвечает на этот вопрос.

Теорема 2. Каждое надкритическое ВСБ является слабо надкритическим при $\beta \downarrow \beta_c$.

Эта теорема вытекает из следующего, более сильного утверждения.

Теорема 3. Пусть $N \geq 2$. При $\beta > \beta_c$ оператор \mathcal{H}_β может иметь не более N положительных собственных значений конечной кратности, при этом

$$\lambda_0(\beta) > \lambda_1(\beta) \geq \dots \geq \lambda_{N-1}(\beta) > 0,$$

где старшее собственное значение $\lambda_0(\beta)$ имеет единичную кратность. Кроме того, может быть указано такое значение β_{c_1} , что при $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$ имеется единственное собственное значение $\lambda_0(\beta)$.

Для нахождения собственных значений $\lambda_0(\beta), \lambda_1(\beta), \dots, \lambda_{N-1}(\beta)$ можно воспользоваться следующей теоремой, которая в других обозначениях фактически установлена в [13, теорема 6]:

Теорема 4. Собственное значение λ принадлежит дискретному спектру оператора \mathcal{H}_β в том и только том случае, когда система линейных уравнений

$$V_i - \beta \sum_{j=1}^N G_\lambda(x_i - x_j) V_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

относительно переменных $\{V_i\}_{i=1}^N$ имеет нетривиальное решение.

Ситуация, когда некоторые из собственных значений

$$\lambda_1(\beta), \dots, \lambda_{N-1}(\beta)$$

оператора \mathcal{H}_β могут совпадать друг с другом (т.е. они могут иметь не единичную кратность), действительно может иметь место даже в случае произвольного конечного числа источников (одинаковой интенсивности). Как показывает следующий пример такого рода, ситуация может возникнуть при наличии определенной “симметрии” в расположении источников x_1, x_2, \dots, x_N .

В этом и последующих в данной работе примерах будем считать, что функция переходных интенсивностей является симметрической, то есть она не меняется при любой перестановке ее аргументов. Установим утверждение, которое будет использоваться в дальнейшем для “точно решаемых” моделей, в которых критические значения $\beta_{c_i}, i \geq 2$, и уравнения для нахождения λ_i из теоремы 3 могут быть найдены в явном виде.

Напомним, что функция нескольких переменных называется симметрической, если ее значения не меняются при перестановке переменных. В частности, функцию векторной переменной z будем называть симметрической, если ее значения не меняются при любой перестановке координат вектора z .

Теорема 5. Если функция переходных интенсивностей $a(z)$ является симметрической, то и функция $G_\lambda(z)$ является симметрической.

Пример 1. Пусть при $N \geq 2$ источники x_1, \dots, x_N образуют вершины правильного симплекса (т.е. длины ребер которого равны между собой), например,

$$\begin{aligned} x_1 &= \{1, 0, \dots, 0, \dots, 0\}, \\ x_2 &= \{0, 1, \dots, 0, \dots, 0\}, \\ &\dots \\ x_i &= \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}, \\ &\dots \\ x_N &= \{0, 0, \dots, 0, \dots, 1\}. \end{aligned}$$

Существование при некотором β нетривиального решения у линейного уравнения (4) равносильно равенству нулю детерминанта:

$$\det \begin{bmatrix} G_\lambda(x_1, x_1) - \frac{1}{\beta} & \cdots & G_\lambda(x_1, x_N) \\ G_\lambda(x_2, x_1) & \cdots & G_\lambda(x_2, x_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_\lambda(x_N, x_1) & \cdots & G_\lambda(x_N, x_N) - \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что здесь в силу симметричности и однородности случайного блуждания

$$G_\lambda(x_i, x_j) = G_\lambda(0, x_i - x_j) = G_\lambda(0, x_j - x_i) = G_\lambda(x_j - x_i).$$

Из определения функции $G_\lambda(u, v) \equiv G_\lambda(u - v)$ следует, что все величины $G_\lambda(x_j - x_i)$ при $i \neq j$ совпадают между собой и, следовательно, совпадают с $G_\lambda(x_1 - x_2) = G_\lambda(z_*)$, где для сокращения принято обозначение $z_* = x_1 - x_2$, т.е.

$$G_\lambda(x_j - x_i) \equiv G_\lambda(x_1 - x_2) = G_\lambda(z_*), \quad \forall i \neq j. \quad (6)$$

Для величин же $G_\lambda(x_i, x_i)$ справедливы равенства

$$G_\lambda(x_i, x_i) \equiv G_\lambda(x_i - x_i) = G_\lambda(0) = G_\lambda, \quad \forall i.$$

Таким образом, равенство (5) может быть записано в виде:

$$\det \begin{bmatrix} G_\lambda - \frac{1}{\beta} & \cdots & G_\lambda(z_*) \\ G_\lambda(z_*) & \cdots & G_\lambda(z_*) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_\lambda(z_*) & \cdots & G_\lambda - \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} = 0,$$

С помощью стандартных линейных преобразований преобразуем детерминант к виду:

$$\left(G_\lambda - G_\lambda(z_*) - \frac{1}{\beta}\right)^{N-1} \det \begin{bmatrix} G_\lambda - \frac{1}{\beta} + (N-1)G_\lambda(z_*) & \cdots & G_\lambda(z_*) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

что равносильно уравнению

$$\left(G_\lambda + (N-1)G_\lambda(z_*) - \frac{1}{\beta}\right) \left(G_\lambda - G_\lambda(z_*) - \frac{1}{\beta}\right)^{N-1} = 0.$$

Отсюда следует, что значения β_c и β_{c_1} в этом случае вычисляются в явном виде:

$$\beta_c = (G_0 + (N-1)G_0(z_*))^{-1}, \quad \beta_{c_1} = (G_0 - G_0(z_*))^{-1}. \quad (7)$$

Замечание. В условиях примера 1 величина β_{c_1} согласно (6) и (7), зависит от нормы $|z_*|$ вектора z_* — расстояния между источниками, и не зависит от количества источников N , т.е. $\beta_{c_1} = \beta_c(|z_*|) > 0$. В то же время величина β_c зависит не только от расстояния между источниками, но и от N , т.е. $\beta_c = \beta_c(|z_*|, N)$, причем таким образом, что $\beta_c(|z_*|, N) \rightarrow 0$, когда $N \rightarrow \infty$ при фиксированном z_* . Более того, $\beta_c(|z_*|, N) \equiv 0$ при $d = 1, 2$. \square

4 Доказательства теорем

Для доказательства теорем 1 и 2 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Число $\lambda > 0$ является собственным значением оператора \mathcal{H}_β тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств $\mu_i(\lambda)\beta = 1$, $i = 1, \dots, N$, где $\mu_i(\lambda)$ — собственные значения матрицы

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} G_\lambda(x_1, x_1) & \dots & G_\lambda(x_1, x_N) \\ G_\lambda(x_2, x_1) & \dots & G_\lambda(x_2, x_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_\lambda(x_N, x_1) & \dots & G_\lambda(x_N, x_N) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Доказательство леммы 1. Число $\lambda > 0$ является собственным значением оператора $\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}$ тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $h \neq 0$ выполняется равенство:

$$\mathcal{A}h + \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} h = \lambda h.$$

Обозначим через $R_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ резольвенту оператора \mathcal{A} и применим R_λ к обеим частям последнего уравнения:

$$h + \beta \sum_{i=1}^N R_\lambda \Delta_{x_i} h = 0.$$

Так как $\Delta_x h = \delta_x(\delta_x, h)$, то

$$h + \beta \sum_{i=1}^N (\delta_{x_i}, h) R_\lambda \delta_{x_i} = 0.$$

Умножим последнее уравнение скалярно слева на δ_{x_k} :

$$(\delta_{x_k}, h) + \sum_{i=1}^n \beta (\delta_{x_i}, h) (\delta_{x_k}, R_\lambda \delta_{x_i}) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

откуда, обозначив $U_k = (\delta_{x_k}, h)$, получаем:

$$U_k + \sum_{i=1}^n \beta U_i (\delta_{x_k}, R_\lambda \delta_{x_i}) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ненулевое решение h тогда и только тогда, когда детерминант матрицы полученной линейной системы уравнений равен нулю.

Заметим теперь, что

$$(\delta_y, R_\lambda \delta_x) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta,$$

где $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, z)}$ при $\theta \in [-\pi, \pi]^d$ — это преобразование Фурье функции переходных интенсивностей $a(z)$. Здесь правая часть равенства представима в терминах функции Грина:

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta,$$

и значит,

$$(\delta_y, R_\lambda \delta_x) = -G_\lambda(x, y).$$

Отсюда следует, что условие равенства нулю детерминанта линейной системы (9) можно переписать в следующем виде:

$$\det \begin{bmatrix} \beta G_\lambda(x_1, x_1) - 1 & \dots & \beta G_\lambda(x_1, x_N) \\ \beta G_\lambda(x_2, x_1) & \dots & \beta G_\lambda(x_2, x_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta G_\lambda(x_N, x_1) & \dots & \beta G_\lambda(x_N, x_N) - 1 \end{bmatrix} = 0$$

или, что эквивалентно при $\beta \neq 0$,

$$\det \left(G(\lambda) - \frac{1}{\beta} I \right) = 0. \quad (10)$$

Вспоминая теперь, что через $\mu_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, N$, обозначены собственные значения матрицы $G(\lambda)$, получаем, что (10) выполняется для некоторых β и λ в том и только том случае, когда справедливо одно из следующих равенств:

$$\mu_i(\lambda) \beta = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. В силу интегрального представления функции Грина [10] имеем

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta. \quad (11)$$

Для функции $\phi(\theta)$ справедливы оценки $c \|\theta\|^2 \leq |\phi(\theta)| \leq C \|\theta\|^2$ с некоторыми ненулевыми вещественными c и C [10]. Следовательно, сходимость интеграла в интегральном представлении функции Грина $G_\lambda(x, y)$ при $\lambda \rightarrow 0$ равносильна [10] сходимости интеграла $\int \frac{r^{d-1}}{r^2} dr$ в окрестности 0.

Данный интеграл сходится при $d \geq 3$ и расходится при $d = 1$ и $d = 2$. Далее, если $G_\lambda(x, y) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, то $\|G(\lambda)\| \rightarrow \infty$, и тогда старшее собственное значение матрицы $G(\lambda)$ стремится к бесконечности: $\mu_0(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, в этом случае при любом $\beta > 0$ уравнение $\mu_0(\lambda) \beta = 1$ имеет решение (по λ), и по определению β_c получаем, что $\beta_c = 0$.

Пусть теперь $G_0(0, 0) < \infty$, тогда и $G_0(x, y) < \infty$ при всех x и y . Значит, в этом случае $\|G(0)\| < \infty$, и более того, $G(\lambda) \rightarrow G(0)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда найдется такое $\mu_* < \infty$, что $\mu_0(\lambda) \leq \mu_* < \infty$ при всех λ . В этом случае уравнение $\mu_0(\lambda) \beta = 1$, как легко видеть, не имеет решений (по λ) при $\beta \rightarrow 0$. По лемме 1 в этом случае оператор \mathcal{H}_β при малых β не имеет собственных значений, т.е. $\beta_c > 0$.

Докажем теперь верхнюю оценку для β_c при $d \geq 3$. Пусть β — произвольное значение параметра, при котором оператор \mathcal{H}_β имеет некоторое положительное собственное значение λ . Тогда по лемме 1

$$\mu_0(\lambda) \beta = 1,$$

и поэтому

$$\beta = \frac{1}{\mu_0(\lambda)}. \quad (12)$$

По теореме Перрона-Фробениуса [3] старшему собственному положительному значению $\mu_0(\lambda)$ матрицы $G(\lambda)$ соответствует собственный вектор $x(\lambda)$ со всеми положительными координатами. Представим матрицу $G(\lambda)$ в виде

$$G(\lambda) = G_\lambda(0, 0)I + B(\lambda),$$

где $B(\lambda) = G(\lambda) - G_\lambda(0, 0)I$, и заметим, что все элементы матрицы $B(\lambda)$ неотрицательны, причем ее внедиагональные элементы положительны при $N \geq 2$. В этом случае по определению собственного вектора $x(\lambda)$ имеют место равенства:

$$0 = G(\lambda)x(\lambda) - \mu_0(\lambda)x(\lambda) = (G_\lambda(0, 0) - \mu_0(\lambda))x(\lambda) + B(\lambda)x(\lambda).$$

При $\lambda = 0$ отсюда получаем

$$0 = G(0)x(0) - \mu_0(0)x(0) = (G_0(0, 0) - \mu_0(0))x(0) + B(0)x(0).$$

Здесь координаты вектора $x(0)$ положительны, а тогда положительны и координаты вектора $B(0)x(0)$. Поэтому последнее равенство может иметь место только в том случае, когда

$$G_0(0, 0) - \mu_0(0) < 0.$$

Значит, в силу (12)

$$\beta_c = \frac{1}{\mu_0(0)} < \frac{1}{G_0(0, 0)} = \frac{1}{G_0}.$$

При $N = 1$ критическое значение β_c находится из уравнения $\beta_c G_0 - 1 = 0$ и равно $\beta_c = \frac{1}{G_0}$. \square

Доказательство теоремы 3. По лемме 1 собственные значения оператора \mathcal{H}_β удовлетворяют уравнениям

$$\mu_i(\lambda)\beta = 1, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Здесь числа $\mu_i(\lambda)$ являются собственными значениями положительной и симметричной матрицы $G(\lambda)$, причем, как показано в [8], эта матрица является матрицей Грама в некотором подходящем скалярном произведении и, следовательно, положительно определена. В этом случае все собственные значения $\mu_i(\lambda)$ вещественны и неотрицательны (и могут быть упорядочены по возрастанию):

$$0 \leq \mu_{N-1}(\lambda) \leq \dots \leq \mu_1(\lambda) \leq \mu_0(\lambda). \quad (13)$$

В силу (11) элементы матрицы $G(\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ и, значит, $\mu_i(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого $i = 0, 1, \dots, N - 1$. При этом по теореме Реллиха [6, гл. 2, т. 6.8] все функции $\mu_i(\lambda)$ кусочно-гладкие при $\lambda \geq 0$.

Снова воспользовавшись представлением (11), замечаем, что элементы матрицы $G(\lambda)$ строго положительны при $\lambda > 0$, откуда по теореме Перрона-Фробениуса [3] следует, что максимальное собственное значение $\mu_0(\lambda)$ матрицы $G(\lambda)$ простое и строго большее остальных собственных значений, т.е. последнее из неравенств (13) строгое:

$$0 \leq \mu_{N-1}(\lambda) \leq \dots \leq \mu_1(\lambda) < \mu_0(\lambda). \quad (14)$$

Из представлений (11) видно, что матрица $G(\lambda)$ непрерывна при всех значениях $\lambda > 0$. Поведение же этой матрицы при $\lambda \rightarrow 0$ может быть различным, и от этого поведения зависит дальнейшее доказательство теоремы:

1. При $\lambda \rightarrow 0$ матрица $G(\lambda)$ имеет некоторый конечный предел — матрицу $G(0)$ со строго положительными элементами. В этом случае поведение собственных значений $\mu_i(\lambda)$ будет таким, как изображено на рис. 1, причем зазор между величинами $\mu_0(0) = \frac{1}{\beta_c}$ и $\mu_1(0) = \frac{1}{\beta_{c_1}}$ может быть явно оценен, например, с помощью теоремы Хопфа [9, стр. 592]. Эта ситуация имеет место при $d \geq 3$.

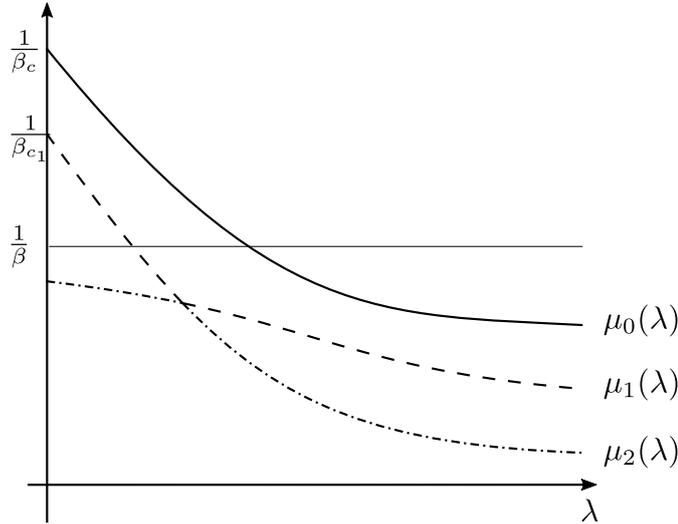


Рис. 1: Графики функций $\mu_i(\lambda)$ в случае, когда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_0(\lambda) < \infty$.

2. При $\lambda \rightarrow 0$ хотя бы один элемент матрицы $G(\lambda)$ имеет бесконечный предел. Это возможно лишь при $d = 1$ или $d = 2$. В этом случае $\|G(\lambda)\| \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, а значит, $\mu_0(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ — это возможно только при $\beta_c = 0$. Потенциально возможна ситуация, что в этом случае $\mu_1(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, т.е. $\beta_{c_1} = 0$. Однако, как следует из теоремы 2.1.1 из [10], на самом деле такая ситуация невозможна, и всегда $\mu_1(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ имеет конечный предел, т.е. $\beta_{c_1} > 0$. Тогда будет иметь место ситуация, изображенная на рис. 2.

Еще раз воспользовавшись представлением (11), замечаем, что все элементы матрицы $G(\lambda)$ монотонно убывают с ростом λ , откуда (совместно с положительностью матрицы $G(\lambda)$) следует [7], что максимальное собственное значение $\mu_0(\lambda)$ матрицы $G(\lambda)$ также является строго монотонно убывающей функцией.

Как уже отмечалось, по лемме 1 собственные значения λ_i оператора \mathcal{H}_β являются решениями уравнений (см. рис. 1)

$$\mu_i(\lambda_i) = \frac{1}{\beta}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (15)$$

А так как каждая из функций $\mu_i(\lambda)$ строго монотонно убывает при $\lambda \geq 0$, то общее число решений $\lambda_i(\beta)$ этих уравнение не превосходит N .

Из неравенств (14) следует, что если при некотором фиксированном β оператор \mathcal{H}_β имеет положительные собственные значения, то наименьшее из них — $\lambda_0 = \lambda_0(\beta)$, являющееся решением уравнения

$$\mu_0(\lambda_0) = \frac{1}{\beta}, \quad (16)$$

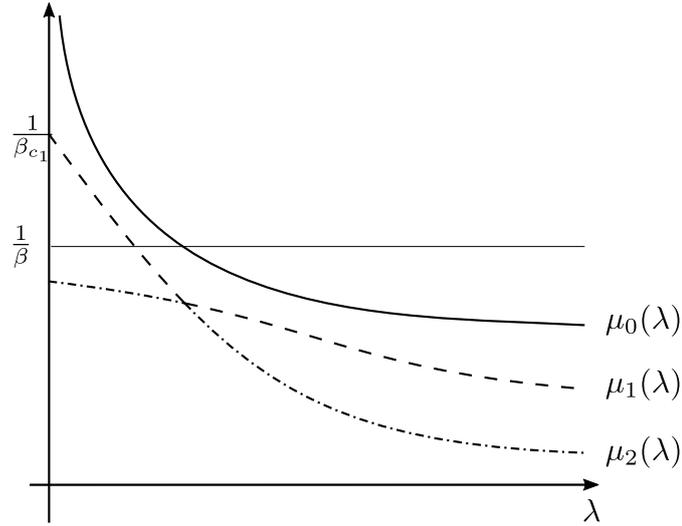


Рис. 2: Графики функций $\mu_i(\lambda)$ в случае, когда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_0(\lambda) = \infty$, но $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_1(\lambda) < \infty$.

— простое и строго большее остальных. При этом минимальным значением решения λ_0 уравнения (16) является $\lambda_0 = 0$. Соответствующее ему значение параметра β является критическим β_c . Так как функция $\mu_0(\lambda)$ строго убывает, то величина собственного значения $\lambda_0 = \lambda_0(\beta)$ возрастает с увеличением параметра β . Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 5. Напомним, что функция Грина $G_\lambda(z)$ может быть представлена [10] в виде

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, z)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta,$$

где $\phi(\theta)$ — преобразование Фурье функции переходных интенсивностей $a(z)$, которое определяется как $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, z)}$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что $G_\lambda(z) = G_\lambda(\mathbf{R}z)$ для любой матрицы перестановок \mathbf{R} (т.е. матрицы, в каждой строке и столбце которой имеется единственный ненулевой элемент, равный единице). Тогда

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{R}\theta) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\mathbf{R}\theta, z)} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, \mathbf{R}^* z)} = \\ &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a((\mathbf{R}^*)^{-1} z') e^{i(\theta, z')} = \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a(z') e^{i(\theta, z')} = \phi(\theta), \end{aligned}$$

где равенство $a((\mathbf{R}^*)^{-1} z') = a(z')$ при каждом $z' \in \mathbb{Z}^d$ выполняется за счет того, что значения функции $a(z)$ по условию не меняются при перестановке координат вектора z . Таким образом, функция $\phi(\theta)$ также является симметрической. Далее,

$$\begin{aligned} G_\lambda(\mathbf{R}z) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, \mathbf{R}z)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\mathbf{R}^* \theta, z)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, z)}}{\lambda - \phi((\mathbf{R}^*)^{-1} \theta)} d\theta = G_\lambda(z) \end{aligned}$$

для любой матрицы перестановок \mathbf{R} , где снова равенство $\phi(\theta) = \phi((\mathbf{R}^*)^{-1} \theta)$ при каждом $\theta \in [-\pi, \pi]^d$ выполняются за счет того, что, как уже доказано, значения функции $\phi(\theta)$ не

меняются при перестановке координат вектора θ . Таким образом, и функция $G_\lambda(z)$ тоже является симметрической. \square

5 Примеры

Приведем некоторые примеры для решеток $d \geq 3$, в которых за счет симметрии расположения источников критические значения β_c и β_{c_i} , $i = 1, \dots, N - 1$, удается вычислить в явном виде. В частности, рассмотрим случаи, когда источники ветвления находятся в вершинах z_1, z_2, z_3 и z_4 некоторых квадратов.

Пример 2. Рассмотрим квадрат, лежащий в плоскости каких-нибудь двух координатных осей \mathbb{Z}^d так, что его стороны параллельны этим осям. В этом случае вектора $z_2 - z_1, z_3 - z_2,$

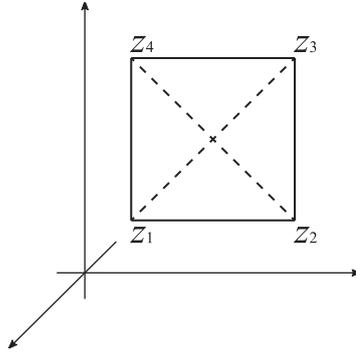


Рис. 3: Расположение источников ветвления в вершинах квадрата.

$z_4 - z_3$ и $z_1 - z_4$ получаются друг из друга перестановкой координат. В силу теоремы 5 можем считать, что $G_\lambda(z_2 - z_1) = G_\lambda(z_3 - z_2) = G_\lambda(z_4 - z_3) = G_\lambda(z_1 - z_4)$.

Для сокращения обозначений положим $a = G_\lambda - \frac{1}{\beta}$, $b = G_\lambda(z_2 - z_1) = G_\lambda(z_3 - z_2) = G_\lambda(z_4 - z_3) = G_\lambda(z_1 - z_4)$, $c = G_\lambda(z_3 - z_1)$ и $d = G_\lambda(z_4 - z_2)$. Соответствующий определитель (10) в рассматриваемом случае примет вид

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & d \\ c & b & a & b \\ b & d & b & a \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда после элементарных преобразований нетрудно получить уравнения

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}\sqrt{16b^2 + c^2 - 2cd + d^2} + c + d &= 0, \\ a - c &= 0, \\ a - d &= 0, \\ a - \frac{1}{2}\sqrt{16b^2 + c^2 - 2cd + d^2} + c + d &= 0, \end{aligned}$$

из которых могут быть определены собственные значения $\lambda_0, \dots, \lambda_3$ оператора \mathcal{H}_β . С учетом введенных выше обозначений при $\lambda = 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \sqrt{16b^2 + c^2 - 2cd + d^2} + c + d = \\ &= \sqrt{16(G_0(z_2 - z_1))^2 + (G_0(z_3 - z_1))^2 - 2G_0(z_3 - z_1) \cdot G_0(z_4 - z_2) + (G_0(z_4 - z_2))^2 +} \\ &\quad + G_0(z_3 - z_1) + G_0(z_4 - z_2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, критическое значение параметра β_c равно

$$\beta_c = (G_0 + \frac{1}{2}\tilde{G})^{-1}.$$

При этом остальные критические значения также могут быть вычислены в явном виде: $(G_0 - G_0(z_3 - z_1))^{-1}$, $(G_0 - G_0(z_4 - z_2))^{-1}$, $(G_0 - \frac{1}{2}\tilde{G})^{-1}$, но их расположение зависит от конкретных значений функции Грина для заданных z_1 , z_2 , z_3 и z_4 .

Пример 3. Пусть теперь источники ветвления расположены в вершинах z_1 , z_2 , z_3 и z_4 квадрата, лежащего в плоскости каких-нибудь двух координатных осей пространства так, что его диагонали параллельны этим осям. В этом случае вектора $z_3 - z_1$ и $z_4 - z_2$

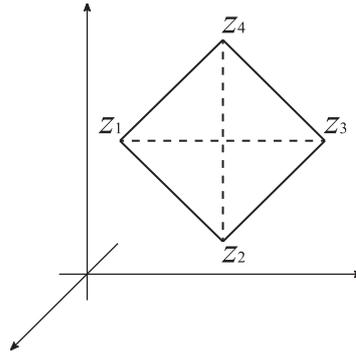


Рис. 4: Расположение источников ветвления в вершинах квадрата.

получаются друг из друга перестановкой координат, а вектора $z_2 - z_1$ и $z_3 - z_4$, $z_3 - z_2$ и $z_4 - z_1$ равны между собой, и поэтому мы можем говорить, что $G_\lambda - \frac{1}{\beta} = a$, $G_\lambda(z_3 - z_1) = G_\lambda(z_4 - z_2) = b$, $G_\lambda(z_2 - z_1) = G_\lambda(z_3 - z_4) = c$, $G_\lambda(z_3 - z_2) = G_\lambda(z_4 - z_1) = d$. Соответствующий определитель (10) примет вид

$$\det \begin{bmatrix} a & c & b & d \\ c & a & d & b \\ b & d & a & c \\ d & b & c & a \end{bmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получаем уравнения

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0, \\ a + b - c - d &= 0, \\ a - b + c - d &= 0, \\ a - b - c + d &= 0, \end{aligned}$$

из которых могут быть определены собственные значения $\lambda_0, \dots, \lambda_3$ оператора \mathcal{H}_β . С учетом введенных выше обозначений при $\lambda = 0$ получаем, что критическое значение параметра β_c равно

$$\beta_c = (G_0 + G_0(z_3 - z_1) + G_0(z_2 - z_1) + G_0(z_4 - z_1))^{-1}.$$

Остальные критические значения имеют вид $(G_0 + G_0(z_3 - z_1) - G_0(z_2 - z_1) - G_0(z_3 - z_2))^{-1}$, $(G_0 - G_0(z_3 - z_1) + G_0(z_2 - z_1) - G_0(z_3 - z_2))^{-1}$, $(G_0 - G_0(z_3 - z_1) - G_0(z_2 - z_1) + G_0(z_3 - z_2))^{-1}$, но их расположение опять зависит от конкретных значений функции Грина для заданных z_1 , z_2 , z_3 и z_4 .

Список литературы

- [1] *Богачев Л.В., Яровая Е.Б.*, Предельная теорема для надкритического ветвящегося случайного блуждания на \mathbf{Z}^d с одним источником // *Успехи математических наук*, 1998, т. 53, № 5, с. 229–230.
- [2] *Ватутин В.А., Топчий В.А.*, Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, № 3, с. 463–484.
- [3] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [4] *Гихман И.И., Скороход А.В.*, Теория случайных процессов. М.: Наука, 1973.
- [5] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
- [6] *Като Т.*, Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [7] *Красносельский М.А.*, Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
- [8] *Молчанов С.А., Яровая Е.Б.*, Структура популяции внутри распространяющегося фронта ветвящегося случайного блуждания с конечным числом центров генерации частиц // *Доклады Академии наук*, 2012, т. 447, № 3, с. 265–268.
- [9] *Хорн Р., Джонсон Ч.*, Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [10] *Яровая Е.Б.*, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. ISBN 978-5-211-05431-8.
- [11] *Яровая Е.Б.*, Об исследовании ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам // *Современные проблемы математики и механики*, 2009, т. 4, № 1, с. 119–136.
- [12] *Яровая Е.Б.*, Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, т. 55, № 4, с. 705–731.
- [13] *Яровая Е.Б.*, Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся блужданий с несколькими источниками ветвления // *Математические заметки*, 2012, т. 92, № 1, с. 124–140.
- [14] *Albeverio S., Bogachev L.V.*, Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations // *Positivity*, 2000, v. 4, № 1, p. 41–100.
- [15] *Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B.*, Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 1998, v. 326, № 8, p. 975–980.
- [16] *Vatutin V.A., Topchiy V.A., Yarovaya E.B.*, Catalytic branching random walks and queueing systems with a random number of independent servers // *Teor. ĭmovir. Mat. Stat.*, 2003, № 69, p. 1–15.
- [17] *Yarovaya E.B.*, Branching Random Walks with Several Sources // *Mathematical Population Studies*, 2013, v. 20, № 1, p. 14–26.

Системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком¹

Афанасьева Л.Г.²

Цель статьи — показать возможности техники теории восстановления при асимптотическом анализе систем обслуживания с регенерирующим входным потоком. Статья носит обзорный характер и начинается с определения регенерирующего потока и описания его свойств. Приводится результат, устанавливающий условия, при которых стабильность процесса, описывающего функционирование системы обслуживания, эквивалентна его стохастической ограниченности. Показано, как на этой основе доказать эргодическую теорему для многоканальной системы обслуживания с неидентичными приборами и регенерирующим потоком. Обсуждаются ещё две проблемы — оценка скорости сходимости к предельному распределению и вероятности больших отклонений для этого распределения. Приводятся примеры.

1 Введение

Мы рассматриваем системы массового обслуживания с регенерирующими входящими потоками. Основное свойство регенерирующего потока $A(t)$ — существование неубывающей последовательности случайных величин $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\theta_0 = 0$), таких, что процесс $\{A(t) - A(\theta_n), t \geq \theta_n\}$ по распределению совпадает с $\{A(t), t \geq 0\}$. По сути это — классическое понятие регенерации случайного процесса (см., например, [12]), требуется только перейти к приращениям процесса после моментов $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Мы рассматриваем регенерирующий поток в силу нескольких причин. Во-первых, класс регенерирующих потоков весьма широк и включает в себя значительную часть потоков, обычно используемых в теории обслуживания в качестве входящих. Например, дважды стохастический пуассоновский поток $A(t)$ (ДСПП) (см., например, [21]), получаемый из стандартного пуассоновского процесса $A^*(t)$ случайной заменой времени $A(t) = A^*(\Lambda(t))$, где $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy$, будет регенерирующим, если случайная интенсивность $\lambda(t)$ является регенерирующим процессом [12]. Это означает, что марковский модулированный поток, марковский поток поступлений [16], полумарковский модулированный поток [15] и многие другие являются регенерирующими. Заметим, что полумарковский поток [15] не будучи ДСПП, также является регенерирующим. Таким образом,

¹Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ № 13-01-00653.

²Афанасьева Лариса Григорьевна, afanas@mech.math.msu.su, профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

системы с регенерирующим потоком обобщают ранее изученные в теории очередей модели. Во-вторых, при достаточно естественных предположениях процессы, описывающие функционирование систем с таким потоком, оказываются регенерирующими в классическом смысле. Это позволяет использовать предельные теоремы из теории восстановления как для выяснения условий стабильности, так и асимптотического анализа в ситуации высокой загрузки, а также для оценки вероятностей больших уклонений. Наконец, регенерирующий поток обладает рядом полезных свойств, дающих возможность распространить разработанные в теории обслуживания подходы на более широкий круг моделей.

Сама идея регенерации весьма популярна и имеются различные обобщения этого понятия. Среди них — обновляющиеся события [9], а также слабая регенерация [26]. В такой ситуации, предполагается, что циклы образуют стационарную последовательность случайных элементов, а длительности циклов — процесс восстановления.

Статья носит обзорный характер. Её цель — показать, что классические результаты теории обслуживания могут быть установлены для моделей с регенерирующим входным потоком на основе его свойств.

2 Регенерирующий поток. Определение, основные свойства. Примеры

Случайный процесс $\{A(t), t \geq 0\}$, ($A(0) = 0$) со значениями в \mathbb{R}^+ , определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и имеющий неубывающие непрерывные слева траектории, назовем случайным потоком. Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена фильтрация $\{\mathcal{F}_{\leq t}, t \geq 0\}$, к которой $A(t)$ адаптирован.

Определение 1. Случайный поток $\{A(t), t \geq 0\}$ назовем регенерирующим, если существует неубывающая последовательность $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ ($\theta_0 = 0$) марковских моментов относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_{\leq t}, t \geq 0\}$, такая, что последовательность

$$\{\varkappa_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\theta_j - \theta_{j-1}, A(\theta_{j-1} + t) - A(\theta_{j-1}), t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1})\}_{j=1}^{\infty}$$

состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов.

Случайные элементы \varkappa_j назовем циклами, а случайные величины θ_j и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots$) соответственно моментами и периодами регенерации. В теории обслуживания $A(t)$ представляет собой либо суммарное время обслуживания требований, либо число требований, поступивших в систему за время $[0, t)$. Здесь мы считаем, что $A(t)$ — число поступивших требований, и обозначаем $\xi_j = A(\theta_j) - A(\theta_{j-1} + 0)$. Далее предполагается, что $a = \mathbf{E}\xi_j < \infty$ и $\mu = \mathbf{E}\tau_j < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{a}{\mu}$ и λ называется интенсивностью потока $A(t)$. Данное определение относится к регенерирующим потокам без сдвига, поскольку все циклы $\{\varkappa_j\}_{j=1}^{\infty}$ одинаково распределены, так что $\theta_0 = 0$ является моментом регенерации. Если предположить, что первый цикл \varkappa_1 не зависит от $\{\varkappa_j\}_{j=2}^{\infty}$, но может иметь другое распределение, то мы получим регенерирующий поток со сдвигом. Формулируемые далее утверждения справедливы и для потоков со сдвигом, если $\mathbf{P}\{\theta_1 < \infty\} = 1$. Более того, они могут быть распространены на модели с различными обобщениями понятия регенерации, но в этой статье мы ограничимся рассмотрением систем с регенерирующим потоком в смысле Определения 1.

Заметим также, что это определение обобщает предложенное в [25] и [24], где предполагалось, что в качестве точек регенерации могут выступать только моменты прихода требований в систему.

Приведем некоторые из свойств регенерирующего потока. Доказательства соответствующих утверждений можно найти в [14].

Нам понадобится следующее предположение.

Условие 1. Наибольший общий делитель чисел $\{i = 1, 2, \dots\}$, таких, что $P\{\xi_1 = i\} > 0$ равен единице.

Это означает апериодичность дискретного процесса восстановления, соответствующего последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$.

Далее ξ и τ означают случайные величины, по распределению совпадающие с ξ_j и τ_j соответственно. Положим $t_n = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq n\}$ и $\zeta_n = t_n - t_{n-1}$ ($t_0 = 0$).

Свойство 1. Если выполнено условие 1, то последовательность $\{\zeta_{n+k}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к стационарной метрически транзитивной последовательности $\{\hat{\zeta}_k\}_{k=1}^\infty$ и $E\hat{\zeta}_k = \lambda^{-1}$.

Доказательство опирается на основную теорему восстановления [14].

Свойство 2. Если для некоторого $\delta > 0$

$$E\tau^{2+\delta} < \infty, E\xi^{2+\delta} < \infty, \quad (1)$$

то процесс $\hat{A}_T(t) = \frac{A(tT) - \lambda tT}{\sigma_A \sqrt{T}}$ C -сходится при $T \rightarrow \infty$ на любом конечном интервале $[0, h]$ к стандартному винеровскому процессу. Здесь

$$\sigma_A^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\mu} + \frac{a^2 \sigma_\tau^2}{\mu^3} - \frac{2a \text{cov}(\xi, \tau)}{\mu^2}, \quad (2)$$

$$\sigma_\xi^2 = D\xi, \sigma_\tau^2 = D\tau.$$

Доказательство исходит из результатов, установленных в ([9] гл. 1 §11) для процессов накопления, построения мажорирующего процесса и ряда оценок (см. [14]).

Следующее свойство почти очевидно, но оказывается весьма полезным при исследовании многих моделей теории массового обслуживания, например, иерархических сетей.

Свойство 3. Предположим, что каждое требование регенерирующего потока $A(t)$ независимо от других остается с вероятностью p ($0 < p < 1$) и удаляется с вероятностью $1 - p$. Полученный, так называемый, просеянный поток $A^p(t)$ будет регенерирующим.

Далее мы сформулируем достаточные условия, при которых выходящий из системы поток будет регенерирующим, если таковым является входящий.

Рассмотрим систему обслуживания с регенерирующим входящим потоком $A(t)$. Задана последовательность $\{\vec{\eta}_n\}_{n=1}^\infty$, состоящая из независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов и не зависящая от входящего потока. При этом $\vec{\eta}_n$ определяет различные характеристики n -го требования — время обслуживания, допустимое время ожидания или пребывания и т.п. Пусть $Z(t)$ — случайный процесс, описывающий состояние системы в момент t , со значениями в \mathbb{R}_+^d . Предположим, что для любых $t \geq 0$, $s \in [0, t)$ выполняется соотношение

$$Z(t) = \Phi(Z(s), t - s, \{A(u) - A(s), s \leq u \leq t\}, \vec{\eta}_{A(s)+1}, \dots, \vec{\eta}_{A(t)}), \quad (3)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция на соответствующем пространстве. При этом $\Phi(\cdot)$ такова, что если $Z(s) = 0$, то процесс остается в нулевом состоянии до момента следующего скачка входного потока. Тогда $Z(t)$ будет регенерирующим процессом и точки его регенерации — те моменты регенерации входного потока $\{\theta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $Z(\theta_{n_k} - 0) = 0$. Более того, вложенный процесс $Z_n = Z(\theta_{n_k} - 0)$ является цепью Маркова.

Как пример рассмотрим систему $R/G/r/\infty$ с регенерирующим входящим потоком, r неидентичными приборами и естественной дисциплиной обслуживания ($FCFS$). Определена последовательность одинаково распределенных независимых векторов $\{\vec{\eta}_k = (\eta_{1k}, \dots, \eta_{rk})\}_{k=1}^{\infty}$, где η_{ik} — время обслуживания k -го требования, если оно попадает на i -ый прибор. В качестве процесса $Z(t)$ возьмем $W(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$. Здесь $W_i(t)$ — остаточное время занятости i -го прибора в момент t обслуживанием требований, поступивших в систему до момента t . Очевидно, что для $W(t)$ выполняется соотношение (3) с некоторой функцией $\Phi(\cdot)$. Для процесса $Q(t)$, представляющего собой число требований в системе в момент t , это не так. Как обычно в теории обслуживания, нужно ввести дополнительные переменные, положив $Z(t) = (Q(t), x_1(t), \dots, x_r(t))$, где $x_i(t)$ — остаточное время обслуживания требования на i -м приборе, если он занят в момент t . Мы считаем $Z(t)$ непрерывным справа, так что $x_i(t) = 0$, если $Q(t) < r$ и i -ый прибор свободен. Разумеется, необходимо ввести некоторое правило, в соответствии с которым поступившее требование занимает тот или другой свободный прибор, если их несколько. Впрочем в дальнейшем это правило не играет роли. Главное условие — если в системе не менее r требований, то все приборы заняты. Сформулируем теперь свойство систем с регенерирующим входящим потоком.

Пусть $Q(t)$ является одной из координат процесса $Z(t)$, тогда процесс

$$Y(t) = X(t) - Q(t)$$

представляет собой число требований, покинувших систему за время $(0, t)$, т.е. выходящий поток. Если это не так, то следует определить $\tilde{Z}(t) = (Q(t), Z(t))$ и потребовать выполнения соотношения (3) для этого процесса с некоторой функцией $\tilde{\Phi}(\cdot)$. В моделях, обычно изучаемых в теории очередей, данная операция выполнима и не вызывает трудностей.

Свойство 4. Предположим, что при любом $Z(0)$ существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{Z(s) \in A\} = \mathbf{P}(A)$$

и $\mathbf{P}(A)$ задает вероятностную меру на борелевских множествах R_+^d , причем $\mathbf{P}(\{0\}) > 0$. Тогда выходящий поток $Y(t)$ является регенерирующим. Его точки регенерации — те моменты $\{\theta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $Z(\theta_{n_k} - 0) = 0$.

Это свойство позволяет использовать предлагаемые далее подходы для исследования систем с регенерирующим входящим потоком при анализе последовательно расположенных систем обслуживания и иерархических сетей [5].

3 Условия эргодичности систем с регенерирующим потоком

Здесь рассматриваем систему обслуживания, состояние которой определяется процессом $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))$, и предполагаем выполненным (3).

Будем говорить, что точка $\vec{z} \in \mathbb{R}_+^d$ достижима из нуля процессом $Z(t)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует ε -окрестность $\Delta_\varepsilon(\vec{z}) = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{z}\| < \varepsilon\}$ и t_ε такие, что

$$\mathbb{P} \{Z(t_\varepsilon) \in \Delta_\varepsilon(\vec{z}) | Z(0) = 0\} > 0.$$

Обозначим $B_0(Z(t))$ множество точек, достижимых из нуля процессом $Z(t)$. Как обычно, случайный процесс $Z(t)$ назовем эргодическим (стабильным), если для любого $Z(0) \in B_0(Z(t))$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{Z(t) \leq \vec{x}\} = F(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}_+^d,$$

являющийся функцией распределения, и $F(\vec{x})$ не зависит от $Z(0)$.

Отыскание условий стабильности системы обслуживания – первая проблема, которую приходится решать при её анализе, поскольку они показывают границы изменения параметров (интенсивности потока, скорости обслуживания и т.д.), при которых в системе не скапливается бесконечной очереди, т.е. она в той или иной мере справляется с обслуживанием. Существуют различные подходы к доказательству эргодических теорем для систем обслуживания (см., например, [10], [16], [28]). Мы будем исходить из свойств регенерирующего потока и предельных теорем теории восстановления.

Начнем с простого примера – системы $R/G/1/\infty$. Пусть $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность н.о.р.с.в., представляющих собой времена обслуживания требований, с конечным $b = E\eta_i$. Обозначим $W(t)$ процесс виртуального времени ожидания, а $Q(t)$ – число требований в системе в момент t . Положим $w_n = W(t_n - 0)$, $q_n = Q(t_n - 0)$. В силу свойства 1 регенерирующего потока и результатов для системы $G/G/1/\infty$ со стационарными последовательностями интервалов между поступлениями требований и времен обслуживания ([23],[10]) существуют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{w_n \leq x\} = \Phi(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{q_n \leq x\} = F(x).$$

Эти пределы являются функциями распределения тогда и только тогда, когда $\rho = \lambda b < 1$. Для процессов $W(t)$ и $Q(t)$ понадобятся дополнительные предположения.

Условие 2. Распределение τ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Условие 3. $\mathbb{P} \{\xi_1 = 0\} + \mathbb{P} \{\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1\} > 0$.

При выполнении этих условий мы можем применить теорему Смита [12] и установить существование $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{W(t) \leq x\}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{Q(t) \leq x\}$. Очевидно, что процессы стабильны, только если $\rho = \lambda b < 1$.

Перейдем к рассмотрению общего процесса $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))$, удовлетворяющего соотношению (3).

Определение 2. Случайный процесс $\{Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t)), t \geq 0\}$ со значениями в \mathbb{R}_+^d стохастически ограничен, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $y < \infty$ такое, что $\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^d Z_i(t) < y \right) > 1 - \varepsilon$ для всех $t \geq 0$.

Определение 3. Случайный процесс $Z(t)$ сильно стохастически неограничен, если $Z_i(t) \xrightarrow{p} \infty$ при $t \rightarrow \infty$, для всех $i = \overline{1, d}$.

Мы хотим показать, что при некоторых дополнительных условиях стабильность процесса $Z(t)$ эквивалентна его стохастической ограниченности. Это позволяет при доказательстве эргодических теорем опираться на анализ более простых процессов, мажорирующих исходный.

Для процесса $Z(t)$, удовлетворяющего соотношению (3), мы рассматриваем вложенную цепь Маркова $Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{nd})$ и суммы координат $z(t) = \sum_{j=1}^d Z_j(t)$, $z_n = \sum_{j=1}^d Z_{nj}$.

Сформулируем дополнительные условия на входящий поток и функцию $\Phi(\cdot)$.

Условие 4. $P\{z_{n+1} = 0 | z_n = 0\} > 0$.

Условие 5. Для любого $x < \infty$ найдутся целое $m(x)$ и $\delta(x) > 0$ такие, что при всех $Z = (Z_1, \dots, Z_d) \in B_0(Z(t))$ и $\sum_{j=1}^d Z_j \leq x$ выполняется неравенство $P\{z_{n+m(x)} = 0 | Z_n = Z\} > \delta(x)$.

Будем говорить, что цепь Маркова Z_n асимптотически стохастически непрерывна, если выполняется следующее условие.

Условие 6. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\vec{x} \in R_+^d$ существуют $\delta > 0$ и целое n_0 , такие что $|P\{Z_n \leq \vec{x} | Z_0 = \vec{y}^*\} - P\{Z_n \leq \vec{x} | Z_0 = \vec{y}\}| < \varepsilon$, если $\|\vec{y}^* - \vec{y}\| < \delta$, $n > n_0$ и $\vec{y}^*, \vec{y} \in B_0(Z_n)$.

Сформулируем основной результат этого пункта, установленный в [5].

Теорема 1. Пусть выполнены условия 4 и 5. Тогда

1. Если для некоторого начального состояния $Z_0 = \vec{y} \in B_0(Z_n)$ процесс Z_n стохастически ограничен, то при условии 6 он эргодичен.
2. Если процесс Z_n стохастически неограничен при любом начальном состоянии $Z_0 = \vec{y} \in B_0(Z_n)$, то он сильно стохастически неограничен.

Данные утверждения верны для процессов $Z(t)$ и $z(t)$ при условии 2.

Опираясь на свойства регенерирующего потока и теорему 1, можно установить условия эргодичности многих систем обслуживания. Среди них система $R/G/r/\infty$ с неидентичными приборами, описанная в п. 2. Каждый прибор характеризуется последовательностью независимых времен обслуживания $\eta^{(i)} = \{\eta_{ik}\}_{k=1}^\infty$ с математическим ожиданием β_i^{-1} , ($i = 1, \dots, r$).

Рассмотрим определенные в п. 2 процессы $W(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$ и $Q(t)$, а также вложенные процессы $W_n = W(\theta_n - 0)$ и $Q_n = Q(\theta_n - 0)$. В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 2. 1. Если для некоторого прибора выполнено условие 3 и

$$\rho = \lambda \left(\sum_{i=1}^r \beta_i \right)^{-1} < 1, \quad (4)$$

то процессы W_n и Q_n эргодичны. Если, кроме того, выполнено условие 2, то процессы $W(t)$ и $Q(t)$ эргодичны.

2. При $\rho > 1$, а также при $\rho = 1$ и дополнительных условиях

$$E\tau_2^{2+\delta} < \infty, E\xi_1^{2+\delta} < \infty, E\eta_{i1}^{2+\delta} < \infty, i = \overline{1, r} \quad (5)$$

для некоторого $\delta > 0$, все эти процессы сильно стохастически неограничены.

Прежде всего заметим, что для одинаковых приборов даже без условий (5) эта теорема в силу свойства 1 регенерирующего потока является простым следствием результатов из книги ([9] гл.IV, §7) для систем со стационарной управляющей последовательностью. Доказательство в [5] исходит из того, что условие 3 обеспечивает выполнение условий 4 и 5, что позволяет использовать теорему 1. Предположив, что Q_n неэргодичен, находим, что этот процесс сильно стохастически неограничен, а это входит в противоречие с условием $\rho < 1$. При $\rho > 1$, используется понятие модифицированной системы [22] и это сводит проблему к анализу одноканальной системы. При $\rho = 1$ и условиях (5) устанавливается существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{Q(t)}{\sigma \sqrt{t}} \leq x \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \beta_i^3$ и $\sigma_i^2 = D\eta_{i1}$.

На основе свойств регенерирующего потока с помощью теоремы 1 можно находить условия эргодичности широкого круга моделей обслуживания. Например, свойство 4 позволяет получить условия стабильности иерархических сетей с регенерирующим входящим потоком [5], а свойство 1 — свести проблему для систем с таким потоком к системам, в которых интервалы между поступлениями образуют стационарную последовательность. Ещё один подход к анализу условий стабильности систем сложной структуры на основе теоремы 1 — мажорирование соответствующих процессов. Он использован в работе [1] для системы с ненадежным прибором, функционирующей в случайной среде, описываемой цепью Маркова, а также в статье [7], где рассмотрена многоканальная система с нетерпеливыми клиентами и регенерирующим входящим потоком. Заметим также, что весьма эффективное понятие полного времени обслуживания, введенное в [20], вместе с теоремой 1 позволяет находить условия стабильности систем с ненадежными приборами, а также систем с приоритетами. Один из примеров есть в статье [5].

4 Оценка скорости сходимости к предельному распределению

Здесь мы оценим скорость сходимости для некоторых моделей обслуживания к предельному режиму. Предполагая, что функционирование системы описывается регенерирующим процессом, мы покажем, что скорость сходимости определяется асимптотическим поведением на бесконечности функции распределения периода регенерации. Оценка скорости сходимости весьма важна как в теоретическом, так и прикладном плане, поскольку найти операционные характеристики моделей или построить алгоритмы для их вычисления за редким исключением удается лишь для предельного режима.

Оценкам границ скорости сходимости для моделей обслуживания посвящена обширная литература. Достаточно долгое время эти границы находились лишь для простейших моделей и имели экспоненциальный характер [17], [16]. Общие асимптотики для широкого класса регенерирующих процессов изучены в фундаментальной монографии [28]. Целый ряд интересных результатов и ссылок имеется в работе [29].

Рассмотрим регенерирующий процесс $\{Z(t), t \geq 0\}$ со значениями в измеримом пространстве $(U_Z, \mathcal{F}(U_Z))$. Пусть $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность моментов регенерации, $\tau_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ — n -ый период регенерации ($n = 1, 2, \dots, \theta_0 = 0$), так что $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из независимых случайных величин и $\{\tau_n\}_{n=2}^{\infty}$ одинаково распределены, а τ_1 может

иметь другое распределение. Обозначим $F(t) = P\{\tau_2 \leq t\}$, $F_1(t) = P\{\tau_1 \leq t\}$, $\mu = E\tau_2$ и $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$. Здесь мы предполагаем, что $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция, но все результаты справедливы и для дискретных регенерирующих процессов, когда процесс восстановления $\{\tau_j\}_{j=2}^{\infty}$ аperiodичен.

Положим $P(A, t) = P\{Z(t) \in A\}$, $A \in \mathcal{F}(U_Z)$, $t \geq 0$. Как следует из теоремы Смита [12], если $\mu < \infty$ и $F_1(\infty) = 1$, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} P(A, t) = P(A)$ и $\{P(A), A \in \mathcal{F}(U_Z)\}$ — вероятностная мера.

Наша цель — оценить скорость сходимости к предельному распределению, то есть расстояние полной вариации $\varphi(t) = \sup_{A \in \mathcal{F}(U_Z)} |P(A, t) - P(A)|$. Первый результат касается экспоненциального случая.

Теорема 3. Пусть $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция и

$$1 - F_1(t) \leq C_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad 1 - F(t) \leq C e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

для $\alpha_1 > 0$, $\alpha > 0$, $C_1 < \infty$, $C < \infty$. Тогда существуют $\gamma > 0$, $C_\gamma < \infty$, такие что

$$\varphi(t) \leq C_\gamma e^{-\gamma t}. \quad (7)$$

Доказательство исходит из того, что при $F_1(0) = 1$ функция $P(A, t)$ является решением уравнения восстановления и выражается через плотность восстановления $h(t)$ процесса восстановления $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$. В соответствии с результатами из [8] $h(t) = \mu^{-1} + r(t)$, где $|r(t)| \leq C_\varepsilon e^{-\varepsilon t}$ для $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon < \infty$.

Перейдем к оценке скорости сходимости для распределений с так называемым тяжелым хвостом. Обозначим $V(t) = \int_t^\infty \bar{F}(y) dy$.

Теорема 4. Пусть $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция и выполнены условия:

1. $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{V(2t)} < \infty$;
2. $\bar{F}(t) \leq C(1+t)^{-\alpha}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(t)}{V(t)} = 0$ для $\alpha > 2$ и константы $C < \infty$;
3. $\bar{F}_1(t) \leq C_1(1+t)^{-\beta}$ при $t \geq 0$, $\beta > 0$.

Тогда $\varphi(t) \leq \tilde{C}(1+t)^{-\min(\alpha-1, \beta)}$ для $t \geq 0$ и некоторой константы $\tilde{C} < \infty$.

Доказательство опирается на результаты статьи [6].

Вернемся к процессу $Z(t)$, удовлетворяющему соотношению (3). Это — регенерирующий процесс, и его точки регенерации $\{\theta_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ — те моменты регенерации входного потока, в которые $Z(\theta_{k_j}) = 0$. Обычно это означает, что в системе обслуживания нет требований, так что период регенерации для $Z(t)$ — это интервал между двумя последовательными моментами регенерации входного потока, в которые система свободна. Во многих ситуациях асимптотическая оценка $F(t)$ тесно связана с асимптотикой периода занятости. Этот вопрос интересовал многих исследователей (см., например, [16], [8], [10]).

В качестве примера рассмотрим систему $GI/G/1$. Пусть $\{u_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{u_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ — независимые последовательности н.о.р.с.в. с функциями распределения $U_1(x)$ и $U_2(x)$ соответственно. Первая последовательность состоит из интервалов между поступлениями требований, а вторая — из времен обслуживания. Обозначим $W(t)$ — виртуальное время ожидания и $t_n = u_1^{(1)} + \dots + u_n^{(1)}$ — момент поступления n -го требования, предположив,

что $t_1 = 0$. Как известно [23], процесс $W(t)$ эргодичен, если $\rho = \frac{Eu_1^{(2)}}{Eu_1^{(1)}} < 1$. Положим $\Phi(t, x) = \mathbf{P}\{W(t) \leq x\}$, $\Phi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x)$ и $\varphi(t) = \sup_{x \geq 0} |\Phi(t, x) - \Phi(x)|$.

Поскольку $W(t)$ – регенерирующий процесс и его точки регенерации – те моменты $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, при которых $W(t_n - 0) = 0$, можем воспользоваться теоремами 3 и 4 для оценки $\varphi(t)$.

Если $U_1(x)$ и $U_2(x)$ удовлетворяют условию (6), часто называемому условием Крамера [13], то распределение периода регенерации также удовлетворяет этому условию и из теоремы 3 следует, что скорость сходимости будет экспоненциальной. Ситуацию тяжелых хвостов мы рассмотрим в простейшем предположении, что для $\alpha_i > 1$ и констант $0 < c_1^{(i)}, c_2^{(i)} < \infty$

$$\frac{c_1^{(i)}}{(1+x)^{\alpha_i}} \leq \bar{U}_i(x) \leq \frac{c_2^{(i)}}{(1+x)^{\alpha_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Можно было бы рассмотреть и другие возможности, например, $\bar{U}_i(x) \sim \frac{L_i(x)}{x^{\alpha_i}}$ при $x \rightarrow \infty$, где $L_i(x)$ – медленно меняющаяся функция. Однако, это потребовало бы дополнительных оценок, а при условиях (8) результат почти очевидным образом следует из теоремы 4, теорем 42.2, 43.3 в [10].

Следствие 1. Пусть для системы $GI/G/1$ выполнено (8) и $\rho < 1$. Тогда

$$\varphi(t) \leq c(1+t)^{1-\min(\alpha_1, \alpha_2)} \quad (9)$$

при $t \geq 0$ для некоторой константы $c < \infty$.

Доказательство. Предположим, что $W(0) = 0$. Обозначим ν число требований, обслуженных за первый период регенерации, а T длину этого периода, т.е.

$$\nu = \min \{n \geq 1 : W(t_n - 0) = 0\}, \quad T = u_1^{(1)} + \dots + u_\nu^{(1)}.$$

В соответствии с теоремой 43.3 из [10] имеем $\mathbf{P}\{\nu > x\} \leq C_\nu(1+x)^{-\alpha_2}$ для $C_\nu < \infty$, а теорема 42.2 из [10] дает оценку

$$\mathbf{P}\{T > x\} \leq C_T(1+x)^{-\min(\alpha_1, \alpha_2)}. \quad (10)$$

Поскольку $T \geq u_1^{(1)}$ и $T \geq u_1^{(2)}$ с вероятностью 1, из условий (8) получаем

$$\mathbf{P}\{T > x\} \geq \tilde{C}_T(1+x)^{-\min(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (11)$$

для $\tilde{C}_T > 0$. Неравенства (10) и (11) обеспечивают выполнение условий теоремы 4, откуда следует (9). \square

Асимптотика $\varphi(t)$ в случае, когда одна из функций $u_i(x)$, ($i = 1, 2$) удовлетворяет (8), а другая имеет экспоненциальный хвост, также следует из упомянутых теорем из книги [10]. А именно, $\varphi(t) \leq C_1(1+t)^{1-\alpha_j}$, если $u_i(x)$ удовлетворяет условию Крамера, а для $u_j(x)$, ($i \neq j; i = 1, 2; j = 1, 2$) выполнено (8).

Мы видим, что для регенерирующих процессов обслуживания задача оценки скорости сходимости к предельному распределению сводится к исследованию асимптотики периода занятости.

5 Вероятности больших уклонений

Ещё одно направление исследований систем обслуживания — оценка вероятностей образования больших очередей. Это важно не только в теоретическом плане, но и с прикладной точки зрения, поскольку оценка вероятности неприемлемо большой очереди позволяет обосновать необходимость принятия тех или других организационных решений (добавление прибора, увеличение скорости обслуживания, установка буфера и т.п.). Для моделей обслуживания данная проблема сводится к оценке вероятностей больших уклонений для распределений функционалов, заданных на траекториях случайных процессов, в частности, случайных блужданий, цепей Маркова, процессов восстановления и т.д.. Этим вопросам посвящена обширная литература (см., например, [11], [18], [19], [27]).

Отметим два классических результата для системы $GI/G/1$, установленные в разное время многими авторами (см., например, [13]). Мы приведем их в изложении А.А. Боровкова [8], использовавшего для доказательства факторизационные тождества.

Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности, определяющие интервалы между поступлениями и времена обслуживания требований. Если $E(\eta_n - u_n) < 0$, то для времени ожидания n -го требования w_n существует $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{w_n \leq x\} = \Phi(x)$.

Положим

$$D(x) = P\{\eta_n - u_n \leq x\}, \quad G(x) = \int_x^{\infty} [1 - D(y)] dy,$$

$$d(s) = Ee^{s(\eta_n - u_n)} (s \in \mathbb{R}) \text{ и } s_+ = \sup\{s : d(s) < \infty\}.$$

Первый результат касается экспоненциальной асимптотики.

Теорема 5. (Боровков [8], §21, теорема 11). Пусть $s_+ > 0$ и $d(s_+) > 1$. Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi(x) = C_1 e^{-qx} (1 + o(1)), \quad (12)$$

где C_1 — константа, а q — единственное решение уравнения

$$d(q) = 1. \quad (13)$$

Для распределений с тяжелыми хвостами справедлив следующий результат.

Теорема 6. (Боровков [8], §21, Теорема 12). Если $s_+ = 0$, а $G(x)$ является надстепенной функцией (см. [8, §21]), то при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{E(u_n - \eta_n)} G(x) (1 + o(1)). \quad (14)$$

Для системы $R/G/1/\infty$ с регенерирующим входящим потоком, описанной в п. 3, пока не удалось ни получить, ни найти аналог этого результата в литературе. Что касается распределений, удовлетворяющих условиям теоремы 5 (легкий хвост), имеется обобщение на системы со стационарной последовательностью $\{u_n\}$. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях выполняется логарифмический вариант теоремы о больших уклонениях ([19], теорема 3.1). В силу свойства 1 регенерирующего потока это позволило установить соответствующий результат для предельных распределений процессов w_n, q_n, Q_n и $W(t), Q(t)$ [3]. Напомним, что $W(t)$ — виртуальное время ожидания, $Q(t)$ — число требований в системе в момент t , а $w_n, q_n (W_n, Q_n)$ — вложенные процессы в моменты $t_n (\theta_n)$. Итак, пусть $\Phi(x)$ обозначает предельную при $t \rightarrow \infty$ или $n \rightarrow \infty$ функцию распределения одного из этих процессов, а $b(s) = Ee^{-s\eta}, G(z, s) = Ez^\xi e^{-s\tau}$.

Теорема 7. Пусть выполнено условие 1,

$$\delta_0 = \sup\{s : G(b(-s), s) < \infty\} > 0 \quad (15)$$

и

$$G(b(-\delta_0), \delta_0) > 1.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \ln[1 - \Phi(x)] = -q, \quad (16)$$

где q — единственное решение уравнения

$$G(b(-q), q) = 1. \quad (17)$$

Сначала (16) устанавливается для предельного распределения процесса w_n на основе свойства 1 регенерирующего потока и теоремы 3.1 из [19]. Доказательство состоит в проверке условий этой теоремы и опирается на предельную теорему для обрывающихся процессов восстановления ([13], т. 2, гл. XI, §6, теорема 2). Чтобы получить (16) для процесса W_n , строится мажорирующий процесс W_n^- (см. [2]), для которого выполняется теорема 5, и это дает оценку сверху. Оценка снизу находится на основе свойства регенерации входного потока и предельных теорем теории восстановления. Переход к q_n осуществляется на основе связи распределений процессов w_n и q_n (см. [8], §25).

Как следует из теоремы 7, асимптотическое поведение функции $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ определяется совместным распределением числа требований ξ , поступивших за период регенерации, и длины этого периода τ .

В качестве примера рассмотрим систему с марковски модулированным входящим потоком $A(t)$. Это — дважды стохастический пуассоновский поток со случайной интенсивностью

$$\lambda(t, w) = \sum_{j=1}^M \lambda_j 1(U(t) = j). \quad (18)$$

Здесь $1(A)$ — индикаторная функция события A , $U(t)$ — эргодическая цепь Маркова с M состояниями и $\lambda_j \geq 0$, $j = \overline{1, M}$.

Пусть U_n — состояние $U(t)$ после n -го скачка, то есть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — вложенная цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $\{P_{ij}, i, j = \overline{1, M}, P_{ii} = 0\}$ и μ_j^{-1} — среднее время пребывания $U(t)$ в состоянии j . В качестве точек регенерации потока $A(t)$ возьмем моменты попадания управляющей цепи Маркова $U(t)$ в состояние $\{1\}$. Если $\{\pi_j, j = \overline{1, M}\}$ — стационарное распределение $U(t)$, то интенсивность определяется равенством $\lambda = \sum_{j=1}^M \lambda_j \pi_j$. Пусть T_i — время перехода цепи $U(t)$ из состояния $\{i\}$ в $\{1\}$ ($i \neq 1$), а x_i — число требований, поступивших за это время. Для функций $G_i(z, s) = \mathbb{E} z^{x_i} e^{-sT_i}$ справедлива система уравнений

$$G_i(s, z) = \frac{\mu_i}{s + \mu_i + \lambda_i(1 - z)} \sum_{j=1}^M P_{ij} G_j(z, s) \quad i = 2, \dots, M, \quad (19)$$

где $G_1(z, s) = 1$.

Тогда

$$G(s, z) = \frac{\mu_1}{s + \mu_1 + \lambda_1(1 - z)} \sum_{j=2}^M P_{1j} G_j(z, s). \quad (20)$$

Используя (19) и (20), можно установить, что при $s > 0$ существует единственное решение $Z_1(s) > 1$ уравнения

$$G(Z_1(s), s) = 1$$

и $Z_1(0) = 1$. Далее предполагаем, что $\delta_1 = \sup\{s : b(-s) < \infty\} > 0$ и $\delta_1 < \infty$.

Тогда из условия эргодичности вытекает, что существует единственный положительный корень q уравнения $b(-q) = Z_1(q)$, а это означает выполнение условий теоремы.

6 Заключение и другие направления исследований

Мы рассмотрели три традиционные для теории обслуживания проблемы — определение условий стабильности системы, оценку скорости сходимости к предельному распределению и асимптотический анализ вероятности образования большой очереди в стационарном режиме.

Решение первых двух проблем основано на подходах, обычно используемых в теории обслуживания для классических моделей. Это возможно в силу свойства регенерации процесса, описывающего функционирование системы с регенерирующим входящим потоком, имеющего место при некоторых дополнительных предположениях. Поскольку для систем, задаваемых стационарными последовательностями, есть ряд результатов, касающихся вероятностей больших уклонений, решение третьей проблемы исходит из ещё одного свойства регенерирующего потока. А именно, при определенных условиях последовательность интервалов между поступлениями требований слабо сходится к стационарной. Полученные результаты могут быть распространены на многофазные системы обслуживания и иерархические сети. Это возможно в силу того, что в некоторых предположениях выходящий из системы поток будет регенерирующим, если таковым является входящий.

Ещё одна важная проблема в теории очередей — анализ асимптотического поведения очереди в условиях высокой загрузки. В этом направлении для систем с регенерирующим входящим потоком получен ряд результатов (см. [14], [5], [15], [4]). В основе доказательств — сходимость нормированного регенерирующего потока $A_T(t)$ (см. свойство 2) к винеровскому процессу и соответствующие результаты, касающиеся систем с процессом восстановления в качестве входящего потока (см. книгу [30] и библиографию к ней).

Список литературы

- [1] Айбатов С.Ж., Эргодическая теорема для системы обслуживания с ненадежным прибором // Математические заметки, 2015 (в печати)
- [2] Афанасьева Л.Г., Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами // Кибернетика и системный анализ. НАН Украины, 2005, т. 41, № 1, с. 54–69.
- [3] Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е., Вероятности больших уклонений для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком // ТВП, 2015 (в печати)
- [4] Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е., Предельные теоремы для систем обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским потоком (условия высокой загрузки) // Проблемы передачи информации, 2008, т. 44, № 4, с. 81–100.

- [5] Афанасьева Л.Г., Ткаченко А.В., Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком // ТВП, 2013, т. 58, № 2, с. 210-234.
- [6] Балтрунас А., О скорости сходимости для регенерирующих процессов // Литовский математический сборник, 1986, т. XXVI, с. 602–606.
- [7] Белорусов Т.Н., Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди // ТВП, 2011, т. 56, № 1, с.145–152.
- [8] Боровков А.А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
- [9] Боровков А.А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
- [10] Боровков А.А., Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: Едиториал УРСС, 1999.
- [11] Боровков А.А., Боровков К.А., Вероятности больших отклонений для обобщенных процессов восстановления с правильно меняющимися распределениями скачков // Математические труды, 2005, т. 8, № 2, с. 69–136.
- [12] Кокс Д.Р., Смит В.Л., Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.
- [13] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: Мир, 1984.
- [14] Afanasyeva L.G., Bashtova E.E., Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server // Queueing Systems, 2014, v. 76, № 2, p. 125–147.
- [15] Afanasyeva L.G., Bashtova E.E., Bulinskaya E.V., Limit theorems for semi-Markov queues and their applications // Communications in Statistics. Simulation and Computation, 2012, v. 41, № 6, p. 688-709.
- [16] Asmussen S., Applied Probability and Queues. Springer, 2003.
- [17] Asmussen S., Kluppelberg C., Sigman R., Sampling at subexponential times, with queueing applications // Stochastic Processes and their Applications, 1999, v. 79, p. 265–286.
- [18] Bryc W., Denibo A., Large Deviations and Strong Mixing // Ann. Prob. and Stat., 1996, v. 32, p. 549–569.
- [19] Gantsh A., O’Connel N., Wischik D., Big Queues. Springer, 2004.
- [20] Gaver D.P., A waiting line with interrupted service including priority // J. Rl. Stat. Soc. 1962, v. 24, p. 73–90.
- [21] Grandell J., Double stochastic Poisson processes. Lect. Notes. Math., 1976, v. 529.
- [22] Iglehart D.L., Whitt W., Multiple channel queues in heavy traffic. I // Advances in Applied Probability, 1970, v. 2, № 1, p.150–177.
- [23] Loynes R., The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times // Proc. Camb. Phil. Soc., 1982, v. 58, № 3, p. 497–520.

- [24] *Morozov E.*, The stability of non-homogeneous queueing system with regenerative input // *J. Math. Sci.*, 1997, v. 46, p. 407–421.
- [25] *Morozov E.*, The tightness in the ergodic analysis of regenerative queueing processes // *Queueing Systems*, 1997, v. 27, № 1–2, 179–203.
- [26] *Morozov E.*, Weak Regeneration in Modeling of Queueing Processes // *Queueing Systems*, 2004, v. 46, № 3–4, p. 295–315.
- [27] *Sadowsky J.S., Szpankowski W.*, The Probability of Large Queue Length and Waiting Times in a Heterogeneous Multiserver Queue. Part I: Tight Limits // *Adv. Appl. Prob.*, 1995, v. 27, p. 532–566.
- [28] *Thorisson H.*, Coupling, stationarity, and regeneration. Springer, 2000.
- [29] *Veretenikov A.Yu.*, On the rate of convergence for infinite server Erlang-Sevastyanov's problem // *Queueing Systems*, 2014, v. 76, № 2, p. 181–203.
- [30] *Whitt W.*, Stochastic-process limits: an introduction to stochastic-process limits and their application to queues // Springer Science & Business Media, 2002.

Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения ¹

Булинская Е.В.², Соколова А.И.³

Цель работы – исследование системы с сезонным спросом и/или пополнением запасов. Предполагается, что функционирование системы описывается обобщенным процессом восстановления. Рассматривается несколько типов обобщения простого процесса восстановления, широко используемого в различных приложениях теории вероятностей. Для изучаемых процессов доказаны усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также аналоги элементарной теоремы восстановления с оценкой скорости сходимости. Полученные результаты использованы для оптимизации функционирования системы.

1 Введение

Хорошо известно (см., например, [3], [7]), что существует сходство между стохастическими моделями, возникающими в различных приложениях теории вероятностей, таких, как теория запасов, страхование, финансы, теория массового обслуживания, теория надежности, а также биология, медицина и многие другие. Речь идет о так называемых процессах входа-выхода, которые могут быть описаны с помощью следующего набора элементов $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$. Здесь T – это горизонт планирования, Z , Y и U – соответственно процессы на входе и выходе системы и управление. Функционал Ψ отражает конфигурацию системы и способ ее функционирования, поэтому состояние системы X задается с помощью соотношения $X = \Psi(Z, Y, U)$. Последний элемент \mathcal{L} – целевая функция, оценивающая качество функционирования рассматриваемой системы.

Для определенности мы будем рассматривать системы управления запасами. Возникновение математической теории запасов обычно связывается с появлением в 1951 году работы [10] и в 1955 – работы [14]. Подробнее об истории и возникших ранее моделях можно прочитать в [11]. Специальная глава, посвященная моделям управления запасами, имеется также в монографии Р.Беллмана [13]. Характерной особенностью рассматривавшихся моделей является предположение, что выходящий процесс (т.е. спрос) задается

¹Работа частично поддержана грантом РФФИ № 13-01-00653.

²Булинская Екатерина Вадимовна, ebulinsk@yandex.ru, профессор кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

³Соколова Анна Ильинична, alup@mail.ru, студентка кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

последовательностью независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Это означает, что накопленный спрос представляет собой простой процесс восстановления. Такие процессы особенно популярны в теории надежности. Одними из первых работ, где они исследовались, были статьи В.Феллера [18] и [19]. Далее появились работы В.Л.Смита [21], [22] и монография Д.Р.Кокса [16], содержащая результаты, полученные до 1962 года. Процессы восстановления стали классическим инструментом исследования в разнообразных приложениях теории вероятностей, поэтому большинство учебников по теории вероятностей и случайным процессам имеет специальный раздел, посвященный их свойствам (см., например, [1], [2], [8]). Более того, до сих пор появляются и специальные книги на эту тему, отметим, в частности, монографию К.Митова и Э.Оми [20].

Более реалистичными могут быть модели, в которых учитывается первоначальный период вхождения системы в строй или сезонный характер ее функционирования (см., например, [9], где использовались методы теории массового обслуживания). В данной работе мы предполагаем, что процессы входа и/или выхода описываются обобщенными процессами восстановления. В разделе 2 мы даем некоторые определения и вспомогательные результаты. Раздел 3 посвящен различным обобщениям классических процессов восстановления и их свойствам. Так, например, установлены усиленный закон больших чисел и центральная предельная теорема для всех изучаемых процессов. В разделе 4 рассмотрены процессы восстановления с доходами и применение изученных процессов в теории запасов. Наконец, в заключительной части 5 подведены итоги и указаны направления будущих исследований.

2 Вспомогательные результаты

Напомним некоторые хорошо известные определения.

Определение 1. Пусть T_n , $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с функцией распределения $F(t) = P(T_n \leq t)$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = T_1 + \dots + T_n$. Тогда $\{S_n\}_0^\infty$ представляет собой *простой процесс восстановления*. Суммы S_n , $n \geq 0$, называются *моментами восстановления*.

Существование математического ожидания у случайных величин T_n не требуется, но в силу их неотрицательности всегда существует

$$\mu = \int_0^\infty y dF(y) = \int_0^\infty [1 - F(y)] dy,$$

$0 \leq \mu \leq \infty$. В случае $\mu = \infty$ полагаем $\mu^{-1} = 0$.

Для любого борелевского множества $B \subset [0, \infty)$ обозначим $N(B)$ число моментов восстановления S_n , попадающих в B .

Введем также $N_t = N([0, t])$ — число моментов восстановления в промежутке $[0, t]$, т.е.

$$N_t = \min\{k \geq 0 : S_k > t\}.$$

Событие $\{N_t > n\}$ равносильно тому, что n -ый момент восстановления находится на $[0, t]$, поэтому

$$P\{N_t > n\} = P\{S_n \leq t\}.$$

Рассмотрим функцию

$$U(t) = \mathbb{E}N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N_t > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t),$$

представляющую собой среднее число восстановлений на $[0, t]$. Здесь $F^{n*}(t)$ – n -кратная свертка распределения $F(t)$ с самим собой, а $F^{0*}(t)$ по определению равно вырожденной функции распределения

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Функция $U(t)$ называется *функцией восстановления*.

Сформулируем несколько результатов, которые будут использоваться или обобщаться в дальнейшем. Их доказательства можно прочитать, например, в [1], [2], [8].

Лемма 1. *Функция $U(t)$ конечна при всех $t \in [0, \infty)$.*

Теорема 1 (Элементарная теорема восстановления). *При $t \rightarrow \infty$ существует предел функции $t^{-1}U(t)$, и он равен μ^{-1} .*

Важную роль при исследовании процессов восстановления играет уравнение восстановления

$$Z(t) = z(t) + (F * Z)(t),$$

которое для краткости мы будем записывать в виде $Z = z + F * Z$.

Замечание 1. Далее мы также будем опускать аргументы функций, если это не вызывает недоразумений.

Лемма 2. *Если $z(t)$ – ограниченная функция, обращающаяся в ноль при $t < 0$, то функция $Z = U * z$, определяемая равенством $Z(t) = \int_0^t z(t-y)dU(y)$, есть решение уравнения восстановления $Z = z + F * Z$, причем это решение единственно в классе функций, обращающихся в ноль на $(-\infty, 0)$ и ограниченных на конечных интервалах.*

Теорема 2 (Теорема восстановления в альтернативной форме). *Если распределение F неарифметическое, а z непосредственно интегрируема по Риману, то решение Z уравнения восстановления $Z = z + F * Z$ удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} z(y)dy.$$

Теорема 3 (Закон больших чисел для процесса восстановления). *Если $0 < \mathbb{E}T_1 = \mu < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p} \frac{1}{\mu},$$

где, как обычно, \xrightarrow{p} означает сходимость по вероятности.

Теорема 4 (Центральная предельная теорема для простого процесса восстановления).
Если $ET_1 = \mu$, $DT_1 = \sigma^2 < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t - t\mu^{-1}}{\sqrt{t\sigma^2\mu^{-3}}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1).$$

Как обычно, \xrightarrow{d} обозначает сходимость по распределению, а $\xi \sim N(0, 1)$ означает, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Определение 2. Если добавляется случайная величина T_0 , не зависящая от $\{T_n\}_1^\infty$, неотрицательная, имеющая распределение $G_0(t) = P(T_0 \leq t)$, отличное от распределения $F(t)$ остальных случайных величин, то последовательность $\{S_n\}_0^\infty$, где $S_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$, образует *общий процесс восстановления* или процесс восстановления с запаздыванием.

3 Обобщенные процессы восстановления

3.1 Определения

Рассмотрим различные обобщения процессов восстановления.

Определение 3. Пусть $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$, $0 \leq n \leq k-1$, в то время как при $n \geq k$ положим $S_n = S_{k-1} + T_1 + \dots + T_{n-k+1}$, где все слагаемые – независимые неотрицательные случайные величины, $G_i(x)$ – функция распределения (ф.р.) величины X_i , $i = 0, \dots, k-1$. Пусть далее T_j , $j \geq 1$, – одинаково распределенные случайные величины с ф.р. $F(x)$. Назовем величины X_i , $i \geq 1$, T_j , $j \geq 1$, промежутками между восстановлениями, а S_n , $n \geq 0$, – моментами восстановления. Тогда при $k > 1$ процесс $\{S_n\}_0^\infty$ является *обобщенным процессом восстановления с запаздыванием*.

Определение 4. Пусть $S_0 = 0$, $S_n = T_1 + \dots + T_n$, $n \geq 1$, где все слагаемые T_j , $j \geq 1$, – независимые неотрицательные случайные величины, $F_i(x)$ – ф.р. величин T_{kl+i} , $i = 1, \dots, l$, для некоторого $l > 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Величины T_j – промежутки между восстановлениями, S_n – моменты восстановления, а сам процесс $\{S_n\}_0^\infty$ – *периодический процесс восстановления с периодом l* .

Альтернирующий процесс восстановления – это частный случай периодического процесса, если период $l = 2$. Для любого $k \geq 0$ назовем S_{2k} моментами поломки, а S_{2k+1} – моментами окончания ремонта (восстановления). В отличие от периодических процессов, для альтернирующего процесса нас будут интересовать лишь средние числа поломок и восстановлений в промежутке $[0, t]$.

Определение 5. Как и в случае обобщенного процесса с запаздыванием, полагаем $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$, $0 \leq n \leq k-1$, в то время как при $n \geq k$ имеем $S_n = S_{k-1} + T_1 + \dots + T_{n-k+1}$, где все слагаемые – независимые неотрицательные случайные величины, $G_i(x)$ – ф.р. величины X_i , $i = 0, \dots, k-1$. Пусть также F_j – ф.р. величин T_{ql+j} , $j = 1, \dots, l$, для некоторого $l > 1$, $q = 0, 1, 2, \dots$. Назовем величины X_i , T_j промежутками между восстановлениями, а S_n – моментами восстановления. Процесс $\{S_n\}_0^\infty$ – это *периодический процесс восстановления с запаздыванием* или (k, l) -процесс.

Для каждого из описанных процессов мы хотим рассмотреть асимптотическое поведение соответствующих функций и процессов восстановления.

3.2 Процесс восстановления с запаздыванием

Обозначим $V(t)$ функцию восстановления для запаздывающего процесса, тогда

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq t\} = \\ &= G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * G_1 * \dots * G_{k-1} + \sum_{r=1}^{\infty} G_0 * G_1 * \dots * G_{k-1} * F^{r*} = \\ &= G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * G_1 * \dots * G_{k-1} * U, \end{aligned}$$

где $U(t) = \sum_{r=0}^{\infty} F^{r*}(t)$, как и раньше, функция восстановления простого процесса.

Прежде всего установим, что наличие запаздывания не влияет на асимптотическое поведение функции восстановления.

Теорема 5. *Существует*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t}.$$

Доказательство. Рассмотрим явный вид функции $V(t)$

$$V = G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * G_1 * \dots * G_{k-2} + G_0 * G_1 * \dots * G_{k-1} * U. \quad (1)$$

Первые $k - 1$ слагаемых – соответственно функции распределения случайных величин $X_0, X_0 + X_1, \dots, X_0 + X_1 + \dots + X_{k-2}$, поэтому каждое из них не превосходит единицы. Последнее слагаемое – свертка функции $U(t)$ с функцией распределения случайной величины $X_0 + X_1 + \dots + X_{k-1}$, а значит, не превосходит $U(t)$.

Таким образом, $V(t) \leq k - 1 + U(t)$ и, если поделить все на t и устремить $t \rightarrow \infty$, получим

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t}. \quad (2)$$

С другой стороны, рассмотрим свертку $U_1 = g * U$, где g – функция распределения случайной величины $X_0 + X_1 + \dots + X_{k-1}$. Тогда, так как $g(x)$ – неубывающая функция, для любого $0 < \varepsilon < 1$ можно записать

$$U_1(t) \geq \int_0^{t-\varepsilon t} g(t-y) dU(y) \geq g(\varepsilon t) U(t - \varepsilon t).$$

Следовательно,

$$\frac{U_1(t)}{t} \geq \frac{U(t - \varepsilon t)}{t - \varepsilon t} (1 - \varepsilon) g(\varepsilon t),$$

что дает

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{U_1(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t}.$$

Так как функция $V(t)$ равна сумме $U_1(t)$ и еще $k - 1$ неотрицательного слагаемого, получаем немедленно

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t},$$

откуда, в сочетании с (2), вытекает требуемый результат. \square

Заметим, что в силу элементарной теоремы восстановления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = \mu^{-1}, \text{ где } \mu = \mathbf{E}T_1.$$

Следующий результат показывает, что скорость сходимости к пределу зависит от распределения запаздывания.

Теорема 6. *Если $F(x)$ – неарифметическое распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , а $G_i(x)$ имеют соответственно математические ожидания ν_i , $i = 0, 1, \dots, k-1$, то при $t \rightarrow \infty$*

$$V(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - \frac{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_{k-1}}{\mu} + k - 1. \quad (3)$$

Доказательство. Из явного вида (1) функции $V(t)$ следует, что она является решением уравнения восстановления

$$V = z_1 + F * V,$$

где

$$z_1 = V - F * V = G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * G_1 * \dots * G_{k-1} - F * G_0 - F * G_0 * G_1 - \dots - F * G_0 * \dots * G_{k-2}. \quad (4)$$

Положим теперь $Z_1(t) = V(t) - t\mu^{-1}$. Функция $Z_1(t)$ является решением уравнения восстановления

$$Z_1 = \tilde{z}_1 + F * Z_1$$

при этом, в силу (4),

$$\tilde{z}_1 = Z_1 - F * Z_1 = F * \frac{t}{\mu} + z_1 - \frac{t}{\mu}. \quad (5)$$

Интегрирование по частям дает

$$F * \frac{t}{\mu} = \int_0^t \frac{t-y}{\mu} dF(y) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^t (1-F(y)) dy. \quad (6)$$

Используя (5) и (6), получаем, что $\tilde{z}_1 = z_1 - \mu^{-1} \int_0^t (1-F(y)) dy$, поэтому

$$\int_0^\infty \tilde{z}_1(t) dt = \int_0^\infty (z_1(t) - 1) dt + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1-F(y)) dy \right) dt.$$

Первое слагаемое в этой сумме равно

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (z_1(t) - 1) dt &= \int_0^\infty ((1-F * G_0) + (1-F * G_0 * G_1) + \dots + (1-F * G_0 * \dots * G_{k-2}) - \\ &\quad - (1-G_0) - (1-G_0 * G_1) - \dots - (1-G_0 * \dots * G_{k-1})) dt = \\ &= (\mu + \nu_0) + \dots + (\mu + \nu_0 + \dots + \nu_{k-2}) - \nu_0 - (\nu_0 + \nu_1) - \dots - (\nu_0 + \dots + \nu_{k-1}) = \\ &= (k-1)\mu - (\nu_0 + \dots + \nu_{k-1}). \quad (7) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy \right) dt &= t \left(\frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t}{\mu} (1 - F(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty t(1 - F(t)) dt = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty (1 - F(t)) dt^2 = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty t^2 dF(t) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, из (7), (8) вытекает

$$\int_0^\infty \tilde{z}_1(t) dt = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} + (k - 1)\mu - (\nu_0 + \dots + \nu_{k-1}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_1| &= \left| z_1 - 1 + \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy \right| \leq \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy + |z_1 - 1| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy + (1 - F * G_0) + (1 - F * G_0 * G_1) + \dots + (1 - F * G_0 * \dots * G_{k-2}) \\ &\quad + (1 - G_0) + (1 - G_0 * G_1) + \dots + (1 - G_0 * \dots * G_{k-1}). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в последнем выражении есть монотонно невозрастающая интегрируемая функция, следовательно, и вся сумма тоже, а значит, эта сумма является непосредственно интегрируемой по Риману функцией. Таким образом, мы мажорировали функцию \tilde{z}_1 непосредственно интегрируемой функцией, поэтому сама функция \tilde{z}_1 тоже непосредственно интегрируема (см., например, [1]).

Следовательно, мы можем применить теорему восстановления в альтернативной форме и установить справедливость требуемого результата (3). \square

Теперь докажем усиленный закон больших чисел для обобщенного процесса восстановления с запаздыванием. Мы увидим, что он такой же, как для простого процесса восстановления.

Теорема 7. Если $F(x)$ – распределение с математическим ожиданием $\mu < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ п.н.}$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться соотношением

$$P(N_t > n) = P(S_n \leq t),$$

изучим сначала поведение S_n при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1.

Так как число k фиксировано, то $n^{-1}S_{k-1} \rightarrow 0$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. В тоже время $n^{-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} T_i \rightarrow \mu$ с вероятностью 1 по усиленному закону больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием. Таким образом, имеем $n^{-1}S_n \rightarrow \mu$ п.н.

Введя множества $A_t^\varepsilon = \{|t^{-1}N_t - \mu^{-1}| \geq \varepsilon\}$, можно записать

$$A = \left\{ \frac{N_t}{t} \not\rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty \right\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{t_0} \bigcup_{t > t_0} A_t^\varepsilon.$$

Очевидно, что

$$A_t^\varepsilon = \{N_t \leq t(\mu^{-1} - \varepsilon)\} \cup \{N_t \geq t(\mu^{-1} + \varepsilon)\} = A_t^{-\varepsilon} \cup A_t^{+\varepsilon}.$$

Положив $r = [t(\mu^{-1} - \varepsilon)]$, где $[c]$ означает целую часть c , можно показать, что

$$A_t^{-\varepsilon} = \{N_t \leq r\} = \{S_r > t\} \subset \left\{ \frac{S_r}{r} > \frac{\mu}{1 - \mu\varepsilon} \right\} = \left\{ \frac{S_r}{r} - \mu > \varepsilon_1 \right\} = B_r^{+\varepsilon_1},$$

где $\varepsilon_1 = \mu\varepsilon^2(1 - \mu\varepsilon)$. Заметим, что при $\varepsilon > \mu^{-1}$ получаем $P(A_t^{-\varepsilon}) = 0$. Если же $\varepsilon < \mu^{-1}$, то $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$A^- = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{t_0} \bigcup_{t > t_0} A_t^{-\varepsilon} \subset \bigcup_{\varepsilon_1 > 0} \bigcap_{r_0} \bigcup_{r > r_0} B_r^{+\varepsilon_1} = B^+.$$

Положив $l = [t(\mu^{-1} + \varepsilon)] > t(\mu^{-1} + \varepsilon) - 1$, мы видим, что $l \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и $t \leq (l + 1)(\mu^{-1} + \varepsilon)^{-1}$. Таким образом,

$$A_t^{+\varepsilon} = \{N_t \geq t(\mu^{-1} + \varepsilon)\} \subset \{N_t \geq l\} = \{S_l < t\} \subset \left\{ S_l \leq \frac{l + 1}{\mu^{-1} + \varepsilon} \right\} = \left\{ \frac{S_l}{l} - \mu \leq -\varepsilon_2 \right\},$$

где $\varepsilon_2 = (\mu\varepsilon - l^{-1})(\mu^{-1} + \varepsilon)^{-1} > 0$ для $l > (\mu\varepsilon)^{-1}$. В результате, имеем

$$A^+ = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{t_0} \bigcup_{t > t_0} A_t^{+\varepsilon} \subset \bigcup_{\varepsilon_2} \bigcap_{l_0} \bigcup_{l > l_0} B_l^{-\varepsilon_2} = B^-.$$

Значит, мы установили, что

$$A = A^- \cup A^+ \subset B^+ \cup B^- = B = \{n^{-1}S_n \not\rightarrow \mu, \quad n \rightarrow \infty\}.$$

Поскольку мы уже проверили, что $P(B) = 0$, то получаем требуемый результат

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Наконец, получим центральную предельную теорему для обобщенного процесса восстановления с запаздыванием. Она имеет тот же вид, что и для простого процесса восстановления.

Теорема 8. *Если существуют и конечны $ET_1 = \mu$, $DT_1 = \sigma^2 > 0$, $EX_i = \nu_i$, $i = 0, \dots, k - 1$, то при $t \rightarrow \infty$*

$$\frac{N_t - t\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1).$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что для S_n выполняется центральная предельная теорема, а именно,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Разложим характеристическую функцию случайной величины $n^{-1/2}Z_n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}(S_n - \mathbb{E}S_n)$ в произведение характеристических функций

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{j=0}^{k-1} \varphi_{\frac{X_j - \nu_j}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\varphi_{\frac{T_1 - \mu}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-k+1}.$$

Так как существуют средние и дисперсии у распределения T_1 , то существуют и первые две производные соответствующей характеристической функции, т.е. справедливо разложение

$$\varphi_{T_1}(t) = \varphi_{T_1}(0) + t\varphi'_{T_1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''_{T_1}(0) + \bar{o}(t^2).$$

Следовательно,

$$\varphi_{T_1 - \mu}(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \bar{o}(t^2).$$

Аналогично, $\varphi_{X_j - \nu_j}(t) = 1 + \bar{o}_j(t)$. Подставив эти разложения, имеем

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \bar{o}_j(t)) \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \bar{o}(t^2)\right)^{n-k+1} \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Последнее соотношение выполняется, так как k – фиксированное конечное число, и в первом произведении только k множителей.

Получаем, что характеристическая функция случайной величины $(S_n - \mathbb{E}S_n)(\sigma\sqrt{n})^{-1}$ сходится к характеристической функции стандартного нормального распределения, а значит, сама величина слабо сходится к нормальной.

Вернемся к N_t и воспользуемся соотношением

$$\mathbb{P}(N_t > n) = \mathbb{P}(S_n \leq t).$$

Запишем далее

$$\mathbb{P}(N_t > n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{t - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

По центральной предельной теореме

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначим $m = \sum_{j=0}^{k-1} \nu_j$. Пусть теперь n при $t \rightarrow \infty$ меняется так, что выполняется

$$\frac{t - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{t - m - (n - k + 1)\mu}{\sigma\sqrt{n}} = v.$$

Считая v фиксированным, разрешим равенство относительно n

$$n = \frac{t - a}{\mu} + \frac{v\sigma \left(v\sigma \pm 2\sqrt{t\mu} \sqrt{1 + \frac{v^2\sigma^2 - 4a\mu}{4t\mu}} \right)}{2\mu^2} = \frac{t}{\mu} \pm \frac{v\sigma\sqrt{t\mu}}{\mu^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right),$$

где обозначено $a = m - (k - 1)\mu$.

Подставляя найденное значение n , получаем, что

$$\mathbb{P}(N_t > n) = \mathbb{P}\left(\frac{N_t - t\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \geq \pm v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \rightarrow \Phi(v).$$

Здесь следует выбрать знак минус, так как только в этом случае в обеих частях полученного соотношения будут стоять возрастающие по v функции. Так как $\Phi(v)$ непрерывна, то получаем

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_t - t\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \geq -v\right) \rightarrow \Phi(v) = 1 - \Phi(-v)$$

или

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_t - t\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v).$$

□

3.3 Периодический процесс восстановления

Обозначим функцию восстановления для периодического процесса $W(t)$. Тогда при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = 1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_l + F_1 * \dots * F_l * F_1 + \dots \\ &= 1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_{l-1} + F_1 * \dots * F_l * W, \end{aligned}$$

так как $\mathbb{P}(S_0 \leq t) = 1$ при указанных значениях t .

Получаем уравнение восстановления

$$W = z_2 + H * W, \tag{9}$$

где $z_2 = 1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_{l-1}$, $H = F_1 * \dots * F_l$.

Обозначим

$$U_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{n*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_1 * \dots * F_l)^{n*}(t). \tag{10}$$

Тогда из леммы 2 следует, что решением нашего уравнения восстановления (9) является функция

$$W(t) = U_2 * z_2(t).$$

Теперь рассмотрим ее асимптотическое поведение. Сначала установим аналог элементарной теоремы восстановления.

Теорема 9. *Существует*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = \frac{l}{\mathbb{E}(T_1 + \dots + T_l)}. \tag{11}$$

Доказательство. Мы знаем, что $W(t) = U_2 * z_2(t)$, причем $z_2 = 1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_{l-1}$ – сумма l функций распределения (случайных величин $0, T_1, T_1 + T_2, \dots, T_1 + \dots + T_{l-1}$ соответственно), т.е. неубывающая функция, не превосходящая l . Следовательно, $W(t) \leq lU_2(t)$, а значит, и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lU_2(t)}{t}.$$

Получим оценку снизу. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$W(t) \geq \int_0^{t-\varepsilon t} z_2(t-y) dU_2(y) \geq z_2(\varepsilon t) U_2(t-\varepsilon t),$$

так как $z_2(x)$ – неубывающая функция.

Следовательно, для любого $0 < \varepsilon < 1$

$$\frac{W(t)}{t} \geq \frac{U_2(t-\varepsilon t)}{t-\varepsilon t} (1-\varepsilon) z_2(\varepsilon t).$$

Поэтому, в силу того, что $z_2(t) \rightarrow l$ при $t \rightarrow \infty$,

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lU_2(t)}{t}.$$

Нетрудно проверить, что в силу элементарной теоремы восстановления, примененной к функции U_2 , верно соотношение (11). \square

Установим теперь скорость сходимости.

Теорема 10. Если $H(x)$ – неарифметическое распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , и $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i соответственно, $i = 1, \dots, l$, ($\mu_1 + \dots + \mu_l = \mu$), то при $t \rightarrow \infty$

$$W(t) - \frac{lt}{\mu} \rightarrow l \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - \frac{(l-1)\mu_1 + (l-2)\mu_2 + \dots + \mu_{l-1}}{\mu}. \quad (12)$$

Доказательство. Обозначим $Z_2(t) = W(t) - lt\mu^{-1}$. Функция $Z_2(t)$ является решением уравнения восстановления $Z_2 = \tilde{z}_2 + H * Z_2$ для

$$\tilde{z}_2(t) = Z_2(t) - H * Z_2(t) = W(t) - \frac{lt}{\mu} - H * W(t) + H * \frac{lt}{\mu} = z_2 + H * \frac{lt}{\mu} - \frac{lt}{\mu},$$

причем

$$H * \frac{lt}{\mu} = \frac{lt}{\mu} - \frac{l}{\mu} \int_0^t (1 - H(y)) dy.$$

Следовательно, $\tilde{z}_2 = (z_2 - l) + \frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy$, и

$$\int_0^\infty \tilde{z}_2(t) dt = \int_0^\infty (z_2(t) - l) dt + \int_0^\infty \left(\frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy \right) dt.$$

Второе слагаемое считается аналогично соответствующему слагаемому в доказательстве теоремы 6, с заменой F на H , и оно равно $l \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}$. Вычислим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (z_2(t) - l) dt &= \int_0^\infty (1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_{l-1} - l) dt = \\ &= - \int_0^\infty ((1 - F_1) + (1 - F_1 * F_2) + \dots + (1 - F_1 * \dots * F_{l-1})) dt = \\ &= -(\mu_1 + (\mu_1 + \mu_2) + \dots + (\mu_1 + \dots + \mu_{l-1})) = -((l-1)\mu_1 + (l-2)\mu_2 + \dots + \mu_{l-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Итого получаем

$$\int_0^\infty \tilde{z}_2(t) dt = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} - ((l-1)\mu_1 + (l-2)\mu_2 + \dots + \mu_{l-1}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_2| &= \left| z_2 - l + \frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy \right| \leq \frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy + |z_2 - l| \\ &\leq \frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy + (1 - F_1(t)) + (1 - F_1 * F_2(t)) + \dots + (1 - F_1 * \dots * F_{l-1}(t)). \end{aligned}$$

Все слагаемые в последнем выражении являются монотонно невозрастающими интегрируемыми функциями, поэтому вся сумма тоже, и, следовательно, эта сумма является непосредственно интегрируемой по Риману. Таким образом мы мажорировали функцию \tilde{z}_2 непосредственно интегрируемой функцией, а значит, и сама функция \tilde{z}_2 является непосредственно интегрируемой по Риману. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой восстановления в альтернативной форме, из которой получаем, что утверждение (12) справедливо. \square

Перейдем к доказательству усиленного закона больших чисел (УЗБЧ).

Теорема 11. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i , $i = 1, \dots, l$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{\mu}{l} \quad \text{н.н.},$$

где $\mu_1 + \dots + \mu_l = \mu$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 7, найдем сначала предел $\frac{S_n}{n}$ с вероятностью 1. Для этого введем $\eta_i = \sum_{j=1}^l T_{(i-1)l+j}$, $i \geq 1$. Пусть $n = ql + r$, где q — целая часть nl^{-1} , а $0 \leq r < l$. Тогда можно записать

$$S_n = \hat{S}_q + \xi_r^q,$$

где $\hat{S}_q = \sum_{i=1}^q \eta_i$, $\xi_r^q = \sum_{j=1}^r T_{ql+j}$, а сумма по пустому множеству равна 0. Следовательно,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{q}{n} \cdot \frac{1}{q} \hat{S}_q + \frac{1}{n} \xi_r^q. \quad (14)$$

В силу УЗБЧ для независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_i, i \geq 1$, с $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_l$ имеем $q^{-1}\hat{S}_q \rightarrow \mu$ п.н. Кроме того неотрицательность случайных величин T_i , влечет неравенство $\xi_r^q < \eta_{q+1} = \hat{S}_{q+1} - \hat{S}_q$. При $n \rightarrow \infty$ также $q \rightarrow \infty$, а $qn^{-1} \rightarrow l^{-1}$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (14), получим требуемое соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\mu}{l} \quad \text{п.н.}$$

Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 7, получаем, что

$$\mathbb{P} \left(\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{l}{\mu} \right) \geq \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \rightarrow \frac{\mu}{l} \right) = 1.$$

Поэтому

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{l}{\mu} \quad \text{п.н.}$$

□

Теорема 12. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i и дисперсии $\sigma_i^2, i = 1, \dots, l$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma l \sqrt{t\mu^{-3}}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1).$$

Здесь $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_l, \sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_l^2$.

Доказательство. Покажем, что в данном случае центральная предельная теорема для S_n имеет вид

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma \sqrt{q}} \leq v \right) \rightarrow \Phi(v) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $n = lq + r, 0 \leq r < l$, т.е. $q = \lfloor \frac{n}{l} \rfloor$.

Разложим характеристическую функцию случайной величины $\frac{Z_n}{\sqrt{q}} = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma \sqrt{q}}$ в произведение характеристических функций:

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{q}}}(t) = \varphi_{Z_n} \left(\frac{t}{\sqrt{q}} \right) = \left(\varphi_{\frac{T_1 + \dots + T_l - \mu}{\sigma}} \left(\frac{t}{\sqrt{q}} \right) \right)^q \cdot \prod_{i=1}^r \varphi_{\frac{T_i - \mu_i}{\sigma}} \left(\frac{t}{\sqrt{q}} \right).$$

Так как существуют средние и дисперсии у всех рассматриваемых распределений, то существуют и первые две производные соответствующих характеристических функций, и справедливо разложение

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + \bar{o}(t^2),$$

а учитывая нормированность случайных величин, для которых мы рассматриваем характеристические функции, получаем

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{q}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2q} + \bar{o}(t^2) \right)^q \cdot \prod_{i=0}^{r-1} \left(1 - \frac{t^2}{2q} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma} \right)^2 + \bar{o}(t^2) \right) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Последнее соотношение выполняется, так как l – фиксированное конечное число, во втором произведении только $r \leq l - 1$ множителей, и $q \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Получаем, что характеристическая функция случайной величины $\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}}$ сходится к х.ф. нормального распределения, а значит, сама величина слабо сходится к нормальной. Вернемся к N_t и запишем

$$\mathbf{P}(N_t > n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}} \leq \frac{t - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}}\right).$$

Обозначим $m = \sum_{j=1}^r \mu_j$. Пусть теперь n при $t \rightarrow \infty$ меняется так, что выполняется

$$\frac{t - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}} = \frac{t - m - q\mu}{\sigma\sqrt{q}} = v.$$

Считая v фиксированным, разрешим равенство относительно q . В результате имеем

$$q = \frac{t - m}{\mu} + \frac{v\sigma \left(v\sigma \pm 2\sqrt{t\mu} \sqrt{1 + \frac{v^2\sigma^2 - 4t\mu}{4t\mu}} \right)}{2\mu^2} = \frac{t}{\mu} \pm \frac{v\sigma\sqrt{t\mu}}{\mu^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right).$$

Подставляя найденное значение $n = ql + r$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_t > n) &= \mathbf{P}\left(\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \geq \frac{r}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \pm lv + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \geq \pm lv + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) \rightarrow \Phi(v). \end{aligned}$$

Здесь следует выбрать знак минус, так как только в этом случае в обеих частях полученного соотношения будут стоять возрастающие по v функции. Так как $\Phi(v)$ непрерывна, то получаем

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \geq -lv\right) \rightarrow \Phi(v) = 1 - \Phi(-v)$$

или

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma l\sqrt{t\mu^{-3}}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v).$$

□

3.4 Альтернирующий процесс восстановления

При изучении альтернирующего процесса восстановления нас будет интересовать асимптотическое поведение средних чисел поломок и восстановлений в промежутке $[0, t]$, при $t \rightarrow \infty$.

Обозначим $N_0(t)$ – количество моментов поломки, попавших в промежуток $[0, t]$, а $N_1(t)$ – количество моментов окончания ремонта (восстановления) на том же промежутке, т.е.

$$N_0(t) = \min\{k \geq 0 : S_{2k} > t\}, \quad N_1(t) = \min\{k \geq 0 : S_{2k+1} > t\}.$$

Положим $V_i(t) = \mathbf{E}N_i(t)$, $i = 0, 1$. Пусть $F_0(t)$ – распределение времени ремонта, а $F_1(t)$ – распределение времени безотказной работы элемента.

Тогда $V_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}\{N_i(t) > r\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{2k+i} \leq t\}$.

Поэтому

$$V_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{2k} \leq t\} = 1 + F_0 * F_1 * + (F_0 * F_1)^{2*} + \dots = U_3(t),$$

$$V_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{2k+1} \leq t\} = F_0 + F_0 * (F_1 * F_0) + F_0 * (F_1 * F_0)^{2*} + \dots = F_0 * U_3(t),$$

где

$$U_3(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_0 * F_1)^{n*}(t).$$

Обе полученные функции являются свертками функции U_3 с некоторыми функциями распределения (случайных величин $0, T_0$ соответственно), а значит, верно следующее утверждение.

Теорема 13. Для функций восстановления $V_0(t)$ и $V_1(t)$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_0(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_1(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_3(t)}{t}.$$

Доказательство. Для $V_0(t)$ утверждение очевидно, так как это функция восстановления для простого процесса восстановления с распределением промежутков $F = F_0 * F_1$. Докажем его для функции $V_1(t)$. Мы знаем, что $V_1(t) = F_0 * U_3(t)$, следовательно, $V_1(t) \leq U_3(t)$ и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{V_1(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_3(t)}{t}.$$

Далее,

$$V_1(t) \geq \int_0^{t-\varepsilon t} F_0(t-y) dU_3(y) \geq F_0(\varepsilon t) U_3(t-\varepsilon t),$$

так как $F_0(x)$ – неубывающая функция.

Следовательно,

$$\frac{V_1(t)}{t} \geq \frac{U_3(t-\varepsilon t)}{t-\varepsilon t} (1-\varepsilon) F_0(\varepsilon t),$$

причем это верно для любых $0 < \varepsilon < 1$.

Поэтому

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{V_1(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_3(t)}{t}.$$

Таким образом получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_1(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_3(t)}{t}.$$

□

В силу этой теоремы, а также элементарной теоремы восстановления, примененной к $U_3(t)$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_0(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_1(t)}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}(T_0 + T_1)}.$$

Теорема 14. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i и дисперсии σ_i^2 соответственно, $i = 0, 1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$V_0(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2}, \quad V_1(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - \frac{\mu_0}{\mu},$$

где $\mu_0 + \mu_1 = \mu$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Доказательство. Функция $V_1(t)$ является решением уравнения восстановления

$$V_1 = F_0 + F * V_1, \quad \text{где } F = F_1 * F_0.$$

Положим $Z_3(t) = V_1(t) - \frac{t}{\mu}$. Функция $Z_3(t)$ является решением уравнения восстановления $Z_3 = \tilde{z}_3 + F * Z_3$, для

$$\tilde{z}_3(t) = Z_3(t) - F * Z_3(t) = V_0(t) - \frac{t}{\mu} - F * V_0(t) + F * \frac{t}{\mu} = F_0(t) - 1 + \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(y)) dy,$$

поэтому

$$\int_0^\infty \tilde{z}_3(t) dt = \int_0^\infty (F_0(t) - 1) dt + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy \right) dt.$$

Второе слагаемое, как и в теореме 6, равно $\frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}$, а первое

$$\int_0^\infty (F_0(t) - 1) dt = -\mu_0.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \tilde{z}_3(t) dt = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} - \mu_0.$$

Далее,

$$|\tilde{z}_3| = \left| F_0 - 1 + \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy \right| \leq \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F(y)) dy + (1 - F_0).$$

Оба слагаемых здесь являются интегрируемыми и монотонно невозрастающими функциями, поэтому сумма непосредственно интегрируема по Риману. Таким образом мы мажорировали функцию \tilde{z}_3 непосредственно интегрируемой функцией, а значит, и сама функция \tilde{z}_3 является непосредственно интегрируемой по Риману.

Теперь мы можем воспользоваться теоремой восстановления в альтернативной форме, из которой следует, что

$$V_1(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \tilde{z}_3(t) dt = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - \frac{\mu_0}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Случай функции V_0 рассматривается аналогично с заменой $F_0(t)$ на 1. □

Теорема 15. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i $i = 0, 1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_0(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad \frac{N_1(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ п.н.},$$

где $\mu = \mu_0 + \mu_1$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$\{N_i(t) > k\} = \{S_{2k+i} \leq t\}.$$

Из этого соотношения (аналогично доказательству теоремы 7) следует, что если $n^{-1}S_{2n+i} \rightarrow \mu$ п.н., то $t^{-1}N_i(t) \rightarrow \mu^{-1}$ п.н., $i = 0, 1$.

Установление пределов $n^{-1}S_{2n+i}$ проводится аналогично соответствующему утверждению теоремы 11, поэтому оно опускается. \square

Теорема 16. Если $F_i(x)$ имеют соответственно математические ожидания μ_i и дисперсии σ_i^2 , $i = 0, 1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_i(t) - t\mu^{-1}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \xrightarrow{d} \xi_0 \sim N(0, 1),$$

где $\mu_0 + \mu_1 = \mu$, $\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$P(N_i(t) > n) = P(S_{2n+i} \leq t).$$

Действуя также, как в теореме 12, можем получить центральную предельную теорему для S_n :

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{q}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $n = 2q + r$, $0 \leq r \leq 1$, т.е. $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Дальнейшие рассуждения, аналогичные приведенным в теореме 12, опускаются. \square

3.5 Периодический процесс восстановления с запаздыванием

Обозначим через $W_1(t)$ функцию восстановления для периодического процесса с запаздыванием. Тогда

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq t\} = G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * \dots * G_{k-1} + \\ &+ G_0 * \dots * G_{k-1} * (F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * F_2 * \dots * F_l + F_1 * F_2 * \dots * F_l * F_1 + \dots) = \\ &= G_0 + G_0 * G_1 + \dots + G_0 * \dots * G_{k-2} + G_0 * \dots * G_{k-1} * W, \end{aligned} \quad (15)$$

где $W(t)$ — функция восстановления, соответствующая периодическому процессу без запаздывания. Как и в случае с периодическим процессом восстановления, обозначим $H = F_1 * \dots * F_l$.

Теорема 17. *Существует*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_1(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{lU_2(t)}{t},$$

где $U_2(t)$ имеет вид (10).

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 5, 9, поэтому его опускаем. \square

Отметим, что в соответствии с (11) верно равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_1(t)}{t} = \frac{l}{\mathbb{E}(T_1 + \dots + T_l)}.$$

Теорема 18. *Если $H(x)$ – неарифметическое распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i и дисперсии σ_i^2 , $i = 1, \dots, l$, а $G_j(x)$ имеют математические ожидания ν_j , $j = 0, 1, \dots, k-1$, то при $t \rightarrow \infty$*

$$W_1(t) - \frac{lt}{\mu} \rightarrow l \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} + \frac{(k-1)\mu - l\nu - ((l-1)\mu_1 + (l-2)\mu_2 + \dots + \mu_{l-1})}{\mu}, \quad (16)$$

где $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_l$, $\nu = \nu_0 + \dots + \nu_{k-1}$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_l^2$.

Доказательство. Сначала выпишем уравнение восстановления для функции $W_1(t)$, оно имеет вид

$$W_1 = z_4 + H * W_1,$$

где

$$\begin{aligned} z_4 &= W_1 - H * W_1 = G_0 + \dots + G_0 * \dots * G_{k-2} + G_0 * \dots * G_{k-1} * U_2 * z_2 \\ &\quad - H * G_0 + \dots - H * G_0 * \dots * G_{k-2} - H * G_0 * \dots * G_{k-1} * U_2 * z_2 = \\ &= (G_0 + \dots + G_0 * \dots * G_{k-2}) * (1 - H) + G_0 * \dots * G_{k-1} * z_2. \end{aligned}$$

Напомним, что $z_2 = W - H * W = 1 + F_1 + F_1 * F_2 + \dots + F_1 * \dots * F_{l-1}$.

Обозначим $Z_4(t) = W_1(t) - lt\mu^{-1}$. Функция $Z_4(t)$ является решением уравнения восстановления $Z_4 = \tilde{z}_4 + H * Z_4$ для

$$\tilde{z}_4(t) = Z_4(t) - H * Z_4(t) = W_1(t) - \frac{lt}{\mu} - H * W_1(t) + H * \frac{lt}{\mu} = z_4 + H * \frac{lt}{\mu} - \frac{lt}{\mu}$$

$$= z_4 - \frac{l}{\mu} \int_0^t (1 - H(y)) dy = (z_4 - l) + \frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy,$$

и

$$\int_0^\infty \tilde{z}_4(t) dt = \int_0^\infty (z_4(t) - l) dt + \int_0^\infty \left(\frac{l}{\mu} \int_t^\infty (1 - H(y)) dy \right) dt.$$

Второе слагаемое считается аналогично соответствующему слагаемому в доказательстве теоремы 6, и оно равно $l \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}$.

Вычислим первое слагаемое

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (z_4(t) - l) dt &= \int_0^{\infty} ((1 - H * G_0) + (1 - H * G_0 * G_1) + \dots + (1 - H * G_0 * \dots * G_{k-2}) \\ &\quad - ((1 - G_0) + \dots + (1 - G_0 * \dots * G_{k-2})) - (l - G_0 * \dots * G_{k-1} * z_2)) dt \\ &= (\mu + \nu_0) + (\mu + \nu_0 + \nu_1) + \dots + (\mu + \nu_0 + \dots + \nu_{k-2}) - (\nu_0 + \dots + (\nu_0 + \dots + \nu_{k-2})) \\ &\quad - (\nu + (\nu + \mu_1) + (\nu + \mu_1 + \mu_2) + \dots + (\nu + \mu_1 + \dots + \mu_{l-1})) \\ &= (k - 1)\mu - l\nu - (l - 1)\mu_1 - \dots - \mu_{l-1}. \end{aligned}$$

Итого получаем

$$\int_0^{\infty} \tilde{z}_4(t) dt = l \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} + (k - 1)\mu - (l\nu + (l - 1)\mu_1 + \dots + \mu_{l-1}). \quad (17)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_4| &= \left| z_4 - l + \frac{l}{\mu} \int_t^{\infty} (1 - H(y)) dy \right| \leq \frac{l}{\mu} \int_t^{\infty} (1 - H(y)) dy + |z_4 - l| \\ &\leq \frac{l}{\mu} \int_t^{\infty} (1 - H(y)) dy + (1 - G_0(t)) + \dots + (1 - G_0 * \dots * G_{k-1}) \\ &\quad + (1 - H * G_0) + \dots + (1 - H * G_0 * \dots * G_{k-1}) + (l - G_0 * \dots * G_{k-1} * z_2) \\ &= \frac{l}{\mu} \int_t^{\infty} (1 - H(y)) dy + (1 - G_0(t)) + \dots + (1 - G_0 * \dots * G_{k-1}) \\ &\quad + (1 - H * G_0(t)) + \dots + (1 - H * G_0 * \dots * G_{k-1}) \\ &\quad + (1 - G_0 * \dots * G_{k-1} * F_0) + \dots + (1 - G_0 * \dots * G_{k-1} * F_0 * \dots * F_{l-1}). \end{aligned}$$

Все слагаемые в последнем выражении являются монотонно невозрастающими интегрируемыми функциями, поэтому вся сумма тоже, и, следовательно, эта сумма является непосредственно интегрируемой по Риману функцией. Таким образом мы мажорировали функцию \tilde{z}_4 непосредственно интегрируемой функцией, а значит, и сама функция \tilde{z}_4 является непосредственно интегрируемой по Риману. Значит, мы можем воспользоваться теоремой восстановления в альтернативной форме, из которой с использованием (17) получаем, что справедливо (16). \square

Теорема 19. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i , $i = 1, \dots, l$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{l}{\mu} \text{ п.н.}, \quad (18)$$

где $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_l$.

Доказательство. Сначала найдем предел с вероятностью 1 отношения $n^{-1}S_n$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого запишем при $n > k$

$$S_n = S_{k-1} + \hat{S}_q + \xi_r^q,$$

где, как в теореме 11, $\hat{S}_q = \sum_{i=1}^q \eta_i$, $\eta_i = \sum_{j=1}^l T_{(i-1)l+j}$, $\xi_r^q = \sum_{i=1}^r T_{ql+i}$, $q = [(n - k + 1)/l]$. Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{k-1}}{n} + \frac{q}{n} \cdot \frac{\hat{S}_q}{q} + \frac{\xi_r^q}{n}. \quad (19)$$

Поскольку $q \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, величины η_i , $i \geq 1$, обладают конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\eta_i = \mu$, то $q^{-1}\hat{S}_q \rightarrow \mu$ с вероятностью 1 в силу УЗБЧ для последовательности независимых одинаково распределенных величин. Так как число k конечно, $n^{-1}S_{k-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ п.н. Далее, $\xi_r^q \leq \eta_{q+1} = \hat{S}_{q+1} - \hat{S}_q$, поэтому $n^{-1}\xi_r^q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, $n^{-1}q \rightarrow l^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, (19) влечет за собой справедливость соотношения $n^{-1}S_n \rightarrow \mu/l$ при $n \rightarrow \infty$.

Снова воспользуемся равенством $\{N_t > n\} = \{S_n \leq t\}$, благодаря которому, как при доказательстве теоремы 7, устанавливается справедливость (18). \square

Теорема 20. Если $F_i(x)$ имеют математические ожидания μ_i и дисперсии σ_i^2 , $i = 1, \dots, l$, а $G_j(x)$ имеют математические ожидания ν_j , $j = 0, \dots, k-1$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t - tl\mu^{-1}}{\sigma l \sqrt{t\mu^{-3}}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1),$$

где $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_l$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_l^2$.

Доказательство. Как показывает теорема 8, наличие запаздывания не влияет на справедливость ЦПТ для S_n , которая в данном случае формулируется следующим образом

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}} \leq v\right) \rightarrow \Phi(v) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $n - k + 1 = lq + r$, $0 \leq r < l$, т.е. $q = \lfloor \frac{n-k+1}{l} \rfloor$. Этот факт доказывается аналогично теореме 12 для периодического процесса восстановления.

Возвращаясь к N_t , можно записать

$$\mathbf{P}(N_t > n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}} \leq \frac{t - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}}\right).$$

Небольшое отличие от доказательства теоремы 12 заключается в том, что теперь надо учитывать не только $m = \sum_{j=1}^r \mu_j$, но и $\nu = \sum_{j=0}^{k-1} \nu_j$.

Поэтому надо предполагать, что n при $t \rightarrow \infty$ меняется так, что выполняется

$$\frac{t - \mathbf{E}S_n}{\sigma\sqrt{q}} = \frac{t - a - q\mu}{\sigma\sqrt{q}} = v$$

где $a = m + \nu$, кроме того, $n = k - 1 + lq + r$, а v фиксировано. Таким образом, получаем

$$q = \frac{t - a}{\mu} + \frac{(v\sigma)^2}{2\mu^2} \pm \frac{v\sigma\sqrt{4(t-a)\mu + (v\sigma)^2}}{2\mu^2} = \frac{t}{\mu} \pm \frac{v\sigma\sqrt{t\mu}}{\mu^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Подставляя найденное значение n , путем несложных преобразований получаем требуемый результат. \square

Отметим, что в работе [5] для некоторого варианта периодических процессов восстановления с запаздыванием (которые там называются (k_1, k_2) -процессами) ЦПТ была доказана в предположении существования дисперсий у всех случайных величин X_i , так как там проверялось выполнение условия Линдеберга.

4 Применения

Для приложений будет полезно ввести еще одно понятие – процессы восстановления с доходами, т.е. то, что в англоязычной литературе называют renewal-reward processes. Отметим, что такие процессы в книге А.Боровкова [2] называются обобщенными процессами восстановления.

4.1 Процессы восстановления с доходами

Определение 6. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных векторов (T_i, R_i) , $i \geq 1$. Тогда $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} R_i$ называется *процессом восстановления с доходами*. Здесь, как и раньше, полагаем $N_t = \min\{n : \sum_{i=1}^n T_i > t\}$.

Нетрудно проверить следующее утверждение

Лемма 3. Пусть $\mu = \mathbf{E}T_1 < \infty$, $\delta = \mathbf{E}R_1 < \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{t} = \frac{\delta}{\mu} \quad \text{n.н.} \quad (20)$$

Доказательство. Переписав левую часть (20), в виде

$$\frac{Y_t}{t} = \frac{N_t}{t} \cdot \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} R_i, \quad (21)$$

заметим, что из усиленного закона больших чисел для простого процесса восстановления вытекает $t^{-1}N_t \rightarrow \mu^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью 1. Так как $N_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и $n^{-1} \sum_{i=1}^n R_i \rightarrow \delta$ при $n \rightarrow \infty$, второй множитель в правой части (21) стремится к δ при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью 1, что немедленно приводит к требуемому результату (20). \square

Лемма 4. Для процесса Y_t , $t \geq 0$, справедлив аналог теоремы Блеквелла, т.е. для любого h при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}Y_{t+h} - \mathbf{E}Y_t \rightarrow h \frac{\delta}{\mu}. \quad (22)$$

Доказательство. Очевидно, что в силу тождества Вальда имеет место равенство $\mathbf{E}Y_t = \delta U(t)$, где $U(t)$ – функция восстановления простого процесса, порожденного последовательностью $\{T_i\}_1^\infty$, а $\delta = \mathbf{E}R_1$. В силу справедливости теоремы Блеквелла для $U(t)$, соотношение (22) выполнено. \square

Далее нам понадобится понятие обобщенного процесса восстановления с доходами.

Определение 7. Пусть $\{T_i\}_1^\infty$ – периодическая последовательность с периодом l_1 неотрицательных независимых случайных величин, а $\{R_i\}_1^\infty$ – не зависящая от нее периодическая последовательность с периодом l_2 независимых случайных величин. Тогда $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} R_i$ называется обобщенным периодическим процессом восстановления с доходами.

В этом определении, как и ранее, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ неотрицательны, а $N_t = \min\{n : S_n > t\}$ – число восстановлений на отрезке $[0, t]$. При этом могут учитываться не только доходы, но и потери, т.е. величины R_i не обязаны быть неотрицательными. Обозначим $\mu = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{l_1} T_{jl_1+i}$, $\delta = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{l_2} R_{jl_2+i}$, $j \geq 0$. Для применений важен следующий результат, представляющий собой аналог усиленного закона больших чисел.

Теорема 21. *Для обобщенного периодического процесса восстановления с доходами верно утверждение*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{t} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta}{\mu} \quad \text{п.н. при } t \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Доказательство. Действуем так же, как в лемме 3, т.е. запишем

$$\frac{Y_t}{t} = \frac{N_t}{t} \cdot \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} R_i.$$

Согласно теореме 11 с вероятностью 1 имеет место соотношение $t^{-1}N_t \rightarrow \mu^{-1}l_1$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, $N_t \rightarrow \infty$ п.н. при $t \rightarrow \infty$. Значит, достаточно найти, чему равен предел $n^{-1} \sum_{i=1}^n R_i$. Для этого при $n = ql_2 + r$, $0 \leq r < l_2$, воспользуемся представлением

$$\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{j=1}^q \zeta_j + \gamma_r^q, \quad \text{где } \zeta_j = \sum_{i=1}^{l_2} R_{(j-1)l_2+i}, \quad \gamma_r^q = \sum_{i=1}^r R_{ql_2+i}.$$

Ясно, что ζ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины, обладающие конечным математическим ожиданием δ , кроме того, $q \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для них справедлив усиленный закон больших чисел, т.е. с вероятностью 1 имеет место соотношение $q^{-1} \sum_{j=1}^q \zeta_j \rightarrow \delta$ при $q \rightarrow \infty$, а $qn^{-1} \rightarrow l_2^{-1}$. Осталось проверить, что $n^{-1}\gamma_r^q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $|\gamma_r^q| \leq \sum_{i=1}^{l_2} |R_{ql_2+i}| = \hat{\zeta}_{q+1}$. Величины $\hat{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{l_2} |R_{(j-1)l_2+i}|$, $j \geq 1$, неотрицательны, одинаково распределены и обладают конечным математическим ожиданием, т.е. для них справедлив усиленный закон больших чисел. Значит,

$$\frac{1}{n} \hat{\zeta}_{q+1} < \frac{1}{q} \hat{\zeta}_{q+1} = \frac{q+1}{q} \cdot \frac{1}{q+1} \sum_{i=1}^{q+1} \hat{\zeta}_i - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \hat{\zeta}_i \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает справедливость (23), что и заканчивает доказательство. \square

В том случае, когда величины R_i также неотрицательны и не зависят от последовательности $\{T_i\}$, нетрудно получить аналог элементарной теоремы восстановления.

Теорема 22. *Существует*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Y_t}{t} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta}{\mu}. \quad (24)$$

Доказательство. Поскольку слагаемые R_i неотрицательны, верны следующие неравенства

$$\sum_{j=1}^{[N_t/l_2]} \zeta_j \leq Y_t < \sum_{j=1}^{[N_t/l_2]+1} \zeta_j, \quad (25)$$

где $[a]$, как и раньше означает целую часть a , при этом $\zeta_j = \sum_{i=1}^{l_2} R_{(j-1)l_2+i}$. В силу независимости N_t от последовательности $\{R_i\}_1^\infty$, а значит, и от $\{\zeta_j\}_1^\infty$, можно применить тождество Вальда для подсчета математических ожиданий сумм, ограничивающих Y_t слева и справа в (25). Получим

$$\mathbf{E}[N_t/l_2]\delta \leq \mathbf{E}Y_t < \mathbf{E}([N_t/l_2] + 1)\delta,$$

где $\delta = \mathbf{E}\zeta_j$, $j \geq 1$. Далее, имеем

$$\frac{N_t}{l_2} - 1 < \left[\frac{N_t}{l_2} \right] < \left[\frac{N_t}{l_2} \right] + 1 \leq \frac{N_t}{l_2} + 1,$$

откуда немедленно вытекает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}Y_t}{t} = \frac{\delta}{l_2} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}N_t}{t}.$$

Применение теоремы 9 дает нужный результат (24). □

4.2 Оптимизация систем управления запасами

Вернемся к системам хранения или управления запасами. Ниже мы рассмотрим три модели производства-потребления с использованием обобщенных процессов восстановления.

Модель 1. Предположим, что производство продукции идет с постоянной скоростью c , а требования на хранимую продукцию поступают в соответствии с обобщенным периодическим процессом восстановления $\{T_i\}$ с периодом l_1 . Размеры поступающих требований образуют периодическую последовательность $\{R_i\}$ с периодом l_2 . При этих условиях уровень запасов Z_t в момент t имеет вид $Z_t = ct - Y_t$, если считать дополнительно, что неудовлетворенный спрос может откладываться и удовлетворяться за счет будущего производства. Таким образом, данная модель может учитывать сезонный характер спроса.

Согласно теореме 21 имеем с вероятностью 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{t} = c - \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta}{\mu},$$

а в силу теоремы 22 то же самое значение принимает $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbf{E}Z_t$, т.е. средние издержки в единицу времени при длительном функционировании системы.

Если предположить, что $c - \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta}{\mu} > 0$, можно немедленно сделать вывод, что $Z_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это, в свою очередь, означает, что с положительной вероятностью дефицит может никогда не наступить.

При дополнительных предположениях можно также оценить снизу вероятность $\varphi(0, t)$ отсутствия дефицита на заданном промежутке $[0, t]$, когда нет никаких запасов в начале функционирования системы. Очевидно, что дефицит может возникать только в моменты поступления требований R_i , $i = 1, 2, \dots$. За промежуток от поступления $(i-1)$ -го требования до поступления i -го требования бывает произведено количество товара cT_i . Значит, отсутствие дефицита за время t означает

$$\min_{k \leq N_t} V_k > 0, \quad \text{где} \quad V_k = \sum_{i=1}^k (cT_i - R_i),$$

здесь N_t – это число требований, поступивших в рассматриваемый промежуток времени. Таким образом,

$$\varphi(0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t = k) P(\min_{i \leq k} V_i > 0).$$

Поскольку $\{\min_{i \leq k} V_i > 0\} \supset \cap_{i=1}^k \{cT_i - R_i > 0\}$, можно потребовать, чтобы величина $c = \max_{i \leq l_2} c_i$. Величины c_i удовлетворяют условию $P(c_i T_i - R_i > 0) = 1 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Ясно, что тогда

$$\varphi(0, t) > \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t = k) (1 - \varepsilon)^k = E(1 - \varepsilon)^{N_t}.$$

Найдем, чему равна правая часть этого неравенства, если N_t является пуассоновским процессом, т.е. промежутки между поступлениями требований одинаково распределенные показательные случайные величины с параметром λ . Мы получим

$$\varphi(0, t) > \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-t\lambda\varepsilon}.$$

Интересно отметить, при фиксированных λ и ε , устремив $t \rightarrow \infty$, мы получаем лишь то, что следовало из УЗБЧ, т.е. вероятность отсутствия дефицита на всей временной оси положительна. Иначе говоря, оценка достаточно грубая. Однако при фиксированных t и λ выбор малого ε обеспечивает близость рассматриваемой вероятности к единице.

Модель 2 является дуальной к предыдущей. А именно, предполагается, что поставки случайны, а потребление идет с постоянной скоростью c . Тогда уровень запасов в момент t равен $\hat{Z}_t = -Z_t = Y_t - ct$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \hat{Z}_t = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta}{\mu} - c$$

с вероятностью 1. Такой же предел будет и у $t^{-1} E \hat{Z}_t$. Для этой модели также нетрудно произвести оценки вероятности отсутствия дефицита.

Модель 3. В отличие от двух предыдущих случаев как пополнение запасов, так и потребление описывается обобщенным периодическим процессом восстановления с доходами. Таким образом, уровень запасов в момент t равен $Z_t = X_t - Y_t$, где $X_t = \sum_{i=1}^{N_t^1} C_i$, а $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t^2} R_i$. Здесь N_t^1 и N_t^2 – это периодические процессы восстановления с периодами соответственно l^1 и l^2 , задающие моменты поступления пополнений и требований на хранимый товар, а C_i и R_i – размеры i -го пополнения и требования. Если последовательности $\{C_i\}$ и $\{R_i\}$ независимые между собой и периодические с периодами m^1 и m^2 , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{X_t}{t} - \frac{Y_t}{t} \right) = \frac{m^1}{l^1} \cdot \frac{\delta_1}{\mu_1} - \frac{m^2}{l^2} \cdot \frac{\delta_2}{\mu_2}.$$

Здесь $\mu_k = E \sum_{i=1}^{l^k} T_i^k$, $k = 1, 2$, а T_i^k – промежутки между поступлениями для k -го процесса, в то время как $\delta_1 = \sum_{i=1}^{m^1} E C_i$ и $\delta_2 = \sum_{i=1}^{m^2} E R_i$.

5 Направления дальнейших исследований

Итак, были рассмотрены различные обобщения процессов восстановления и для них доказаны аналоги элементарной теоремы восстановления, закон больших чисел и центральная

предельная теорема. Следующий шаг – уточнение ряда полученных результатов в предположении о существовании у распределений абсолютно непрерывной компоненты (см., например, [12]), а также доказательство функциональной предельной теоремы и сильного принципа инвариантности. Эти результаты будут опубликованы в другой статье.

В данной работе мы также рассмотрели одно из возможных направлений применения обобщенных процессов восстановления, а именно, теорию запасов. В качестве критерия оценки успешности работы системы были выбраны издержки (или доходы) в единицу времени при ее длительном функционировании. Возможен и другой выбор целевой функции, например, использование суммарных дисконтированных издержек в случае конечного или бесконечного горизонта планирования, как в [4], а также нахождение асимптотически оптимальных управлений, как в [15].

Введенные процессы могут быть использованы и в теории страхования, например, для обобщения моделей Крамера-Лундберга и Спарре Андерсена, в частности, для исследования случайного поступления премий, рассматривавшегося в [23] (см. также [17], [6]).

Список литературы

- [1] *Афанасьева Л.Г., Буллинская Е.В.*, Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами, М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [2] *Боровков А.А.*, Теория вероятностей, М.: Либроком, 2009.
- [3] *Буллинская Е.В.*, О стоимостном подходе в страховании // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2003, т. 10, в. 2, с.276-286.
- [4] *Буллинская Е.В., Шахгильдян К.Д.*, Системы управления запасами с ограничениями // Современные проблемы математики и механики, 2013, т. 8, № 3, с. 19–30.
- [5] *Вайнштейн И.И., Михальченко Г.Е., Вайнштейн В.И.* Асимптотика распределения числа восстановлений в процессе восстановления порядка (k_1, k_2) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф.Решетнева, 2012, вып. 2(42), с. 16–18.
- [6] *Королев В.Ю., Бенинг В., Шоргин С.*, Математические основы теории риска, М.: Физматлит, 2007.
- [7] *Прабху Н.* Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984.
- [8] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984.
- [9] *Afanaseva L., Bulinskaya E.*, Multi-supplier systems with seasonal demand. In: B.Vallespir and T.Alix (eds.) Advances in Production Management Systems: New Approaches. Proceedings of the IFIP WG 5.7, Springer, 2010, p. 267–274.
- [10] *Arrow K., Harris T., Marschak J.*, Optimal inventory policy // Econometrica, 1951, v. 11, p. 250–252.
- [11] *Arrow K., Karlin H., Scarf H.* (eds.), Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford, California: Stanford University Press, 1958.

- [12] *Asmussen S.*, Applied Probability and Queues. 2nd ed. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [13] *Bellman R.*, Dynamic Programming. Princeton, New York: Princeton University Press, 1957.
- [14] *Bellman R., Glicksberg I. and Gross O.*, On the optimal inventory equation // Management Science, 1955, v. 2, p. 83–104.
- [15] *Bulinskaya E.*, Optimal and asymptotically optimal control for some inventory models. In: A.N.Shiryaev et al. (eds.) Prokhorov and Contemporary Probability Theory, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 33, chapter 8, Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [16] *Cox D.R.*, Renewal Theory, Methuen and Company, Ltd. 1962.
- [17] *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.*, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [18] *Feller W.*, On the integral equation of renewal theory // Annals of Mathematical Statistics, 1941, v. 12, p. 722–727.
- [19] *Feller W.*, Fluctuation theory of recurrent events // Transactions of American Mathematical Society, 1949, v. 67, p. 98–119.
- [20] *Mitov K.V., Omey E.*, Renewal Processes, Springer, 2014.
- [21] *Smith W. L.*, Renewal theory and its ramifications // Journal of Royal Statistical Society, Series B, 1958, v. 20, p. 243–302.
- [22] *Smith W. L.*, On the cumulants of renewal processes // Biometrika, 1959, v. 46, p. 1–29.
- [23] *Zinchenko N. M.*, Strong limit theorems for the risk process with stochastic premiums // Markov Processes and Related Fields, 2014, v. 20, № 3, p. 527–544.

Условные границы мер риска в финансовой математике

Григорьева М.А.¹

Получены границы мер риска VaR, CVaR и MINVaR для стандартизированных случайных потерь при различных дополнительных условиях.

1 Введение

1.1 Историческая справка

Практически ни у кого в финансовой сфере уже не вызывает сомнения необходимость управления финансовыми рисками. Основная причина этого заключается в том, что, не измеряя и не управляя ими, финансовые учреждения могут потерять значительную часть своего капитала или обанкротиться. Важным международным нормоустанавливающим органом, активно влияющим на процесс банковского регулирования и надзора, является Базельский комитет по банковскому надзору. Базельский Комитет по банковскому надзору был основан в 1974 году при Банке международных расчетов. В него входят центральные банки крупнейших государств². Комитет разрабатывает рекомендации и стандарты Банковского надзора, применяемые органами банковского регулирования и надзора разных стран.

Существенным шагом в его работе стала разработка системы оценки достаточности капитала банков «Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала» в 1988 году (Первое Базельское соглашение, Базель I). В 1996 году Базельский комитет внес поправку к Базельскому соглашению для обозначения VaR (Value at Risk; стоимость, подверженная риску) в качестве эталона для расчета рыночного риска. По сути, VaR отражает размер возможного убытка, который не будет превышен в течение некоторого периода времени с некоторой вероятностью (которую еще называют уровнем допустимого риска). Эта мера была придумана в J.P. Morgan в конце 1980-х годов в качестве инструмента для измерения подверженности портфеля потерям на бирже. Также

¹Григорьева Марина Александровна, 011235813@inbox.ru, студентка, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

²Членами комитета являются управляющие центральных банков Аргентины, Австралии, Бельгии, Бразилии, Великобритании, Германии, Гонконга, Индии, Индонезии, Испании, Италии, Канады, Китая, Люксембурга, Малайзии, Мексики, Нидерландов, Польши, России, Саудовской Аравии, США, Сингапура, Таиланда, Турции, Франции, Швеции, Швейцарии, ЮАР, Южной Кореи и Японии, а также президент Европейского центрального банка и президент Федерального резервного банка Нью-Йорка. Управляющие еще 19 центральных банков присутствуют на общих собраниях в качестве наблюдателей.

в 1994 была опубликована методика и дан свободный доступ к оценкам необходимых базовых параметров для вычисления VaR. Два года спустя, методология была выделена в самостоятельный бизнес некоммерческой теперь части RiskMetrics Group [10], [8].

Наличие недостатков у меры VaR, очень широко используемой на практике, вызвало необходимость рассмотрения нового класса мер. Начало систематической разработке статических мер риска было положено в работах Артцнера, Делбаена, Эбера и Хита [1] и [2], где свойства любой приемлемой для задач финансового управления меры риска были описаны с помощью нескольких аксиом: монотонности, субаддитивности (обеспечивает возможность снижения уровня риска посредством диверсификации), положительной однородности и инвариантности относительно сдвига. Мера, удовлетворяющая всем этим свойствам, называется когерентной. VaR не является когерентной мерой, в частности, эта мера не обладает свойствами субаддитивности и выпуклости.

Одним из наиболее известных представителей когерентных мер риска является мера CVaR (Conditional Value-at-Risk), упоминавшаяся в [1, 2] под названием TailVaR, и разносторонне исследованная в работах Урясьева и Рокфеллара ([14] - [17]). CVaR вычисляется на основе VaR и определяется как средний размер убытков в случае, если они превысят значение VaR. Когерентность меры CVaR была доказана Пфлугом в 2000 году в работе [13]. В 2012 году Базельский комитет выпустил «Fundamental review of the trading book - consultative document» – консультативный документ, содержащий рекомендацию переходить к использованию CVaR вместо VaR. Поиски наилучшей меры риска не прекращаются и по сей день. А.С.Черный ввел меру MINVaR как частный случай когерентной меры WVaR [4, 5, 6]. В работе [4] он приводит некоторые аргументы в пользу использования WVaR вместо CVaR. Мера MINVaR определяется как среднее худшее наблюдение среди фиксированного количества наблюдений значений потерь. Две различные эмпирические оценки такой величины исследованы Орловым в работе [20]. Некоторые свойства MINVaR и связанные с ними задачи рассмотрены в работе Сверчкова [21].

В связи с прямым практическим применением в области финансов и существенным влиянием на нее, изучение свойств мер риска широко востребовано. В этой работе исследованы границы значений трех упомянутых мер риска при некоторой известной дополнительной информации.

Заметим, что оценка MINVaR технически значительно проще оценок других мер, поэтому интервальные оценки мер, полученные на ее основе, могут быть полезны на практике.

1.2 Основные определения и факты

Исторически все рассматриваемые меры риска определены через величины потерь. Обозначив потери за X , запишем определения интересующих мер риска ($x(u) = F_X^{-1}(u)$, $\varphi = I[F \geq \alpha]$):

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf\{x | F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha), \\ CVaR_\alpha(X) &= \mathbf{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] = \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} x dF(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 x(F) dF = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 x(F) \varphi dF, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} MINVaR_n(X) &= \mathbf{E}[\max\{X_1, \dots, X_n\}] = \mathbf{E}[X_{(n:n)}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF^n(x) = \int_0^1 x(F) dF^n = \int_0^1 x(F)nF^{n-1} dF. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом (1) верно для непрерывных распределений, а (2) всегда.

Эти же определения в терминах доходов $Y = -X$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(Y) &= -F_Y^{-1}(1 - \alpha), \\ CVaR_\alpha(Y) &= -\mathbf{E}[Y|Y < -VaR_\alpha(Y)] = \\ &= -\frac{1}{1 - \alpha} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(Y)} y dF(y) = -\frac{1}{1 - \alpha} \int_0^{1-\alpha} y(F) dF, \\ MINVaR_n(X) &= -\mathbf{E}[\min\{Y_1, \dots, Y_n\}] = -\mathbf{E}[Y_{(1:n)}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y d(1 - (1 - F(y))^n) = \int_0^1 y(F)n(1 - F)^{n-1} dF. \end{aligned}$$

Определение. Когерентной мерой риска называется мера $\rho : X \rightarrow R$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. положительная однородность: $\forall \lambda > 0 \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$;
2. субаддитивность: $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$;
3. монотонность: $\forall X_1 \leq X_2 \quad \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$;
4. инвариантность относительно сдвига: $\forall a \in R \quad \rho(X + a) = \rho(X) + a$.

Согласно этому определению, $CVaR_\alpha(X)$ и $MINVaR_n(X)$ являются когерентными, что доказано в работах [13] и [4] соответственно. $VaR_\alpha(X)$ когерентной мерой не является [2].

1.3 Постановка задачи и основные результаты

В работе рассмотрены несколько классов задач:

- определение границ значений меры риска при известных первых двух моментах и, возможно, известном промежутке значений потерь
- определение границ значений одной меры риска при известных первых двух моментах и известном значении ее же с другим параметром
- определение границ значений одной меры риска при известных первых двух моментах и известном значении другой меры риска

В качестве мер риска рассмотрены $VaR_\alpha(X)$, $CVaR_\alpha(X)$ и $MINVaR_n(X)$. В качестве случайной величины использованы значения потерь. Легко проверить, что все три указанные меры обладают свойством $\rho(aX + b) = a\rho(X) + b$ для любого $a > 0$, поэтому без ограничения общности можно решать поставленные задачи относительно случайных величин с $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{D}X = 1$ (которые будем называть стандартизированными). При этом из формул (2) и (3) сразу следует, что $CVaR_\alpha(X) > 0$ и $MINVaR_n(X) > 0$.

Утверждение 1. Если X – стандартизированная случайная величина, то верно неравенство

$$0 < MINVaR_n(X) \leq \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Доказательство правой части неравенства этого утверждения можно найти в [11].

Утверждение 2. (раздел 2.1) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $MINVaR_m(X) = \xi$, то при $n > m$ верны неравенства

$$\begin{aligned} MINVaR_n(X) &\leq \\ &\leq \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi + \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right), \\ MINVaR_n(X) &\geq \\ &\geq \max \left\{ \xi; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi - \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Утверждение 3. (раздел 2.1) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $MINVaR_m(X) = \xi$, то при $n < m$ верны неравенства

$$\begin{aligned} MINVaR_n(X) &\leq \\ &\leq \min \left\{ \xi; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi + \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}, \\ MINVaR_n(X) &\geq \\ &\geq \max \left\{ 0; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi - \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Утверждение 4. (раздел 2.1) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $MINVaR_2(X) = \xi$, то верно неравенство

$$MINVaR_n(X) \leq (n-1)\xi.$$

Следствие 1. (раздел 2.1) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $MINVaR_2(X) = \xi$, то верно неравенство

$$MINVaR_n(X) \leq \min \left\{ (n-1)\xi; \frac{n-1}{n+1} \left(3\xi + \frac{n-2}{2n-1} \sqrt{3(2n-1) \left(\frac{1}{3} - \xi^2 \right)} \right) \right\}.$$

Следствие 2. (раздел 2.1) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $MINVaR_m(X) = \xi$, то при $n = 2$ верно неравенство

$$MINVaR_2(X) \geq \max \left\{ \frac{\xi}{m-1}; \frac{1}{m^2-1} \left((2m-1)\xi - (m-2) \sqrt{\frac{2m-1}{3} \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}.$$

Утверждение 5. (раздел 3.1) Если X – стандартизированная случайная величина, то верно неравенство

$$0 < CVaR_\alpha(X) \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Этот результат без доказательства был представлен в работе [3]. В разделе 3.1 приведено простое доказательство этого утверждения.

Утверждение 6. (раздел 4) Для стандартизированной случайной величины X верны следующие соотношения между $VaR_\alpha(X)$ и $CVaR_\alpha(X)$:

$$-\frac{1-\alpha}{\alpha}CVaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(X) \leq CVaR_\alpha(X),$$

$$CVaR_\alpha(X) \geq \begin{cases} VaR_\alpha(X), & VaR_\alpha(X) > 0, \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha}VaR_\alpha(X), & VaR_\alpha(X) \leq 0. \end{cases}$$

Нижняя оценка $CVaR_\alpha(X)$ также без доказательства была представлена в работе [3].

Утверждение 7. (раздел 3.2) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $CVaR_\beta(X) = \xi$, то при $\alpha > \beta$

$$\xi \leq CVaR_\alpha(X) \leq \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} \xi, & \xi \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ \xi + \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\beta} \right) \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2 \right)}, & \xi > \frac{\beta}{1-\beta} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{cases}.$$

Утверждение 8. (раздел 3.2) Если X – стандартизированная случайная величина и известно значение $CVaR_\beta(X) = \xi$, то при $\alpha < \beta$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} \xi \leq CVaR_\alpha(X) \leq \begin{cases} \xi, & \xi \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \xi + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2 \right)} \right), & \xi > \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases}.$$

Границы в утверждениях 2-3 и 7-8, возможно, улучшаемы.

Иногда, зная пару значений $(\rho_1(X_1), \rho_2(X_1))$ и значение $\rho_1(X_2)$, можно без вычисления $\rho_2(X_2)$ сделать вывод о справедливости неравенства $\rho_2(X_1) \leq \rho_2(X_2)$. Этот вывод возможен (в некоторых случаях) в силу выпуклости области возможных значений $\rho_2(\cdot)$ в зависимости от $\rho_1(\cdot)$ (см., например, рис. 1-6). С финансовой точки зрения, это означает, что в некоторых случаях, если одна позиция лучше другой по одной мере, а потом мы берем другую меру, то проводить новое вычисление не нужно, вывод о предпочтительности получается сразу.

Утверждение 9. (раздел 5.3) Если X – стандартизированная случайная величина, принимающая значения на $[a, b]$, то граничные значения $VaR_\alpha(X)$ определяются по таблице

	$\min[VaR_\alpha(X)]$	$\max[VaR_\alpha(X)]$
$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+a^2}$	a	$\frac{-1-\alpha a(b-a)}{\alpha a + (1-\alpha)b}$
$\frac{1}{1+a^2} \leq \alpha \leq \frac{b^2}{1+b^2}$	$-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
$\frac{b^2}{1+b^2} < \alpha$	$\frac{(1-\alpha)b(b-a) - 1}{\alpha a + (1-\alpha)b}$	b

При этом результаты остаются верными, если a и b бесконечны.

2 Границы $MINVaR_n$

2.1 Известны EX , DX и $MINVaR_m(X)$

Для решения этой задачи воспользуемся вариационным исчислением.

$$\int_0^1 x(F)nF^{n-1}dF \rightarrow extr,$$

$$\int_0^1 x(F)dF = 0,$$

$$\int_0^1 x^2(F)dF = 1, \quad (4)$$

$$\int_0^1 x(F)mF^{m-1}dF = \xi. \quad (5)$$

Найдём экстремали $EX_{(n:n)}$ методом Лагранжа, $\lambda_0 = \pm 1$:

$$L = \lambda_0 xnF^{n-1} + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 xmF^{m-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_0 xnF^{n-1} + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 xmF^{m-1}) = 0,$$

$$\lambda_0 nF^{n-1} + \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 mF^{m-1} = 0,$$

$$\int_0^1 (\lambda_0 nF^{n-1} + \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 mF^{m-1}) dF = 0,$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 = -\lambda_0 - \lambda_3,$$

$$\lambda_0(nF^{n-1} - 1) + 2\lambda_2 x + \lambda_3(mF^{m-1} - 1) = 0,$$

$$2\lambda_2 x = \lambda_0(1 - nF^{n-1}) + \lambda_3(1 - mF^{m-1}).$$

Сделаем замену $a = \frac{\lambda_0}{2\lambda_2}$, $b = \frac{\lambda_3}{2\lambda_2}$:

$$x = a(1 - nF^{n-1}) + b(1 - mF^{m-1}). \quad (6)$$

Экстремумы достигаются на выражениях следующего вида:

$$\int_0^1 x(F)nF^{n-1}dF = -a \frac{(n-1)^2}{2n-1} - b \frac{(n-1)(m-1)}{n+m-1}. \quad (7)$$

Подставим (6) в условия (4) и (5):

$$a^2 \frac{(n-1)^2}{2n-1} + 2ab \frac{(n-1)(m-1)}{n+m-1} + b^2 \frac{(m-1)^2}{2m-1} = 1,$$

$$-a \frac{(n-1)(m-1)}{n+m-1} - b \frac{(m-1)^2}{2m-1} = \xi.$$

Выпишем из этой системы уравнение для нахождения b :

$$b^2 \frac{(m-1)^2}{2m-1} \frac{(n-m)^2}{(2n-1)(2m-1)} + 2b\xi \frac{(n-m)^2}{(2n-1)(2m-1)} + \xi^2 \frac{(n+m-1)^2}{(2n-1)(m-1)^2} - 1 = 0.$$

Дискриминант последнего уравнения всегда положителен:

$$\frac{D}{4} = \frac{(n-m)^2}{(2n-1)(2m-1)} \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right).$$

Выпишем выражения для a и b :

$$b = \frac{2m-1}{(m-1)^2} \left(-\xi \pm \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2} \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right),$$

$$a = \mp \frac{n+m-1}{(n-1)(m-1)} \sqrt{\frac{(2n-1)(2m-1)}{(n-m)^2} \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)}.$$

Подставим полученные выражения для a и b в (7). После упрощения получится следующий результат:

$$\int_0^1 x(F) n F^{n-1} dF =$$

$$= \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi \pm \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right).$$

Для того, чтобы убедиться, что эти значения являются экстремумами задачи (без учета ее вероятностного смысла), воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\left| \int fg dt \right| \leq \left(\int f^2 dt \int g^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Представим $\mathbf{E}X_{(n:n)}$ следующим образом:

$$\mathbf{E}X_{(n:n)} = \int_0^1 x(F) n F^{n-1} dF - c \int_0^1 x(F) dF - \gamma \int_0^1 x(F) m F^{m-1} dF + \gamma \xi =$$

$$= \int_0^1 x(F) (n F^{n-1} - c - \gamma m F^{m-1}) dF + \gamma \xi. \quad (8)$$

$$\left| \mathbf{E}X_{(n:n)} - \gamma \xi \right| \leq \left(\int_0^1 x^2 dF \int_0^1 (n F^{n-1} - c - \gamma m F^{m-1})^2 dF \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{2n-1} + c^2 + \gamma^2 \frac{m^2}{2m-1} - 2c - 2\gamma \frac{nm}{n+m-1} + 2c\gamma}.$$

Граничные значения $\mathbf{E}X_{(n:n)}$: $\gamma\xi \pm \sqrt{\frac{n^2}{2n-1} + c^2 + \gamma^2 \frac{m^2}{2m-1} - 2c - 2\gamma \frac{nm}{n+m-1} + 2c\gamma}$.
 Минимизируя верхнюю границу по c и γ , получаем следующее решение:

$$c = 1 - \gamma,$$

$$\gamma = \frac{(n-1)(2m-1)}{(n+m-1)(m-1)} \left(1 + \frac{|n-m|\xi}{\sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)}} \right).$$

После подстановки этих c и γ получаем верхнюю границу из неравенства Коши-Буняковского, совпадающую с верхней границей, полученной в ходе решения задачи вариационного исчисления. Аналогичные результаты получаются при максимизации нижней границы по c и γ .

Полученные границы не являются точными при всех ξ , но они гарантированные.

Случай 1: $n > m$

В этом случае верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_{(n:n)} &\leq \\ &\leq \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi + \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right). \\ \mathbf{E}X_{(n:n)} &\geq \\ &\geq \max \left\{ \xi; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi - \frac{n-m}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Случай 2: $n < m$

В этом случае верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_{(n:n)} &\leq \\ &\leq \min \left\{ \xi; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi + \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}. \\ \mathbf{E}X_{(n:n)} &\geq \\ &\geq \max \left\{ 0; \frac{n-1}{(m-1)(n+m-1)} \left((2m-1)\xi - \frac{m-n}{2n-1} \sqrt{(2n-1)(2m-1) \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В случае $n > m$, $m = 2$ можно определить другую верхнюю границу $\mathbf{E}X_{(n:n)}$, которая лучше общей оценки при некоторых значениях $\mathbf{E}X_{(2:2)}$:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{E}X_{(2:2)} = \mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \frac{1}{2}\mathbf{E}[X_1 + X_2 + |X_1 - X_2|] = \frac{1}{2}\mathbf{E}|X_1 - X_2|, \\ \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i<j} |X_i - X_j| &= \sum_{i=1}^n X_{(i:n)} + \sum_{i<j} |X_{(i:n)} - X_{(j:n)}| \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} X_{(i:n)} + X_{(n:n)} + \sum_{i=1}^{n-1} (X_{(n:n)} - X_{(i:n)}) = nX_{(n:n)}, \\ X_{(n:n)} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i<j} |X_i - X_j|, \\ \mathbf{E}X_{(n:n)} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i<j} \mathbf{E}|X_i - X_j| = \frac{1}{n} C_n^2 \mathbf{E}|X_1 - X_2| = \frac{n-1}{2} \cdot 2\xi = (n-1)\xi. \end{aligned}$$

Итого, с учетом общей границы, получаем

$$\mathbf{E}X_{(n:n)} \leq \min \left\{ (n-1)\xi; \frac{n-1}{n+1} \left(3\xi + \frac{n-2}{2n-1} \sqrt{3(2n-1) \left(\frac{1}{3} - \xi^2 \right)} \right) \right\}.$$

Если же $n = 2$, $m > n$, то аналогично можно улучшить нижнюю границу:

$$\mathbf{E}X_{(2:2)} \geq \max \left\{ \frac{\xi}{m-1}; \frac{1}{m^2-1} \left((2m-1)\xi - (m-2) \sqrt{\frac{2m-1}{3} \left(\frac{(m-1)^2}{2m-1} - \xi^2 \right)} \right) \right\}.$$

Изобразим на графике область возможных значений $\mathbf{E}X_{(3:3)}$ в зависимости от $\xi = \mathbf{E}X_{(2:2)}$: по графику видно, что при малых ξ граничное значение 2ξ лучше того, которое получено методом вариационного исчисления (на рисунке красная линия).

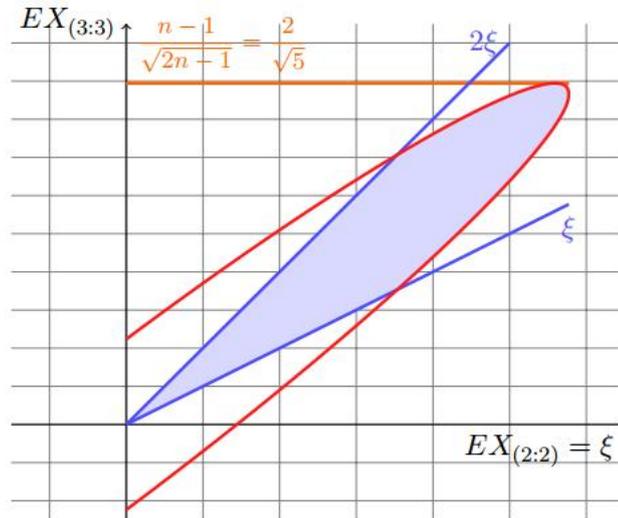


Рис. 1:

На графике видно, что точки пересечения ξ и 2ξ с линией эллипса совпадают, и это действительно так, но только в конкретном случае при $n = 3$. В общем же случае точками пересечения пар верхних и нижних границ являются $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$ и $\frac{n-1}{\sqrt{(n+1)(3n-1)}}$ соответственно.

График для случая $n = 2$, $m = 3$ симметричен относительно биссектрисы изображенному на рис. 1.

2.2 Известны $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$ и $CVaR_\alpha(X)$

Найдем границы

$$\mathbf{E}X_{(n:n)} = \int_0^1 x(F)nF^{n-1} dF$$

при

$$\mathbf{E}X = \int_0^1 x(F) dF = 0, \quad \mathbf{D}X = \int_0^1 x^2(F) dF = 1, \quad CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 x(F)\varphi dF = \xi,$$

воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_{(n:n)} - \gamma\xi &= \int_0^1 x(F)nF^{n-1} dF - c \int_0^1 x(F) dF - \frac{\gamma}{1-\alpha} \int_0^1 x(F)\varphi dF, \\ \left| \mathbf{E}X_{(n:n)} - \gamma\xi \right| &\leq \left(\int_0^1 x^2(F) dF \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(nF^{n-1} - c - \frac{1}{1-\alpha}\gamma\varphi \right)^2 dF \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2n-1} + c^2 + \frac{1}{1-\alpha}\gamma^2 - 2c - 2\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\gamma + 2c\gamma}. \end{aligned}$$

Граничные значения $\mathbf{E}X_{(n:n)}$: $\gamma\xi \pm \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2n-1} + c^2 + \frac{1}{1-\alpha}\gamma^2 - 2c - 2\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\gamma + 2c\gamma}$.

Минимизируя верхнюю границу (максимизируя нижнюю) по c и γ , получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \gamma, \\ \gamma &= (1 - \alpha^{n-1}) \mp \sqrt{\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{(n-1)^2}{2n-1} - \frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})^2}{1-\alpha} \right)}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \xi^2 \right)}}. \end{aligned}$$

Эти c и γ обеспечивают границы

$$(1 - \alpha^{n-1}) \xi \pm \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \xi^2 \right) \left(\frac{(n-1)^2}{2n-1} - \frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})^2}{1-\alpha} \right)}.$$

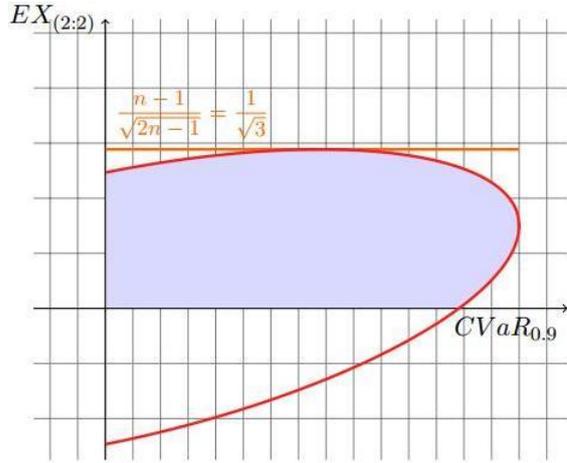


Рис. 2:

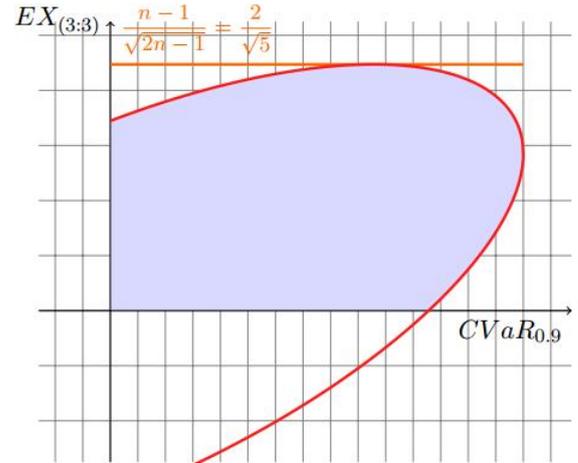


Рис. 3:

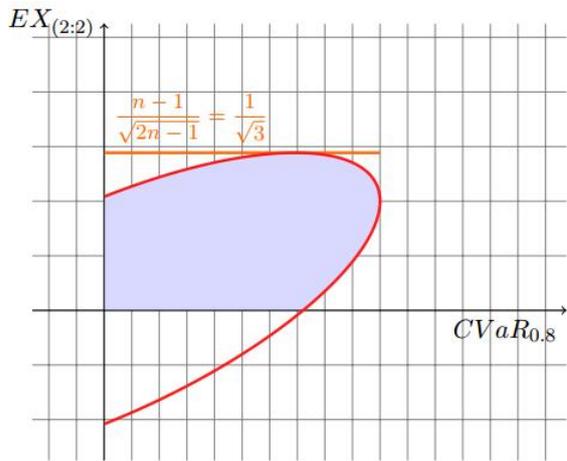


Рис. 4:

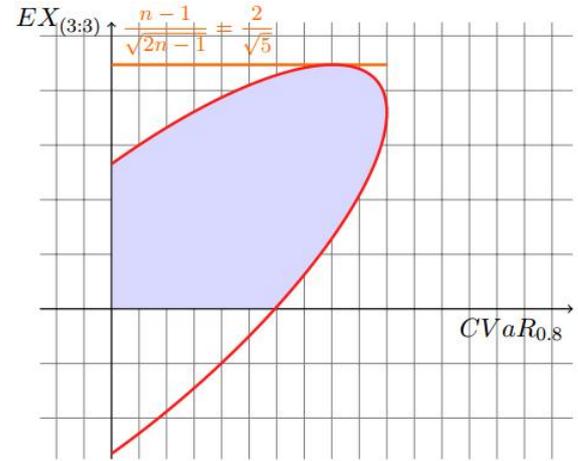


Рис. 5:

3 Границы $CVaR_\alpha$

3.1 Известны EX и DX

Для получения границ (без учета вероятностного смысла задачи), воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для интегрального представления $CVaR_\alpha(X)$:

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 x(F) \varphi dF - c \int_0^1 x(F) dF = \int_0^1 x(F) \left(\frac{1}{1-\alpha} \varphi - c \right) dF,$$

$$\left| CVaR_\alpha(X) \right| \leq \left(\int_0^1 x^2(F) dF \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\alpha} \varphi - c \right)^2 dF \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha} - 2c + c^2}. \quad (9)$$

Минимизируя правую часть неравенства (9) по c , получаем простое решение:

$$c = 1,$$

$$\left| CVaR_\alpha(X) \right| \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

С учетом $CVaR_\alpha(X) > 0$ получаем

$$0 < CVaR_\alpha(X) \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Нижняя граница точна (неулучшаема): возьмем стандартизированную двухточечную случайную величину $Z = \{z; -1/z\}$ (см. раздел 5.2); при $z \rightarrow -\infty$ имеем $p(z) \rightarrow 0$ и $CVaR_\alpha(Z) \rightarrow 0$ для любого α .

Верхняя граница $CVaR_\alpha$ достигается, например, при $\alpha > 0.5$ на таком двухточечном распределении:

$$X = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} & \text{с вероятностью } p = 1 - \alpha, \\ \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{с вероятностью } 1 - p = \alpha. \end{cases}$$

3.2 Известны EX , DX и $CVaR_\beta(X)$

Обозначим $\psi = I[F \geq \beta]$ и $CVaR_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_0^1 x(F)\psi dF = \xi$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для интегрального представления $CVaR_\alpha(X)$:

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X) - \gamma\xi &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 x(F)\varphi dF - c \int_0^1 x(F) dF - \frac{\gamma}{1-\beta} \int_0^1 x(F)\psi dF, \\ &= \int_0^1 x(F) \left(\frac{1}{1-\alpha}\varphi - c - \frac{1}{1-\beta}\gamma\psi \right) dF \\ \left| CVaR_\alpha(X) - \gamma\xi \right| &\leq \left(\int_0^1 x^2(F) dF \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\alpha}\varphi - c - \frac{1}{1-\beta}\gamma\psi \right)^2 dF \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Случай 1: $\alpha > \beta$

$$\left| CVaR_\alpha(X) - \gamma\xi \right| \leq \sqrt{\frac{1}{1-\alpha} + c^2 + \frac{1}{1-\beta}\gamma^2 - 2c - \frac{2}{1-\alpha}\gamma + 2c\gamma}.$$

Минимизируя верхнюю границу (максимизируя нижнюю) по c и γ , получаем:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \gamma, \\ \gamma &= 1 \pm \xi \sqrt{\frac{\frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\beta} \right)}{\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2}}. \\ \text{extr}\{CVaR_\alpha(X)\} &= \xi \pm \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\beta} \right) \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2 \right)}. \end{aligned}$$

Случай 2: $\alpha < \beta$

$$\left| CVaR_\alpha(X) - \gamma\xi \right| \leq \sqrt{\frac{1}{1-\alpha} + c^2 + \frac{1}{1-\beta}\gamma^2 - 2c - \frac{2}{1-\beta}\gamma + 2c\gamma}.$$

Минимизируя верхнюю границу (максимизируя нижнюю) по c и γ , получаем:

$$c = 1 - \gamma,$$

$$\gamma = \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \pm \xi \sqrt{\frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}{\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2}} \right).$$

$$\text{extr}\{CVaR_\alpha(X)\} = \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \xi \pm \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{\beta}{1-\beta} - \xi^2 \right)} \right).$$

Полученные границы улучшаются: при $\alpha < \beta$ верно $CVaR_\alpha(X) \leq CVaR_\beta(X)$ (по определению) и $CVaR_\alpha(X) \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} CVaR_\beta(X)$ (в силу (10) и соотношений $q_\alpha \leq q_\beta$, $E[X|X \leq q_\alpha] \leq E[X|X \leq q_\beta]$). Верны и обратные неравенства при $\alpha > \beta$.

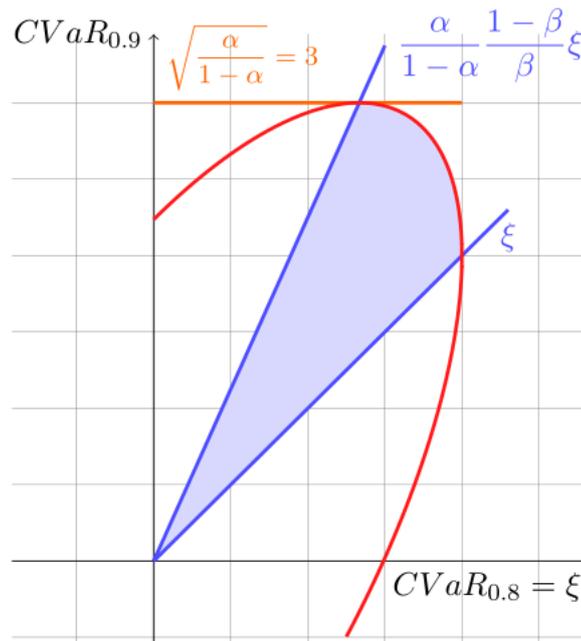


Рис. 6:

4 Соотношения между $VaR_\alpha(X)$ и $CVaR_\alpha(X)$ при $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{D}X = 1$

Утверждение 10.

$$\mathbf{E}X = \alpha\mathbf{E}[X|X \leq q_\alpha] + (1-\alpha)\mathbf{E}[X|X > q_\alpha],$$

где q_α – α -квантиль распределения X .

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{q_\alpha} x dF(x) + \int_{q_\alpha}^{+\infty} x dF(x) = \\
&= \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{q_\alpha} x dF(x) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_{q_\alpha}^{+\infty} x dF(x) = \\
&= \alpha \frac{1}{P(X \leq q_\alpha)} \mathbf{E}[X \cdot I(X \leq q_\alpha)] + (1 - \alpha) \frac{1}{P(X > q_\alpha)} \mathbf{E}[X \cdot I(X > q_\alpha)] = \\
&= \alpha \mathbf{E}[X|X \leq q_\alpha] + (1 - \alpha) \mathbf{E}[X|X > q_\alpha].
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.

$$\mathbf{E}[X|X \leq q_\alpha] = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{E}X - (1 - \alpha) \mathbf{E}[X|X > q_\alpha]). \quad (10)$$

Утверждение 11.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X|X \leq q_\alpha] &\leq q_\alpha \leq \mathbf{E}[X|X > q_\alpha], \\
\frac{1}{\alpha} (\mathbf{E}X - (1 - \alpha) \mathbf{E}[X|X > q_\alpha]) &\leq q_\alpha \leq \mathbf{E}[X|X > q_\alpha].
\end{aligned} \quad (11)$$

Следствие 4. Для любой стандартизированной случайной величины X верны соотношения:

$$-\frac{1 - \alpha}{\alpha} CVaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(X) \leq CVaR_\alpha(X), \quad (12)$$

$$CVaR_\alpha(X) \geq \begin{cases} VaR_\alpha(X), & VaR_\alpha(X) > 0, \\ -\frac{\alpha}{1 - \alpha} VaR_\alpha(X), & VaR_\alpha(X) \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Неравенства (12) вытекают из (11) путем замены q_α на $VaR_\alpha(X)$ и $\mathbf{E}[X|X > q_\alpha]$ на $CVaR_\alpha(X)$. Из (12) образуется система из двух неравенств для $CVaR_\alpha$:

$$\begin{cases} CVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X), \\ CVaR_\alpha(X) \geq -\frac{\alpha}{1 - \alpha} VaR_\alpha(X). \end{cases}$$

□

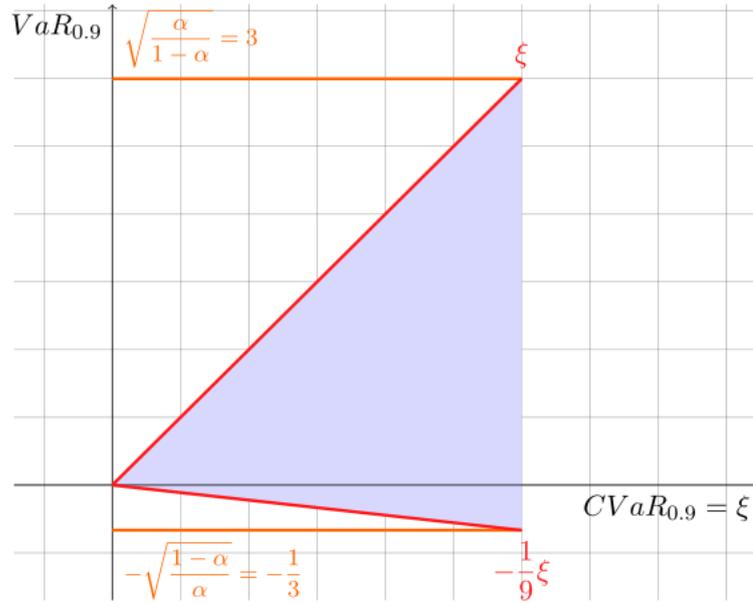


Рис. 7:

5 Границы VaR_α

В силу монотонности функции распределения $F_X(\cdot)$ задачу нахождения экстремальных значений $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$ можно свести к задаче нахождения экстремальных значений $F_X(z)$ для каждого z . Далее мы будем работать с представлением $F_X(z) = \mathbf{E}[I(X \leq z)]$.

5.1 Применение проблемы моментов к нахождению граничных значений $F_X(z)$

Задача нахождения границ значений $\int_a^b I[t \leq z] d\sigma(t)$ при известных первых $n + 1$ моментах является частным случаем проблемы Маркова определения границ $\int_T \Omega(t) d\sigma(t)$, где σ пробегает множество неотрицательных конечных мер, удовлетворяющих заданным моментным условиям (это множество мер обозначено $V(c^0)$, где $c^0 - (n + 1)$ -мерный вектор моментов, $c_i^0 = \int_T u_i(t) d\sigma(t)$).

В работе Карлина и Стаддена [18] (глава XII, §2 теорема 2.1) утверждается, что верхняя граница

$$I_{\max} = \sup_{\sigma \in V(c^0)} \int_T \Omega(t) d\sigma(t)$$

достигается на некотором обобщенном многочлене $U(t) = \sum_{i=0}^n a_i^0 u_i(t)$ из множества

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ u(t) = \sum_{i=0}^n a_i u_i(t) \mid u(t) \geq \Omega(t) \right\}$$

всех многочленов, ограничивающих $\Omega(t)$ сверху, то есть $I_{\max} = \inf \sum_{i=0}^n a_i c_i^0$.

Согласно замечанию 2.3 ([18], глава XII, §2), если существует экстремальная мера σ^* , такая, что $I_{\max} = \int_T \Omega d\sigma^*$, то спектр σ^* содержится в множестве

$$S = \left\{ t \in T \mid \sum_{i=0}^n a_i^0 u_i(t) = \Omega(t) \right\}.$$

Дополнительно, если $\{u_i\}_{i=0}^n - T$ -система, то есть любая ненулевая линейная комбинация элементов u_i имеет не более n корней, то в множестве S по меньшей мере $\left[\frac{n+1}{2} \right] + 1$ элементов.

Аналогичные утверждения верны и для нижней границы с использованием множества многочленов \mathcal{P}_- , ограничивающих $\Omega(t)$ снизу.

Применительно к задаче нахождения верхней границы значений $\int_a^b I[t \leq z] d\sigma(t)$ имеем $u_i = t^i$, $i = 0, \dots, n$. Многочлены из множества \mathcal{P}_+ имеют степень не выше n .

Перейдем к конкретному случаю известного математического ожидания и дисперсии. В этой задаче $n = 2$, каждый отличный от константы многочлен из множества \mathcal{P}_+ имеет на $[a, b]$ не более трех общих точек с $I[t \leq z]$, то есть в спектре экстремального распределения S либо 2, либо 3 элемента. Отсюда можно описать алгоритм нахождения границ интересующего интеграла:

1. Исследуем структуру стандартизированных двухточечных и трехточечных случайных величин Z .
2. Выделим множество многочленов степени не выше 2, ограничивающих график $I[t \leq z]$ сверху и имеющих с ним не менее двух общих точек, причем таких, что из них можно составить стандартизированные случайные величины Z .
3. На множестве многочленов из п.2 находим

$$\inf \sum_{i=0}^n a_i c_i^0 = \mathbf{E}[U(Z)] = I_{\max}.$$

Аналогичные действия применяются для нахождения нижних границ.

5.2 Точечные случайные величины с заданными моментами

Приведем описание структуры двух- и трехточечных случайных величин Z с $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{D}Z = 1$. Полное исследование этих точечных случайных величин можно найти в разделе 2 работы [9].

Обозначим $\bar{z} = -1/z$. Структура стандартизированной двухточечной случайной величины на $[a, b]$:

$$\begin{aligned} z_1 = z \in [a, \bar{b}], \quad p_1 &= \frac{1}{1 + z^2}, \\ z_2 = \bar{z} \in [\bar{a}, b], \quad p_2 &= \frac{z^2}{1 + z^2}. \end{aligned}$$

Элементы стандартизированной трехточечной случайной величины $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ имеют следующие вероятности:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1 + z_2 z_3}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}, \\ p_2 &= \frac{-(1 + z_1 z_3)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)}, \\ p_3 &= \frac{1 + z_1 z_2}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}. \end{aligned}$$

При этом выполняется порядок $z_1 < \bar{z}_3 < z_2 < \bar{z}_1 < z_3$.

5.3 Границы $F_X(z)$ и $Var_\alpha(X)$ при известных $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$

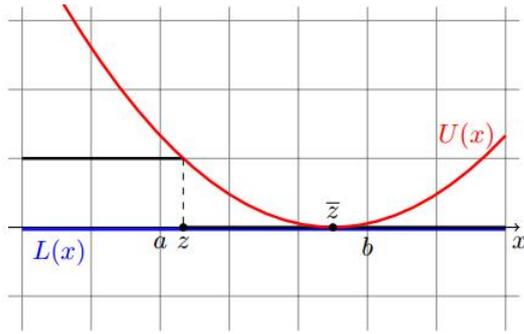
Границы $F_{min}(z)$ и $F_{max}(z)$ функции $F(z) = \mathbf{E}[I(X \leq z)]$, такие, что для любого z выполняется неравенство $F_{min}(z) \leq F(z) \leq F_{max}(z)$, представлены в таблице ниже.

Таблица 5.1

	$F_{min}(z)$	$F_{max}(z)$	Упорядоченный спектр экстремального распределения
$a \leq z \leq \bar{b}$	0	$\frac{1}{1 + z^2}$	$\{z, \bar{z}\}$
$\bar{b} < z < \bar{a}$	$\frac{1 + bz}{(b - a)(z - a)}$	$1 - \frac{1 + az}{(b - a)(b - z)}$	$\{a, z, b\}$
$\bar{a} \leq z < b$	$\frac{z^2}{1 + z^2}$	1	$\{\bar{z}, z\}$
$z = b$	1	1	$\{\bar{z}, z\}$

Замечание. В случае $a = -\infty$, $b = +\infty$, перейдя к пределу, получаем неравенство Кантелли.

В случаях $a < z < \bar{b}$ и $\bar{a} < z < b$ для каждого фиксированного z существуют стандартизированные двухточечные случайные величины с упорядоченными спектрами $\{z, \bar{z}\}$ и $\{\bar{z}, z\}$ соответственно. Для оставшегося случая $\bar{b} < z < \bar{a}$ подходит стандартизированная трехточечная случайная величина со спектром $\{a, z, b\}$.



Случай (1): спектр $\{z, \bar{z}\}$, $z \in (a, \bar{b})$.

Функция $\bar{U}(x)$ должна удовлетворять следующим условиям в точках спектра:

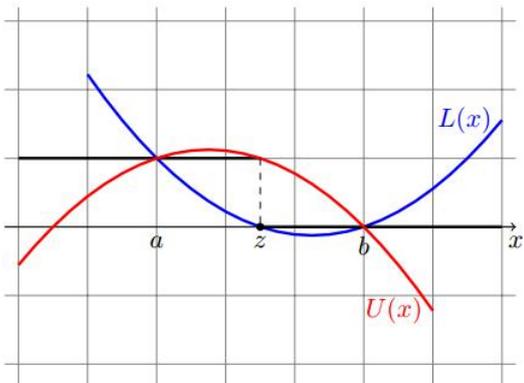
$$U(z) = 1,$$

$$U(\bar{z}) = 0,$$

$$U'(\bar{z}) = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет единственная парабола $U(x) = \frac{(x - \bar{z})^2}{(z - \bar{z})^2}$.

Снизу график ограничивает $L(x) \equiv 0$.



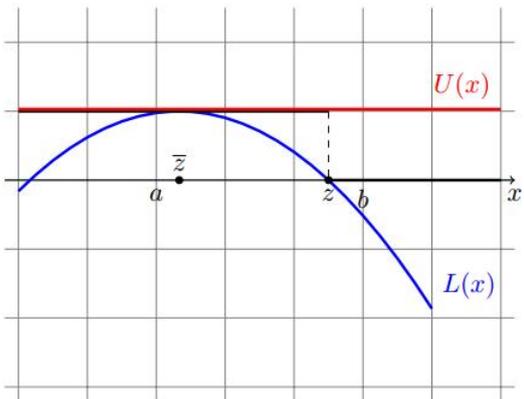
Случай (2): спектр $\{a, z, b\}$, $z \in (\bar{b}, \bar{a})$.

Функция $\bar{U}(x)$ должна удовлетворять следующим условиям в точках спектра: $U(a) = 1$, $U(z) = 1$, $U(b) = 0$.

Этим условиям удовлетворяет единственная парабола $U(x) = \frac{(b-x)(x+b-z-a)}{(b-z)(b-a)}$.

Функция $L(x)$ должна удовлетворять следующим условиям в точках спектра: $L(a) = 1$, $L(z) = 0$, $L(b) = 0$.

Этим условиям удовлетворяет единственная парабола $L(x) = \frac{(b-x)(x-z)}{(b-a)(z-a)}$.



Случай (3): спектр $\{\bar{z}, z\}$, $z \in (\bar{a}, b)$.

Сверху график ограничивает $U(x) \equiv 1$.

Функция $L(x)$ должна удовлетворять следующим условиям в точках спектра:

$$L(\bar{z}) = 1,$$

$$L'(\bar{z}) = 0,$$

$$L(z) = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет единственная парабола $L(x) = 1 - \frac{(x - \bar{z})^2}{(z - \bar{z})^2}$.

Снизу график ограничивает $L(x) \equiv 0$.

Особый случай: $x = b$, $L(x) \equiv 1$, $U(x) \equiv 1$.

Граничные значения из таблицы 5.1 получаются путем вычисления $\mathbf{E}[U(Z)]$ и $\mathbf{E}[L(Z)]$ в каждом случае. Графики $F_{min}(x)$, $F_{max}(x)$ и принцип нахождения граничных значений $VaR_\alpha(X)$ изображены на следующем рисунке:

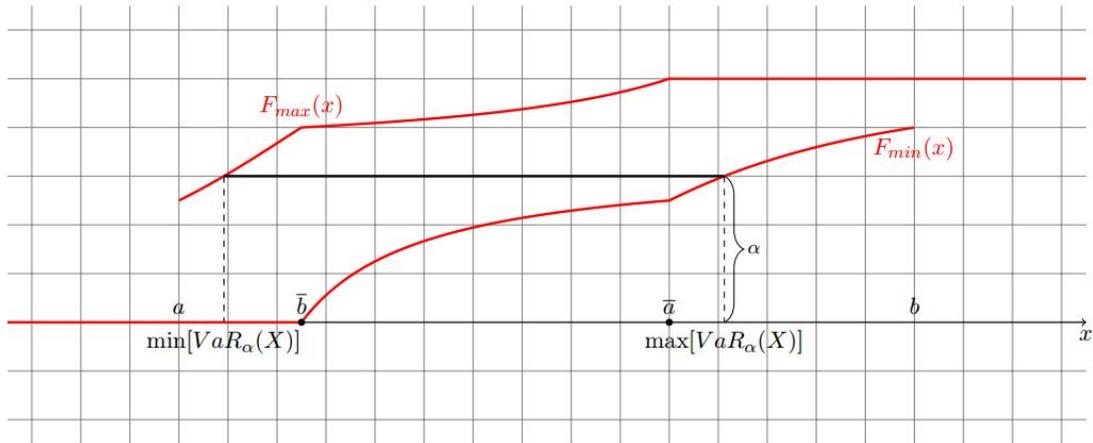


Рис. 8:

Решая уравнение $F_{max}(x) = \alpha$, получаем единственное решение $x = \min[VaR_\alpha(X)]$, аналогично при решении уравнения $F_{min}(x) = \alpha$, находим $\max[VaR_\alpha(X)]$. Итоговые результаты представлены в таблице ниже.

Таблица 5.2

	$\min[VaR_\alpha(X)]$	$\max[VaR_\alpha(X)]$
$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+a^2}$	a	$\frac{-1 - \alpha a(b-a)}{\alpha a + (1-\alpha)b}$
$\frac{1}{1+a^2} \leq \alpha \leq \frac{b^2}{1+b^2}$	$-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
$\frac{b^2}{1+b^2} < \alpha$	$\frac{(1-\alpha)b(b-a) - 1}{\alpha a + (1-\alpha)b}$	b

Автор благодарен А.В.Лебедеву за постановку задачи, полезные замечания и предложения, а также А.В.Куликову за полезные замечания и предложения.

Список литературы

- [1] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., Thinking coherently // Risk, 1997, v. 10, p. 68–71.
- [2] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance, 1999, v. 9, p. 203–228.
- [3] Bertsimas D., Lauprete G.J., Samarov A., Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications // Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, v. 28, № 7, p. 1353–1381.
- [4] Cherny A., Weighted V@R and its properties // Finance and Stochastics, 2006, v. 10, p. 367–393.
- [5] Cherny A., Madan D., On Measuring the Degree of Market Efficiency. Preprint, 2007.
- [6] Cherny A., Orlov D., On two approaches to coherent risk contribution // Mathematical Finance, 2010, v. 21, № 3, p. 557–571.

- [7] *David H.A., Nagaraja H.N.*, Order statistics (3rd edition). Wiley, 2003.
- [8] *Guldimann T.M.*, The story of RiskMetrics // Risk, 2000, v. 13, № 1, p. 56–58.
- [9] *Jansen K., Haezendonck J., Goovaerts M.J.*, Analytical upper bounds on stoploss premiums in case of known moments up to the fourth order // Insurance: Mathematics and Economics, 1986, v. 5, p. 315–334.
- [10] RiskMetrics – Technical Document (4th edition). New York, J.P.Morgan, 1996.
- [11] *Hartley H.O., David H. A.*, Universal bounds for mean range and extreme observation // The Annals of Mathematical Statistics, 1954, v. 25, p. 85–99.
- [12] *Kaas S., Goovaerts M.J.*, Extremal values of stop-loss premiums under moment constraints // Insurance: Mathematics and Economics, 1986, v. 5, p. 279–283.
- [13] *Pflug G.*, Some Remarks on Value-at-Risk and Conditional-Value-at-Risk / Probabilistic Constrained Optimisation: Methodology and Applications. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [14] *Rockafellar R.T., Uryasev S.*, Optimization of Conditional Value-At-Risk // The Journal of Risk, 2000, v. 2, p. 21–42.
- [15] *Rockafellar R.T., Uryasev S.*, Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of banking & finance, 2002, v. 26, № 7, p. 1443–1471.
- [16] *Uryasev S.*, Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications // Financial Engineering News, 2000, v. 14, p.1–5.
- [17] *Uryasev S., Rockafellar R.T.*, Conditional value-at-risk: optimization approach // Stochastic optimization: algorithms and applications, 2001, p. 411–435.
- [18] *Карлин С., Стадден В.*, Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
- [19] *Крейн М.Г., Нудельман А.А.*, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [20] *Орлов Д.В.*, О двух оценках одной меры риска // Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, № 1, с. 168–172.
- [21] *Сверчков Р.А.*, О некоторых свойствах когерентных мер риска, основанных на минимумах, и связанных с ними задачах // Современные проблемы математики и механики, 2013, т. 8, № 3, с. 124–136.

Максимизация экспоненциальной полезности в модели Леви

Иванов М.Ю.¹

Мы рассматриваем задачу максимизации экспоненциальной полезности в экспоненциальной модели Леви. При определенных ограничениях на множество процессов капиталов для основной задачи удается применить методы, схожие с теми, что использовались в степенном и логарифмическом случаях, а также избежать дополнительных ограничений на процесс цены акции. В результате получено решение, которое принадлежит классу допустимых стратегий, а не достигается на последовательности, как во многих общеизвестных работах. В конце статьи рассматривается двойственная задача.

1 Введение

В предыдущих работах [6] и [7] мы исследовали задачу максимизации ожидаемой полезности в экспоненциальных моделях Леви для логарифмической и степенной функций полезности. В этой статье мы рассмотрим еще одну функцию полезности — экспоненциальную. Все эти три функции образуют класс так называемых HARA-полезностей, который характеризуется тем, что $-U''(x)/U'(x) = 1/(ax + b)$, где $U(x)$ есть функция полезности, а a и b являются константами. Для этих трех случаев возможно применение схожих подходов к решению.

Проблематика максимизации полезности существенно различается в зависимости от того, когда функция $U(x)$ конечна на положительной полупрямой, или конечна на всей прямой. В первом случае есть естественное ограничение на класс стратегий с целью исключить слишком рискованные — процесс капитала должен быть неотрицательным, иначе ожидаемая полезность равна $-\infty$. Этот случай подробно исследовался в основополагающей статье Крамкова и Шахермайера [14], где в общей семимартингальной модели рынка найдены условия существования и единственности решения основной задачи, а также двойственной, и указана связь между решениями. Во втором случае, когда функция полезности конечна на всей прямой, такого естественного ограничения, исключающего слишком рискованные стратегии, нет. Если рассмотреть класс стратегий, процесс капитала которых ограничен снизу, то, как правило, оптимальной стратегии в этом классе не существует. Вопросу о том, как расширить класс стратегий, чтобы он включал в себя оптимальную и при этом задача не становилась бы вырожденной (то есть ожидаемая полезность не стала

¹Иванов Михаил Юрьевич, m_y_ivanov@mail.ru, соискатель, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

бы равной $\sup_{x \in \mathbb{R}} U(x)$, как будет в большинстве моделей, если допустить все возможные стратегии), посвящена значительная литература [1, 2, 10, 18, 19].

В данной работе рассматривается экспоненциальная функция полезности в экспоненциальной модели Леви. В этой модели основная задача исследовалась в [12]. Двойственная задача, которая в этом случае по сути совпадает с задачей минимизации энтропии по множеству мартингалов мер, изучалась в работах [3, 5]. Оптимальное решение основной задачи в одномерной модели состоит в том, чтобы держать определенное количество капитала в рисковом активе. Но процессы капиталов таких стратегий не всегда ограничены снизу, и даже не всегда могут быть приближены процессами капиталов, ограниченных снизу. Ввиду этого в [12] задача решается не для всех немонотонных процессов Леви. В данной работе мы выбираем класс стратегий, определение которого едино для всех немонотонных процессов Леви. В этом классе стратегий задача имеет решение. Процессы Леви предполагаются немонотонными, что эквивалентно предположению об отсутствии арбитража, других ограничений нет.

Цель данной работы состоит в решении основной задачи при ограничениях, отличающихся от тех, что применялись в [12], у нас они позволяют включить в множество допустимых стратегий такие, у которых капитал, вложенный в акции, постоянен, и проводить рассуждения аналогично тому, как это было сделано в работах [6, 7]. В конце приводится решение двойственной задачи, соответствующее результатам [3, 5].

Наша модель финансового рынка такая же, как и в предыдущих работах [6, 7]. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, где фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ непрерывна справа, рассмотрим семимартингал S с действительными неотрицательными значениями, у которого траектории непрерывны справа и имеют предел слева на интервале времени $[0, T]$. S задает дисконтированную цену актива. Самофинансируемый портфель Π определяется как пара (x, H) , где константа x есть начальный капитал портфеля, а H является предсказуемым процессом, интегрируемым по S . H также называют стратегией. Для Π процесс капитала инвестора $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ имеет вид

$$X_t = x + \int_0^t H_u dS_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Как в логарифмическом и степенном случаях, мы предполагаем, что процесс цены акции есть стохастическая экспонента процесса Леви:

$$S = \mathcal{E}(L), \quad \text{где } \Delta L > -1, L \neq 0.$$

Так как $dS = S_- dL$, то, меняя обозначения, процесс капитала можно записать в виде

$$X_t = x + \int_0^t H_s dL_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Множество процессов капитала при отсутствии каких-либо ограничений имеет вид

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X = x + H \cdot L, H \text{ предсказуем и интегрируем по } L\}. \quad (1)$$

Задача инвестора — в зависимости от начального капитала x максимизировать ожидаемую экспоненциальную полезность в конечный момент времени T :

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbf{E}[1 - \exp(-X_T)]. \quad (2)$$

Любой процесс Леви однозначно определяется триплетом своих характеристик (B, C, ν_L) , в одномерном случае он имеет вид

$$B_t(\omega) = bt, \quad C_t(\omega) = ct, \quad \nu_L(\omega, dt, dx) = dt\nu(dx), \quad (3)$$

где константы b, c ($c \geq 0$) и мера ν , такая, что $\int(1 \wedge x^2)d\nu < \infty$, однозначно определяются из представления Леви-Хинчина характеристической функции:

$$\mathbf{E}e^{iuL_t} = \exp \left\{ t \left(ibu - \frac{1}{2}cu^2 + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))d\nu \right) \right\},$$

где мы полагаем $h(x) = x\mathbb{1}_{|x| \leq 1}$. В дальнейших рассуждениях триплет характеристик называем просто триплетом и пишем его в сокращенном виде без времени $-(b, c, \nu)$.

Процесс L является монотонным тогда и только тогда, когда либо $c = 0, \nu[x < 0] = 0, b - \int x\mathbb{1}_{|x| \leq 1}\nu(dx) \geq 0$, либо $c = 0, \nu[x > 0] = 0, b - \int x\mathbb{1}_{|x| \leq 1}\nu(dx) \leq 0$, см. [17]. Далее в работе предполагаем L немонотонным, это эквивалентно условию отсутствия арбитража в нашей модели, обсуждение этого вопроса и ссылки на соответствующую литературу см. в [6].

2 Основная часть

Как уже было сказано, на множество \mathcal{X} надо наложить дополнительные ограничения. Определим множество допустимых портфелей следующим образом:

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X \text{ вида (1), } H \text{ ограничен и } -X \text{ — экспоненциально специальный}\}.$$

Семимартингал X является экспоненциально специальным, если процесс $\exp(X - X_0)$ является специальным семимартингалом, то есть представимым в виде суммы локального мартингала и предсказуемого процесса ограниченной вариации.

Так как $\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}(1) + x - 1$, то нам в дальнейшем достаточно рассматривать только $\mathcal{X}(1)$. Для данной постановки задачи справедлива следующая

Теорема 1. *На введенном выше множестве $\mathcal{X}(1)$ задача (2) для немонотонного процесса Леви L всегда имеет решение, которое полностью определяется триплетом L и имеет вид $X^* = 1 + y^*L$, где*

$$y^* = \min\{y : -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx) \geq 0\}.$$

Введем функцию F по триплету (b, c, ν) процесса L :

$$F(y) = -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx).$$

Лемма 1. *Для функции F выполнено следующее:*

1. *Функция F монотонно возрастает. Обозначим $y_0 = \sup\{y : \int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx) = \infty\}$ ($\sup \emptyset = -\infty$), тогда $y_0 \in [-\infty, 0]$. $F(y)$ является непрерывной функцией на $y > y_0$, а при $y < y_0$ $F(y) = -\infty$. В самой же точке y_0 функция F может как иметь конечное значение, совпадающее с правым пределом, так и расходиться в $-\infty$.*

2. Либо F имеет единственный корень, равный y^* , либо $0 < F(y^*) < +\infty$ и $y^* = y_0$. В обоих случаях y^* принимает конечное значение.

3. В том случае, когда у F нет корня, в каждой точке $y < y_0$ расходятся интегралы $\int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx)$ и $\int_{x>1} e^{-yx}\nu(dx)$, а при $y \geq y_0$ — сходятся.

Доказательство. Слагаемое $-b + cy$ непрерывно и монотонно неубывает на \mathbb{R} , строго возрастает при $c > 0$. Оставшийся интеграл разобьем на разность двух составляющих $I_1(y) - I_2(y)$, где

$$I_1(y) = \int_{|x|\leq 1} x(1 - e^{-yx})\nu(dx),$$

$$I_2(y) = \int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx).$$

Напомним, что из определения процесса Леви следует, что выполнено

$$\nu\{0\} = 0, \quad \int (x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty. \quad (4)$$

Рассмотрим интеграл I_1 . Подынтегральное выражение, как нетрудно заметить, ограничено по модулю функцией $K(y)x^2$, где $K(y) > 0$ есть некоторая константа. Отсюда следует конечность I_1 для любого y . Нетрудно подсчитать для подынтегрального выражения, что при $y_1 \leq y_2$ $x(1 - e^{-y_1x}) \leq x(1 - e^{-y_2x})$. Поэтому по теореме о монотонной сходимости интеграл I_1 будет непрерывен и монотонен по y на \mathbb{R} .

Теперь рассмотрим интеграл I_2 , его монотонное невозрастание по y очевидно. Если $y > 0$, то подынтегральное выражение ограничено. Из (4) следует сходимость интеграла. Пусть $y \leq 0$. Тогда, если у нас есть неограниченные сверху скачки, то интеграл может и разойтись. В этом случае $y_0 = \sup\{y : I_2(y) = +\infty\}$. Тогда, по свойству монотонности получаем, что для $y < y_0$ интеграл I_2 расходится, а для $y > y_0$ сходится, при этом, если $F(y_0)$ конечно, то $F(y_0)$ совпадает с правым пределом функции F в этой точке. Если же $y_0 = -\infty$, то I_2 сходится на всем \mathbb{R} . Отсюда по теореме о монотонной сходимости интеграл I_2 будет непрерывен и монотонен по y на всей прямой, если $y_0 = -\infty$, и при $y > y_0$, если y_0 конечно. Отсюда заключаем, что F конечна, непрерывна, монотонно возрастает по y при $y > y_0$ и равна $-\infty$ при $y < y_0$. Если в точке y_0 F конечна, то значение будет совпадать с правым пределом F в этой точке. Более того, F строго возрастает при $y > y_0$, так как в противном случае нетрудно получить, что L является монотонным, а такие процессы мы не рассматриваем. Первая часть леммы доказана.

Теперь докажем пункт 2. Покажем, что y^* не может принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Рассмотрим сначала случай $y^* = -\infty$. Это означает, что $F(y) \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что у L нет положительных скачков, $c = 0$ и $-b + \int h(x)\nu(dx) \geq 0$. Это есть условия на монотонный процесс L . Если же $y^* = +\infty$, то у нас $F(y) < 0$, $y \in \mathbb{R}$. Значит у L нет отрицательных скачков, $c = 0$ и $-b + \int h(x)\nu(dx) \leq 0$. Аналогично получаем, что L в этом случае также монотонный. Значит, y^* принимает конечное значение. Также отметим следующий факт — если в точке $y_0 > -\infty$ $F(y_0) = -\infty$, то тогда $\lim_{y \rightarrow y_0+} F(y) = -\infty$, это следует из теоремы о монотонной сходимости. Аналогично при $F(y_0) > 0$ $\lim_{y \rightarrow y_0+} F(y) = F(y_0) > 0$. Следовательно, если у F нет корня при $y \geq y_0$, то тогда F конечна в y_0 и эта точка совпадает с y^* по определению.

Пункт 3 следует из свойств экспоненциальной функции, так как из расходимости при всех $y < y_0$

$$\int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx)$$

следует расходимость

$$\int_{x>1} e^{-yx} \nu(dx)$$

при всех $y < y_0$. Если у F нет корня, то F конечна в y_0 и при $y \geq y_0$ оба эти интеграла конечны. Это и завершает доказательство леммы. \square

Обозначим через \mathfrak{D} множество тех y , где $\int_{x>1} e^{-yx} \nu(dx) < \infty$. Оно является определенным аналогом множества \mathfrak{C} в [6, 7]. Как следует из леммы 1, при $y < y_0$ данный интеграл расходится, а при $y > y_0$ — сходится. Отсюда \mathfrak{D} имеет вид $(-\infty, +\infty)$, если $y_0 = -\infty$, $[y_0, +\infty)$, если $\int_{x>1} e^{-y_0x} \nu(dx) < \infty$, $(y_0, +\infty)$, если $\int_{x>1} e^{-y_0x} \nu(dx) = \infty$.

Следующая лемма чем-то напоминает лемму 1 из [6].

Лемма 2. Из определения \mathcal{X} следует, что $H_t \in \mathfrak{D}$ $dPdt$ п.в., $0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Согласно лемме 2.13 в [13], для того, чтобы семимартингал $-X$ был экспоненциально специальным, необходимо и достаточно, чтобы процесс

$$J^{-X} = \mathbb{1}_{x>1} e^x * \nu^{-X}$$

был процессом ограниченной вариации, где ν^{-X} есть компенсатор меры скачков $-X$. Согласно [11], компенсатор меры скачков процесса $-H \cdot L$ для множества $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ задается по формуле

$$\nu^{-X}([0, s] \times G) = \int_0^s dt \int \mathbb{1}_G(-H_t x) \nu(dx), \quad 0 \leq s \leq T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_s^{-X} &= \int_0^s dt \left(\int \mathbb{1}_{-H_t x > 1} \exp(-H_t x) \nu(dx) \right) \\ &= \int_0^s dt \left(\int_{-H_t x > 1} \exp(-H_t x) \nu(dx) \right), \quad 0 \leq s \leq T. \end{aligned} \quad (5)$$

При $H_t \notin \mathfrak{D}$ внутренний интеграл в (5) расходится по определению \mathfrak{D} . Для того, чтобы J^{-X} был хотя бы конечен, необходимо, чтобы для п.в. ω сходился бы и внешний интеграл, то есть множество тех t , где $H_t(\omega) \notin \mathfrak{D}$, должно иметь меру Лебега 0. Это и означает, что $H_t \in \mathfrak{D}$ $dPdt$ п.в. \square

Эквивалентность первых двух пунктов следующей леммы есть частный случай теоремы Круглова (см. [15]), однако мы ее докажем, так как некоторые выкладки понадобятся позднее.

Лемма 3. Для функции полезности $U(x) = 1 - e^{-x}$ и портфелей вида $X = 1 + yL$, $y \in \mathbb{R}$ следующие три свойства эквивалентны:

1.

$$\int_{x>1} e^{-yx} d\nu < \infty. \quad (6)$$

2. $\mathbf{E}U(X_t) > -\infty, 0 \leq t \leq T$.

3. Процесс $-X$ является экспоненциально специальным семимартингалом.

Доказательство. Докажем, что из пункта 2 леммы следует пункт 1. Если у нас скачки ограничены сверху, то конечность интеграла в (6) следует по определению меры Леви. В случае наличия неограниченных сверху скачков возьмем произвольное $y < 0$ из \mathbb{R} . Пусть процесс времени задается как $G_t = t$, а через μ_L обозначим меру скачков процесса L . Преобразуем выражение $\exp(-yL)$ с помощью формулы Ито для $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \exp(-yL) &= \mathcal{E}(-yL + \frac{1}{2}y^2c \cdot G + [e^{-yx} - 1 + yx] * (\mu_L)) \\ &= \mathcal{E}(-yb \cdot G - y \cdot B + \frac{1}{2}y^2c \cdot G - yh * (\mu_L - \nu_L) \\ &\quad + [e^{-yx} - 1 + yh] \mathbb{1}_{|x| \leq 1} * (\mu_L) + [e^{-yx} - 1] \mathbb{1}_{x > 1} * (\mu_L)). \\ &= \mathcal{E}(D + A) = \mathcal{E}(D)\mathcal{E}(A), \end{aligned}$$

где $A_t = [e^{-yx} - 1] \mathbb{1}_{x > 1} * (\mu_L)_t$, а D_t есть сумма остальных слагаемых. Более того, процессы A и D независимы. Так как по предположению $\mathbf{E} \exp(-X_T) < \infty$, то $\mathbf{E} \mathcal{E}(A)_T < \infty$. Но $\mathbf{E} \mathcal{E}(A)_T = \mathbf{E}(1 + \mathcal{E}(A_-) \cdot A_T) \geq \mathbf{E}(1 + A_T)$, откуда $\mathbf{E} A_T < \infty$. Таким образом, процесс $[e^{-yx} - 1] \mathbb{1}_{x > 1} * (\mu_L)$ интегрируем и имеет компенсатор $[e^{-yx} - 1] \mathbb{1}_{x > 1} * (\nu_L)$. Значит, сходится $\int_{x > 1} [e^{-yx} - 1] d\nu$, что эквивалентно конечности $\int_{x > 1} e^{-yx} d\nu$.

Докажем, что из пункта 1 леммы следует пункт 2, пускай конечен интеграл (6). Тогда конечен интеграл $\int_{x > 1} (e^{-yx} - 1) d\nu$. Опять сделаем разложение по формуле Ито. В силу предположения, процесс A интегрируем. Так как мера Леви интегрирует x^2 в окрестности 0, то процесс $[e^{-yx} - 1 - yh] \mathbb{1}_{|x| \leq 1} * (\mu_L)$ также интегрируем. Добавляя и вычитая компенсаторы этих двух слагаемых, получаем:

$$\exp(-1 - yL) = \mathcal{E}(-1 - y \cdot B + (e^{-yx} - 1) * (\mu_L - \nu_L) + \psi(y) \cdot G) = Z \exp(-1 + \psi(y) \cdot G), \quad (7)$$

где $\psi(y) = -yb + \frac{1}{2}y^2c + [e^{-yx} - 1 + yh] * \nu$. Нетрудно видеть, что согласно следствию 8.30 из [8] процесс $Z_t = \mathcal{E}(-y \cdot B_t + (e^{-yx} - 1) * (\mu_L - \nu_L)_t)$ является равномерно интегрируемым мартингалом, следовательно, задает процесс плотности эквивалентной мартингальной меры. Параметры Гирсанова при этом имеют вид $\beta = -y, Y(x) = e^{-yx}$. Отсюда получаем $\mathbf{E} \exp(-yL)_T = \exp(T\psi(y)) < \infty$, что и требовалось показать.

Теперь докажем, что пункт 3 леммы эквивалентен пункту 1. Рассмотрим формулу (5) леммы 2, для $H_t = y, y \in \mathbb{R}$. Если $y \notin \mathfrak{D}$, то внутренний интеграл в ней расходится для любого t . Если $y \in \mathfrak{D}$, то тогда внутренний интеграл сходится для любого t к одной и той же константе $D_1 < +\infty$, а внешний интеграл от 0 до t равен $D_1 t$ и является процессом ограниченной вариации. Значит, только при $y \in \mathfrak{D}$ X является экспоненциально специальным семимартингалом. Согласно определению \mathfrak{D} и лемме 1 это эквивалентно конечности интеграла в (6), что и требовалось показать. \square

В доказательстве леммы 3 был введен процесс плотности Z для некоторой эквивалентной меры, обозначим ее через Q . С помощью теоремы III.3.24 в [9] для процесса L нетрудно посчитать триплет характеристик (B', C', ν'_L) относительно этой меры. Он имеет вид

$$B'_t = b't, C'_t = c't, \nu'_L(\omega, dt, dx) = dt\nu'(dx),$$

где

$$\begin{aligned} b' &= b - cy + h(x)(e^{-yx} - 1) * \nu, \\ c' &= c, \\ \nu' &= Y\nu = e^{-yx}\nu, \end{aligned} \quad (8)$$

то есть является детерминированным и однородным. Таким образом L остается процессом Леви по новой мере Q .

Перейдем к основной части доказательства теоремы.

Запишем неравенство для вогнутых функций, примененное к $U(x) = 1 - e^{-x}$ и случайным величинам X_T^*, X_T :

$$U(X_T) \leq U(X_T^*) + (X_T - X_T^*)U'(X_T^*). \quad (9)$$

Из этой формулы видно, что если $X^* \in \mathcal{X}$ такой, что для любого $X \in \mathcal{X}$ $\mathbf{E}(X_T^* - X_T)U'(X_T^*) \geq 0$ и $\mathbf{E}U(X_T^*) > -\infty$, то тогда X^* будет являться оптимальным портфелем для меры P . С учетом формулы для U это можно переписать как

$$\mathbf{E}(X_T - X_T^*) \exp(-X_T^*) \leq 0. \quad (10)$$

Преобразуем данное выражение, предполагая, что $X^* = 1 + y^*L$ для константы $y^* \in \mathfrak{D}$, определенной в формулировке теоремы. В лемме 3 мы вывели, что подобный процесс будет являться экспоненциально специальным семимартингалом, $\mathbf{E}(1 - e^{-X_t^*}) > -\infty, 0 \leq t \leq T$ и $\exp(-X_T^*) = Z_T \exp(\psi(y^*)) = \exp(\psi(y^*))Z_T$, Z_T определяет меру Q . Поэтому

$$\mathbf{E}(X_T^* - X_T)U'(X_T^*) = \exp(\psi(y^*))\mathbf{E}_Q(X_T^* - X_T).$$

Заметим, что интеграл

$$\int_{x>1} x d\nu' = \int_{x>1} x e^{-y^*x} d\nu$$

конечен ввиду конечности F в y^* (см. лемму 1), значит $\mathbf{E}_Q X_T^* < \infty$ и из (8)

$$\mathbf{E}_Q X_T^* = 1 + Ty^*(b' + \int_{x>1} x d\nu') = 1 + Ty^*F(y^*).$$

Подсчитаем математическое ожидание $\mathbf{E}_Q X_T$. Так как $X \in \mathcal{X}$, то по лемме 2 должно быть выполнено $H_t \in \mathfrak{D} dPdt$ п.в. Процесс $X = H \cdot L$ как интеграл по процессу Леви является семимартингалом. Так как H ограничен и процесс $X^c + h * (\mu - \nu)$ имеет конечный второй момент, то при интегрировании по нему мартингальные свойства сохранятся (см. I.4.2, I.4.40 в [9]), то есть $H \cdot (X^c + h * (\mu - \nu))$ есть мартингал с конечным вторым моментом. Отсюда $\mathbf{E}_Q H \cdot (X^c + h * (\mu - \nu')) = 0$.

Значит, в случае своего существования $\mathbf{E}_Q X_T$ совпадает с математическим ожиданием интеграла по оставшимся компонентам. Пусть $G_t = t$, тогда $\mathbf{E}_Q X_T = \mathbf{E}_Q (H \cdot (b'G + (x - h) * \mu))_T$. Так как $(x - h) * \nu'$ есть детерминированный конечный процесс, то это выражение можно записать как $\mathbf{E}_Q (H \cdot (b'G + (x - h) * \nu'))_T = \int_0^T L'_t dt$, где

$$\begin{aligned} L'_t &= H_t(b - cy^* + \int h(x)(e^{-y^*x} - 1)\nu(dx)) + \int H_t(x - h)e^{-y^*x}\nu(dx) \\ &= H_t(b - cy^* + \int (xe^{-y^*x} - h(x))\nu(dx)) = -H_t F(y^*). \end{aligned}$$

Так как процесс H ограничен, то определено $\mathbf{E}_Q \int_0^T L'_t dt$, а значит, и $\mathbf{E}_Q X_T$. Поэтому $\mathbf{E}_Q (X_T - X_T^*) = -F(y^*)\mathbf{E}(\int_0^T (H_t - y^*)dt)$. Если $F(y^*) = 0$, то $\mathbf{E}_Q (X_T - X_T^*) = 0$. Если $F(y^*) \neq 0$, то по пункту 2 леммы 1 $|y^*| < \infty$ и $0 < F(y^*) < \infty$, значит $y^* \in \mathfrak{D}$. Так как $H_t \geq y^*$ п.в., то $\mathbf{E}_Q (X_T - X_T^*) \leq 0$. Отсюда получаем, что для данного X^* соотношение (10) всегда выполнено. В (9) справа все математические ожидания конечны. Теорема доказана.

Как уже было отмечено, в случае экспоненциальной функции полезности у нас нет естественного ограничения на множество $\mathcal{X}(x)$, в отличие от логарифмического и степенного случаев. Поэтому для определения множества процессов капиталов возможны различные подходы. При этом понятно, что совсем убирать ограничения на $\mathcal{X}(x)$ нельзя, иначе в большинстве случаев нетрудно подобрать такую последовательность капиталов $X^n \in \mathcal{X}(x)$, что при $n \rightarrow +\infty$ $X^n \rightarrow +\infty$ п.н., и на ней $\mathbf{E}U(X_T^n)$ будет п.н. достигать значения $U(+\infty)$, что влечет $u(x) = 1$.

Во многих работах, к примеру [12, 19], рассматривалось множество $\mathcal{X}_b(x)$ процессов капиталов вида $x + H \cdot L$, ограниченных снизу некоторой константой. В [12] задача (2) исследовалась для случая, когда $\exists y^* \geq 0 : F(y^*) = 0$, и тогда максимальное значение полезности достигалось на последовательности портфелей X^n , где X^n является процессом $x + y^*L$, остановленным в момент достижения нижней границы $-n$. Как мы можем видеть из доказательства теоремы 1, наличие корня у F означает, что L является мартингалом по мере Q . Условие $y^* \geq 0$ нужно для того, чтобы решение в случае наличия у L неограниченных сверху скачков приближалось последовательностью ограниченных снизу процессов капитала. В нашей же постановке задачи удастся избежать неудобств, что возникают в модели с $\mathcal{X}_b(x)$. Мы используем другое множество $\mathcal{X}(x)$, которое допускает все возможные в исходной модели немонотонные процессы Леви L , не предполагая наличие неотрицательного корня у F . Решение X^* , на котором достигается максимальное значение полезности, принадлежит множеству $\mathcal{X}(x)$, а не достигается на последовательности. Предположения о наличии корня у F и о его неотрицательности в случае существования отсутствуют.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 условие $H \in \mathfrak{D}$ мы использовали лишь в том случае, когда у F нет корня, для того, чтобы интеграл $\int_0^T (H_t - y^*) dt$ был неотрицательным. В свою очередь, как видно из леммы 2, условие $H \in \mathfrak{D}$ выполнено благодаря тому, что в теореме процесс X предполагается экспоненциально специальным. При наличии же корня у F множество \mathcal{X} для теоремы 1 можно задать просто как

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X \text{ вида (1), } H \text{ ограничен}\}.$$

Для сравнения экспоненциального случая с логарифмическим и степенным напомним, что там решение основной задачи имеет вид $X^* = \mathcal{E}(y^*L)$, где y^* зависит от функции полезности и несколько отличается от того, что было введено в теореме 1 (см. [6, 7]). Нетрудно заметить определенное сходство решений. Финансовый же смысл у этих y^* немного отличается. В экспоненциальном случае это есть капитал, вложенный в акции, а в логарифмическом и степенном случае это есть отношение капитала, вложенного в акции, к общему капиталу инвестора.

3 Двойственная задача

Традиционно в качестве двойственной задачи к (2) рассматривается следующая задача:

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} \mathbf{E}V(Y_T), \quad (11)$$

где $V(y) = \sup_{x>0} (U(x) - xy)$, $y > 0$. Для нашей функции $U(x) = 1 - \exp(-x)$ имеем $V(y) = 1 - y + y \ln y$. В соответствии с работой Шахермайера [19] и другими множество $\mathcal{Y}(y)$ положим равным множеству $\mathcal{M}(y)$ таких мартингалов Y , что Y_T/y есть абсолютно

непрерывная по P мартингальная мера. Также нам необходимо предположить, что у функции F есть корень. Задача примет вид

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} \mathbf{E} (Y_T \ln Y_T - Y_T + 1) \quad (12)$$

$$= \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} \mathbf{E} (Y_T \ln Y_T) - y + 1 \quad (13)$$

$$= y \ln y + yv(1) - y + 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathcal{M}(y) = y\mathcal{M}(1)$ и $\mathbf{E}Y_T = y$. Как мы видим, двойственную задачу (12) достаточно решить для $y = 1$ или для любого другого положительного y .

Задача (13) при $y = 1$ в литературе также именуется задачей о поиске меры, минимизирующей энтропию. Одной из наиболее известных работ по данной теме, связанной также и с процессами Леви, является статья Эшпе и Швайцера [3], где авторы минимизируют энтропию на множестве таких мер Q , по которым исходный процесс Леви L является мартингалом. Показано, что на минимальной мартингальной мере процесс L также останется мартингалом. Помимо этого, при наличии корня у функции F решение для $y = 1$ имеет вид

$$C_0(t) \exp(-y^* L_t),$$

где $C_0(t) = \exp(-\psi(y^*)t)$ есть детерминированная функция, зависящая только от t (здесь ψ та же, что и в (7)). Это будет следовать из дальнейших рассуждений. Помимо данной статьи, упомянем также работу [5], в которой авторы более детально рассматривают данную задачу для процессов Леви, широко используя при анализе преобразования Эшпера, и книгу [16], где представлены многие результаты для мер, минимизирующих энтропию и сохраняющих свойство процесса Леви.

Для выпуклой функции $V(y) = y \ln y$ и случайных величин Y_T, Y_T^* можно применить неравенство $V(y_1) - V(y_2) \geq V'(y_2)(y_1 - y_2)$, откуда

$$Y_T(\ln Y_T - 1) \geq Y_T^*(\ln Y_T^* - 1) + (Y_T - Y_T^*) \ln Y_T^*.$$

Отсюда видно, что если математическое ожидание первого слагаемого в правой части конечно, а второго — неотрицательно, то Y^* определяет искомое решение двойственной задачи. Проверим, что процесс вида $Y^* = C_0(t) \exp(-y^* L)$ действительно задает решение. Нам нужно показать, что $\mathbf{E}Y_T^*(\ln Y_T^* - 1) < \infty$, $Y^* \in \mathcal{M}(1)$ и $\mathbf{E}(Y_T - Y_T^*) \ln Y_T^* \geq 0$. Из (7) следует, что $\mathbf{E}(1 + y^* L_T) \exp(-1 - y^* L_T) = \mathbf{E} \exp(-1 + \psi(y^*)T) \mathbf{E}_Q X_T^* = \mathbf{E} \exp(-1 + \psi(y^*)T)$, где Q есть абсолютно непрерывная мера с процессом плотности $Z_t = \mathcal{E}(-y^* \cdot B_t + (e^{-y^* x} - 1) * (\mu_L - \nu_L)_t)$. Отсюда получаем, что $\mathbf{E}Y_T^* \ln Y_T^* < \infty$. Более того, из доказательства основной теоремы следует, что, так как F имеет корень, то для новой меры Q выполнено $\mathbf{E}_Q L_T = 0$, то есть L есть мартингал по ней. Значит, $Y^* \in \mathcal{M}(1)$. Осталось проверить, что $\mathbf{E}(Y_T - Y_T^*) \ln Y_T^* \geq 0$. Так как Y^* и Y задают мартингальные меры, то $\mathbf{E}(Y_T - Y_T^*) \ln Y_T^* = \mathbf{E}(Y_T^* - Y_T)(C_0(T) + 1 - X_T^*) = 0$, что и требовалось показать. Значит, $Y_t^* = C_0(t) \exp(-y^* L_t)$ действительно задает решение двойственной задачи.

Заметим, что при нашей постановке основной и двойственной задач для некоторой константы y_0 выполнено естественное соотношение

$$Y_T^* = y_0 U'(X_T^*),$$

а при $V(y) = 1 - y + y \ln y$ для $v(y)$ из (11) и $u(x)$ выполнено

$$v(y) = \sup_{x \geq 0} [u(x) - xy].$$

Эти соотношения всегда выполняются в логарифмическом и степенном случаях.

Изначально для двойственной задачи мы предположили, что у F есть корень. При другой постановке двойственной задачи это условие может поменяться. Упомянем работу [4], где двойственная задача формулировалась, вообще говоря, отлично от (13) и не на множестве эквивалентных мартингалльных мер. В силу этого, она не всегда сводится к задаче (13). Но в случае, когда у F есть корень, решение двойственной задачи в [4] лежит в классе эквивалентных мартингалльных мер и совпадает с Y^* .

Автор выражает благодарность А.А. Гушину за полезные замечания к данной работе.

Список литературы

- [1] *Biagini S., Sirbu M.*, A note on admissibility when the credit line is infinite // *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2012, v. 84, № 2–3, p. 157–169.
- [2] *Delbaen F., Grandits P., Rheinländer T., Samperi D., Schweizer M., Stricker C.*, Exponential hedging and entropic penalties // *Mathematical finance*, 2002, v. 12, № 12, p. 99–123.
- [3] *Essche F., Schweizer M.*, Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why // *Stoch. Proc. Appl.*, 2005, v. 115, № 2, p. 299–327.
- [4] *Gushchin A. A., Khasanov R. V., Morozov I. S.*, Some functional analytic tools for utility maximization // *Modern Stochastics and Applications*, 2014, v. 90, p. 267–285.
- [5] *Hubalek F., Sgarra C.*, Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models // *Quantitative Finance*, 2006, v. 6, № 2, p. 125–145.
- [6] *Иванов М. Ю.*, Максимизация логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // *Вестник МГУ, Сер. 1. Математика. Механика*, 2014, № 6, с. 16–24.
- [7] *Иванов М. Ю.*, О связи задач максимизации степенной и логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // *Теория вероятностей и ее применения*, 2014, № 4, с. 781–790.
- [8] *Jacod J.*, *Calcul stochastique et problèmes de martingales* // Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979.
- [9] *Jacod J., Shiryaev A. N.*, *Limit theorems for stochastic processes*, 2nd edition, Springer, 2003.
- [10] *Kabanov Y. M., Stricker C.*, On the optimal portfolio for the exponential utility maximization: remarks to the six-author paper // *Mathematical Finance*, 2002, v. 12, № 2, p. 125–134.
- [11] *Kallsen J.*, A didactic note on affine stochastic volatility models, From stochastic calculus to mathematical finance // Springer, Berlin, 2006, p. 343–368.
- [12] *Kallsen J.*, Optimal portfolios for exponential Lévy processes // *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, v. 51, p. 357–374.

- [13] *Kallsen J., Shiyayev A. N.*, The cumulant process and Esscher's change of measure // Finance and Stochastics, 2002, v. 6, № 4, p. 397–428.
- [14] *Kramkov D., Schachermayer W.*, The condition on the asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Annals of Applied Probability, 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
- [15] *Круглов В. М.*, Замечание к теории безгранично делимых распределений // Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 2, с. 330–336.
- [16] *Miyahara Y.*, Option pricing in incomplete markets: Modeling based on geometric Lévy processes and minimal entropy martingale measures. Imperial College Press, 2012.
- [17] *Sato K.-I.*, Lévy processes and infinitely divisible distributions. UK, Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
- [18] *Schachermayer W.*, A super-martingale property of the optimal portfolio process // Finance and Stochastics, 2003, v. 7, № 4, p. 433–456.
- [19] *Schachermayer W.*, Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative // Annals of Applied Probability, 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.

Переमेжаемость и произведение случайных матриц

Илларионов Е.А.¹, Соколов Д.Д.², Тутубалин В.Н.³

Систематическое изучение явления перемежаемости, т.е. прогрессивного роста старших статистических моментов векторного поля, переносимого случайной средой, в контексте астрофизических задач и задач магнитной гидродинамики восходит к работам Я.Б. Зельдовича. В то время математическая сторона дела находилась еще в стадии разработки, и связь между различными задачами была неясной. Более современные результаты по теории произведения случайных матриц (теоремы Ферстенберга) позволяют по-новому взглянуть на явление перемежаемости. В нашей работе мы на нескольких примерах рассмотрим, какие особенности возникают при изучении величин мультипликативного типа.

1 Введение

Интерес к изучению явления перемежаемости во многом возник в контексте физических задач, в которых под воздействием случайных неоднородностей в среде наблюдался особый характер развития переносимых векторных полей. Наглядное представление о таких процессах дает пример, который мы позаимствуем из работы [1].

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин c_n , принимающих значения 0 или 2 с вероятностью $p = 1/2$, и пусть $a_n = c_1 c_2 \dots c_i \dots c_n$. Нас будет интересовать поведение статистических свойств a_n , когда $n \rightarrow \infty$. Ясно, что последовательность a_n сходится к нулю в любом вероятностном смысле, например, с вероятностью 1, т.к. рано или поздно одно из c_i , входящих в определение a_n , окажется нулем. Тем не менее, для любого конечного n существует лишь одна неубывающая реализация a_n равная 2^n . Вероятность такой реализации 2^{-n} . Оказывается, что именно это реализация сказывается в том, что математическое ожидание a_n отлично от нуля

$$\langle a_n \rangle = 0 \times (1 - (1/2)^n) + 2^n \times (1/2)^n = 1, \quad (1)$$

и влечет экспоненциальный рост второго момента

$$\langle a_n^2 \rangle = 0 \times (1 - (1/2)^n) + 2^{2n} \times (1/2)^n = 2^n. \quad (2)$$

¹Илларионов Егор Александрович, illarionov.ea@gmail.com, аспирант, младший научный сотрудник ЛВС, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

²Соколов Дмитрий Дмитриевич, sokoloff.dd@gmail.com, профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

³Тутубалин Валерий Николаевич, vntutubalin@yandex.ru, профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Нетрудно проверить, что рост старших моментов будет еще больше, чем для $\langle a_n^2 \rangle$.

Приведенный пример кажется достаточно искусственным, однако подобную картину можно наблюдать и в более реалистичных задачах [2]. Рассмотрим популяцию бактерий, плотность распределения которых в пространстве обозначим $\phi(\mathbf{x})$. Пусть скорость роста (убыли) популяции задается случайным полем $U(\mathbf{x})$. Пренебрежем возможным перемещением бактерий в пространстве и примем, что в каждой точке U является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Тогда

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = U\phi. \quad (3)$$

Если поле U не зависит от времени, то решение этого уравнения есть просто $\phi = \exp(Ut)$ (начальное условие возьмем в виде $\phi(0, \mathbf{x}) = 1$). Беря среднее по распределению, получаем $\langle \phi \rangle = \exp(\sigma^2 t^2 / 2)$, т.е. средняя плотность популяции растет по времени сверхэкспоненциально. Если U зависит от времени, например, оставаясь постоянным в течение промежутка τ и заменяясь на независимое значение в следующий промежуток, то

$$\phi(n\tau, \mathbf{x}) = \exp \sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{x})\tau \propto \exp(\sqrt{n\tau^2}\zeta) \propto \exp(\sqrt{\tau}\zeta). \quad (4)$$

Здесь U_i обозначают реализации поля U в отдельных промежутках времени, ζ – стандартная нормальная величина, которая возникает из применения центральной предельной теоремы. Мы видим, что популяция растет с субэкспоненциальной скоростью. Подсчет для старших моментов дает, однако, экспоненциальный рост и скорости роста, нормированные на порядок k момента $\langle \phi^k \rangle$, возрастают при увеличении номера k . Подобное явление получило название перемежаемости.

Конечно, ситуация требует включение диффузии в уравнение (3). При этом, как показано в [2], [3], эффект перемежаемости проявляется в еще большей степени. В нашей работе мы рассмотрим один аспект этой проблемы и зададимся изучением эффекта перемежаемости для векторных полей.

Рассмотрим в рамках лагранжева подхода эволюцию магнитного поля $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$ в случайном потоке $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ проводящей жидкости. Если пренебречь омической диффузией, то эволюционное уравнение примет вид

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{H}\hat{A}, \quad (5)$$

в котором матрица \hat{A} составлена из частных производных $\partial v_i / \partial x_j$ (вектора будем записывать в строчку). Пусть поток \mathbf{v} несжимаемой жидкости теряет память в моменты времени $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$. Тогда

$$\mathbf{H}(n\tau) = \mathbf{H}(0)\hat{B}_1\hat{B}_2 \dots \hat{B}_n, \quad (6)$$

где \hat{B}_i – независимые случайные матрицы, которые описывают усиление поля в промежутки продолжительностью τ . В случае, когда матрица \hat{A} постоянна в промежутке времени памяти и $\hat{A}(t) = \hat{A}_i$ в i -ом временном интервале, то $\hat{B}_i = \exp(\hat{A}_i\tau)$. Заметим, что более сложная зависимость от времени приводит к представлению матриц \hat{B}_i через мультипликативный интеграл [4]. Условие несжимаемости жидкости влечет унимодулярность матриц \hat{B}_i , т.е. $\det \hat{B}_i = 1$. Далее мы также будем предполагать поток однородным по времени, так что распределение матриц \hat{B}_i не зависит от i .

Как мы видим, уравнение (6) сводит задачу об эволюции магнитного поля вдоль лагранжевой траектории к задаче о произведении большого числа независимых случайных унимодулярных матриц. Соответствующая математическая теория, посвященная вопросам произведения случайных матриц, была разработана Г. Ферстенбергом [5], а ее представление в рамках задач гидромеханики предложено в работе [6]. Переложение результатов Ферстенберга в терминах поведения отдельных матричных элементов было сделано в работе [7].

Основной результат теорем Ферстенберга состоит в том, что произведение случайных матриц растет экспоненциально, в отличие от произведения скалярных величин (4), которые растут субэкспоненциально. Выясняется, что при больших n происходит так называемое спонтанное нарушение симметрии задачи и возникает случайный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ такой, что вектор \mathbf{H} вытягивается вдоль направления вектора \mathbf{e}_1 и растет экспоненциально по n с показателем λ (показатель Ляпунова). Присутствие явления перемежаемости вызывает еще более бурный рост старших статистических моментов поля $\langle |\mathbf{H}|^p \rangle$. После соответствующей нормировки, скорости роста моментов λ оказываются больше λ и растут по мере увеличения номера p .

Основным результатом теорем Ферстенберга [5] является то, что в подавляющем большинстве случаев показатель Ляпунова оказывается строго положительным и может быть вычислен путем интегрирования по некоей инвариантной мере на особом пространстве, на котором рассматривается действие матриц. В качестве такого пространства берется сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками. В то же время, найти явное представление для этой меры удается лишь в ряде простейших случаев, а численные попытки решения до недавнего времени не предпринимались. К настоящему моменту в этом направлении во многом удалось продвинуться на примере уравнения Якоби со случайным параметром кривизны [8], [9].

2 Рост магнитного поля в случайном потоке

Мы сосредоточимся на случае статистически однородного и изотропного течения проводящей жидкости и рассмотрим, как происходит рост переносимого ею магнитного поля. В предположении, что магнитной диффузией можно пренебречь, задача сводится к изучению уравнения (5). Как будет показано далее, наличие определенной степени симметрии в задаче позволяет избежать трудностей вычисления инвариантной меры, а показатели роста старших моментов поля \mathbf{H} удается выразить в конечной формуле.

Итак, пусть корреляционный тензор V_{ij} поля скоростей задан в однородной, изотропной и зеркально-симметричной форме

$$V_{ij} = \langle v_i(\mathbf{x}), v_j(\mathbf{y}) \rangle = \frac{v^2}{3} (F(r^2)\delta_{ij} + \frac{r}{2}F'(r^2)(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2})), \quad (7)$$

где $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Для определенности положим $\langle v_i(\mathbf{x}), v_i(\mathbf{y}) \rangle = v^2 f(r^2)$ и $f(r^2) = \exp(-r^2)$. Тогда продольная корреляционная функция $F(r^2) = \exp(-3r^2/5l^2)$, т.е. мы принимаем l в качестве характерного масштаба и единицы длины, а время обновления τ определяется характерным временем l/v . Пусть на разных интервалах времени памяти вектора \mathbf{v} независимы, а независимые матрицы частных производных \hat{A}_n имеют гауссовское распределение с нулевым средним.

Рассмотрим, как устроены корреляции между элементами матрицы \hat{A}_n . Исходя из наших предположений, они не должны зависеть от n . Поскольку матрица \hat{A}_n имеет размер-

ность 3×3 , то ее ковариационная матрица B будет иметь размерность 9×9 , а нумерацию элементов выберем так, что $\text{cov}(A_{ik}, A_{jp}) = B_{3(i-1)+k, 3(j-1)+p}$.

Беря частные производные V_{ij} по x_k и y_p и устремляя $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ мы получим (опуская общий множитель $v^2/5l^2$)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что распределение матрицы \hat{A} инвариантно по отношению к преобразованиям вида $\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}^T$, где \hat{Q} – ортогональная матрица. Отсюда уже нетрудно вывести, что мерой на двумерной сфере со склеенными диаметрально противоположными точками, инвариантной по отношению к действию матриц $\exp \hat{A}$, будет мера Хаара. Наличие подобной симметрии распределения по отношению к вращениям формирует один из тех исключительных случаев, когда инвариантную меру удается выписать явно.

Показатель Ляпунова может быть вычислен как математическое ожидание

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \mathbf{E} \log \|\mathbf{w} \exp \hat{A}\tau\|, \quad (9)$$

где вектор $\mathbf{w} = (x, y, z)$ распределен согласно инвариантной мере на двумерной сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками, а τ – время обновления (которое есть удвоенное время памяти).

Вычисление математического ожидания (9) представляет собой задачу, которую следует изучать отдельно. С физической точки зрения более актуальным является вопрос о том, насколько оправдано предположение о гауссовском распределении для матриц \hat{A} в лагранжевом подходе. Наиболее естественным здесь представляется путь, использующий разложение матричной экспоненты в правой части (9) в ряд по степеням малого параметра τ . Ограничившись степенью τ^2 , будем иметь

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \mathbf{E} \log \|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \frac{1}{2}\hat{A}^2\tau^2)\|, \quad (10)$$

где \hat{I} обозначает единичную матрицу.

Как уже было отмечено, наличие вращательной симметрии для распределения \hat{A} позволяет выписать явное выражение для скоростей роста старших моментов с произвольным номером p :

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log(\mathbf{E}\|\mathbf{w} \exp \hat{A}\tau\|^p), \quad (11)$$

или, ограничившись первыми членами ряда:

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log(\mathbf{E}\|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \frac{1}{2}\hat{A}^2\tau^2)\|^p). \quad (12)$$

Отметим лишь, что в общем случае соотношение (11) не выполняется и формулу для скоростей роста старших моментов не удастся вывести из тех же соображений, что используются при вычислении показателя Ляпунова.

Дальнейшее вычисление λ_p требует лишь аккуратного приведения слагаемых. Пусть $\|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \hat{A}^2\tau^2/2)\|^2 = 1 + \alpha\tau + \beta\tau^2$, где мы вновь ограничиваемся точностью τ^2 , α состоит из различных линейных комбинаций элементов матрицы \hat{A} , β составлено из попарных произведений элементов той же матрицы, а 1 возникает из условия $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Приведем явное выражения для α :

$$\alpha = 2(A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{21}xy + A_{13}xz + A_{31}xz + A_{22}y^2 + A_{23}yz + A_{32}yz + A_{33}z^2) \quad (13)$$

и опустим более длинное представление для β . Прямой подсчет с использованием известных ковариаций (8) даст $\mathbf{E}\alpha^2 = 8v^2/5l^2$ (в то время как $\mathbf{E}\alpha = 0$) и $\mathbf{E}\beta = 2v^2/l^2$. Интегрирование по мере Хаара не должно представлять затруднений, поэтому мы сразу получаем

$$\lambda = \frac{1}{4\tau} \mathbf{E} \log(1 + \alpha\tau + \beta\tau^2) = \frac{1}{4\tau} \mathbf{E}(\alpha\tau + \beta\tau^2 - \frac{1}{2} \alpha^2\tau^2) = \frac{3}{10} \frac{v}{l}. \quad (14)$$

И аналогичным образом

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log \mathbf{E}(1 + \alpha\tau + \beta\tau^2)^{p/2} = \frac{1}{2p\tau} \log(1 + (3p + p^2)\tau^2) = \frac{(3 + p)v}{10} \frac{1}{l}. \quad (15)$$

Мы видим, что моменты растут прогрессивным образом с увеличением порядка p , что характерно для явления перемежаемости. Заметим также, что (15) дает ту же оценку λ , что и (14), если положить $p = 0$.

Отдельно отметим полученную оценку для второго момента:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{v}{l}, \quad (16)$$

которая оказывается немного меньше, чем выражение $3v/4l$, которое получается при выводе уравнения Казанцева для короткокоррелированного приближения [4]. На наш взгляд, такое расхождение может быть следствием различия евклидова и лагранжева подхода, в рамках которых выводится уравнение Казанцева и записывается уравнение (5). Однако этот вопрос требует дальнейшего прояснения.

Зная все моменты случайной величины $\xi = \|\mathbf{w}\hat{A}\|$, можно восстановить ее характеристическую функцию

$$\chi_\xi(t) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(it)^p}{p!} \mathbf{E}\xi^p. \quad (17)$$

Из (15) следует, что $\mathbf{E}\xi^p = 1 + (3 + p)p\tau^2/5$ с точностью до членов порядка τ^2 . Подставляя это в (17) получим

$$\chi_\xi(t) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(it)^p}{p!} (1 + (p^2 + 3p)\tilde{\tau}^2) = e^{it} (1 + 4i\tilde{\tau}^2 t - \tilde{\tau}^2 t^2), \quad (18)$$

где мы обозначили $\tilde{\tau} = \tau/\sqrt{5}$. Полученная характеристическая функция не совпадает с характеристической функцией ни нормального, ни лог-нормального распределения. Обратное преобразование Фурье функции $\chi_\xi(t)$ также дает плотность распределения весьма непривычного вида, составленную из дельта-функции и ее производных:

$$\rho_\xi(x) = \delta(1-x) - 4\tilde{\tau}^2\delta'(1-x) + \tilde{\tau}^2\delta''(1-x). \quad (19)$$

Вновь вычисляя показатель Ляпунова $\lambda = \mathbf{E} \log \xi / 2\tau$ согласно найденному распределению, получаем

$$\frac{1}{2\tau} \mathbf{E} \log \xi = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \log(x) \rho_\xi(x) dx = \frac{3\tilde{\tau}^2}{2\tau} = \frac{3\tau}{10}, \quad (20)$$

что ожидаемо совпадает с оценкой (14).

3 Заключение

Мы познакомились с небольшим кругом задач, в которых возникает перемежаемый характер роста векторных полей в случайной среде. Отметим, что во многом регулярное исследование этих вопросов было инициировано Я.Б. Зельдовичем и его учениками в 80-х годах прошлого века. Конечно, наличие общей проблемы, объединяющей задачи, приходившие из различных областей физики, таких как космология или магнитная гидродинамика, было не столь очевидным в те годы, и ее систематическое изучение началось значительно позднее. Немалую роль в этом сыграла относительная труднодоступность иностранных журналов, в которых печатались математические вопросы, связанные с явлением перемежаемости и произведением случайных матриц. Замечательным образом, исходя из физических предпосылок, удалось прийти к тем же выводам, к которым пришло развитие математической теории вопроса. Это лишний раз демонстрирует актуальность изучения данной проблемы и ее прямую связь с физическими задачами.

Список литературы

- [1] *Зельдович Я.Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.*, Перемежаемость в случайной среде // УФН, 1987, т. 30, № 5, с. 353–369.
- [2] *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S.A., Sokoloff D. D.*, Intermittency of passive field in random media // Sov. Phys. – JETP, 1985, v. 62, № 6, p. 1188–1194.
- [3] *Sokoloff D., Rubashny A.*, Small-scale dynamo in Riemannian spaces of constant curvature // GAFD, 2013, v. 107, № 4, p. 403–410.
- [4] *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A.*, Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Sov. Sci. Rev., 1988, Sec. C, v. 7, p. 1–110, Harwood Acad. Publ.
- [5] *Furstenberg H.*, Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v.108, p. 377–428.
- [6] *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A.*, Kinematic dynamo in the linear velocity field // J.Fluid Mech., 1984, v. 144, p. 1–11.

- [7] *Tutubalin V. N.*, A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // *Symposia Mathematica.*, 1977, v. XXI, p. 101–116.
- [8] *Илларионов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н.*, Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // *Вычислительные методы и программирование*, 2012, т. 13, с. 218–225.
- [9] *Илларионов Е. А.*, Стационарное распределение для уравнения Якоби со случайным параметром кривизны // *Вычислительные методы и программирование*, 2013, т. 14, с. 38–43.

Оптимизация и предельное распределение в дискретной модели страхования

Карапетян Н.В.¹

В работе исследуется модель работы страховой компании в дискретном времени. Предполагается, что компания использует барьерную стратегию выплаты дивидендов. Устанавливается предельное распределение времени до разорения, нормированное своим математическим ожиданием. Далее вводится дополнительное предположение, что если капитал компании опустился ниже нуля, акционеры вкладывают собственные средства, препятствуя банкротству компании. Решается задача максимизации выплаченных акционерам дивидендов и доходов с учетом покрытия убытков. В предположении, что капитал компании после разорения возвращается на некоторый ненулевой уровень, исследуются стратегии, максимизирующие дивиденды и доход при бесконечном времени работы компании.

1 Введение

Изучению моделей работы страховых компаний посвящено множество трудов, начиная с работы Лундберга [8] в 1903 году. Однако долгое время исследования сводились в основном к минимизации вероятности разорения. В 1957 году на Международном страховом конгрессе Де Финетти [5] впервые предложил оценивать работу страховой компании с точки зрения акционеров и искать стратегии, максимизирующие их доход, т.е. выплаченные акционерам дивиденды до разорения. Для многих моделей и в дискретном, и в непрерывном времени оказалось, что оптимальной будет барьерная стратегия (см., например, [4], [7], [12]). Она заключается в том, что при превышении капиталом барьера весь излишек выплачивается в качестве дивидендов. Список работ, посвященных оптимизации дивидендных стратегий страховой компании, можно найти в [1], [2].

Сам Де Финетти в своей работе рассматривал модель в дискретном времени, в которой капитал изменялся на 1 за единицу времени, а дивиденды рассчитывались в соответствии с барьерной стратегией. Другие модели работы компании в дискретном времени предполагали, что страховые требования могут иметь как дискретное, так и непрерывное распределение [15], некоторые требования выполняются с задержкой [10], поступающие премии и выплачиваемые дивиденды рассчитываются в соответствии с биномиальной моделью [9]. Мы рассмотрим модификацию описанной Де Финетти модели, при которой размер поступающих за единицу времени премий равен 1, величина страховых требований может

¹Карапетян Нарине Вигеновна, karanar@mail.ru, соискатель, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

быть равна 0, 1 или 2, а дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией. Для этой модели будет найдено предельное распределение времени до разорения, нормированного своим математическим ожиданием.

С учетом неизбежности разорения при использовании барьерной дивидендной стратегии Диксон и Уотерс [6] предложили изучать стратегию работы компании не с точки зрения полученных акционерами дивидендов, а с точки зрения итоговой прибыли, т.е. за вычетом покрытых ими убытков, понесенных компанией при разорении. Это также давало возможность продолжить работу компании после разорения. Диксон и Уотерс в основном занимались моделями с непрерывным временем, используя дискретные модели в качестве аппроксимации. В [16] изучен вопрос существования предельного распределения капитала компании для модели с бесконечным временем работы. Мы докажем существование оптимальных барьерных дивидендных стратегий как для времени работы компании до разорения, так и, используя предложенную Диксоном и Уотерсом модификацию, в модели с бесконечным временем. Полученные результаты продолжают исследования моделей в бесконечном времени, приведенные в [11].

2 Описание модели и вспомогательные результаты

Мы изучаем модель работы страховой компании с дискретным временем. Предполагаем, что компания использует барьерную стратегию выплаты дивидендов: как только капитал компании достигает уровня $n \in \mathbb{N}$, все поступающие премии выплачиваются в качестве дивидендов, пока капитал компании ниже уровня n , дивиденды не выплачиваются. Пусть начальный капитал $x \leq n$ — неотрицательное целое число. Величина полученной компанией премии за единицу времени равна 1, а требования z_i — независимые одинаково распределенные случайные величины:

$$\mathbf{P}(z_i = 0) = p, \quad \mathbf{P}(z_i = 1) = r, \quad \mathbf{P}(z_i = 2) = q, \quad p + q + r = 1,$$

т.е. за один шаг капитал компании может увеличиться на 1 с вероятностью p , уменьшиться на 1 с вероятностью q и остаться неизменным с вероятностью r . Тогда капитал компании на i -м шаге можно записать следующим образом:

$$S_x(i) = \min(S_x(i-1) + 1 - z_i, n), \quad S_x(0) = x.$$

Обозначим через $\eta_x = \min(i : S_x(i) < 0)$ время работы компании до разорения при начальном капитале x и уровне выплаты дивидендов n . Наша цель — исследование предельного распределения $\frac{\eta_x}{\mathbf{E}\eta_x}$ при $r \rightarrow 1$. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Среднее время работы страховой компании до разорения $E_x = \mathbf{E}\eta_x$ при начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$ имеет вид при $p = q$*

$$E_x = \frac{-x^2 + (2n+1)x + 2(n+1)}{2p}, \quad (1)$$

при $p \neq q$

$$E_x = \frac{x+1}{q-p} + \frac{p}{(q-p)^2} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{-n-1} - \left(\frac{q}{p} \right)^{x-n} \right). \quad (2)$$

Доказательство. Величина E_x удовлетворяет разностному уравнению

$$E_x = pE_{x+1} + qE_{x-1} + rE_x + 1 \quad \text{при } 0 \leq x \leq n \quad (3)$$

с граничными условиями

$$E_{-1} = 0, \quad E_n = E_{n+1}.$$

При решении уравнения (3) возможны два случая ($p = q$ и $p \neq q$), требующие отдельного рассмотрения.

При $p = q$ в качестве частного решения неоднородного уравнения (3) возьмем $E_x = -\frac{x^2}{2p}$, а общее решение однородного уравнения будем искать в виде $A + Bx$. С помощью граничных условий найдем коэффициенты A и B .

$$\begin{cases} A - B = \frac{1}{2p}, \\ -\frac{n^2}{2p} = B - \frac{(n+1)^2}{2p}. \end{cases}$$

При $p \neq q$ частным решением будет $\frac{x}{q-p}$, а общее решение ищется как $A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x$. С помощью граничных условий запишем

$$\begin{cases} A + B\frac{p}{q} = \frac{1}{q-p}, \\ B\left(\frac{q}{p}\right)^n = B\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} + \frac{1}{q-p}. \end{cases}$$

Разрешив эти системы относительно A и B , получим требуемый вид (1), (2) для E_x . \square

Теперь подсчитаем производящую функцию целочисленной случайной величины η_x (см., например, [13]). Пусть $u_{x,k} = \mathbf{P}(\eta_x = k)$ — вероятность того, что компания разорится за время k при начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$. Справедливо разностное уравнение

$$u_{x,k} = pu_{x+1,k-1} + qu_{x-1,k-1} + ru_{x,k-1} \quad \text{при } 0 \leq x \leq n \text{ и } k \geq 1 \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u_{n,k} = u_{n+1,k}, \quad u_{-1,k} = 0 \quad \text{при } k \geq 1; \quad u_{-1,0} = 1, \quad u_{x,0} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq n.$$

Лемма 2. Производящая функция $U_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{x,k}s^k$ времени до разорения представляется в виде

$$U_x(s) = \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \frac{(\lambda_1(s) - 1)\lambda_1^{n-x}(s) + (1 - \lambda_2(s))\lambda_2^{n-x}(s)}{(\lambda_1(s) - 1)\lambda_1^{n+1}(s) + (1 - \lambda_2(s))\lambda_2^{n+1}(s)}, \quad (5)$$

где $\lambda_{1,2}(s)$ — корни квадратного уравнения $ps\lambda^2(s) + (rs - 1)\lambda(s) + qs = 0$.

Доказательство. Домножив (4) на s^k и просуммировав по k , получим

$$U_x(s) = psU_{x+1}(s) + qsU_{x-1}(s) + rsU_x(s). \quad (6)$$

Граничные условия в свою очередь приводят к равенствам

$$U_{-1}(s) = 1, \quad U_n(s) = U_{n+1}(s).$$

Представим $U_x(s)$ в виде $\lambda^x(s)$, тогда (6) превратится в квадратное уравнение

$$\lambda(s) = ps\lambda^2(s) + qs + rs\lambda(s)$$

с корнями

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1 - rs \pm \sqrt{(1 - rs)^2 - 4pqs^2}}{2ps}.$$

В дальнейшем для краткости будем опускать аргумент s в записи $\lambda_{1,2}(s)$.

Тогда $U_x(s) = A(s)\lambda_1^x + B(s)\lambda_2^x$, где $A(s)$ и $B(s)$ находятся из граничных условий

$$\begin{cases} \frac{A(s)}{\lambda_1} + \frac{B(s)}{\lambda_2} = 1, \\ A(s)\lambda_1^n + B(s)\lambda_2^n = A(s)\lambda_1^{n+1} + B(s)\lambda_2^{n+1}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$A(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2^{n+1}(1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{n+1} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{n+1}} \text{ и } B(s) = \frac{\lambda_2\lambda_1^{n+1}(\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{n+1} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{n+1}}.$$

Учитывая, что $\lambda_1\lambda_2 = \frac{q}{p}$, запишем

$$U_x(s) = \frac{\lambda_1^{x+1}\lambda_2^{n+1}(1 - \lambda_2) + \lambda_1^{n+1}\lambda_2^{x+1}(\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{n+1} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{n+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \frac{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{n-x} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{n-x}}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{n+1} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{n+1}},$$

что и дает искомый вид (5) для производящей функции. □

Лемма 3. *Выражение*

$$Q = \frac{(\mu_1 - 1)\mu_1^m + (1 - \mu_2)\mu_2^m}{\mu_1 - \mu_2}, \text{ где } \mu_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

является многочленом $P_m(z)$ с корнями $z_{j,m} = \cos \frac{2j+1}{2m+1}\pi$, $j = 0, \dots, m - 1$.

Доказательство. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mu_1^m - \mu_2^m &= (z + \sqrt{z^2 - 1})^m - (z - \sqrt{z^2 - 1})^m = \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{m-k} (z^2 - 1)^{\frac{k}{2}} - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{m-k} (z^2 - 1)^{\frac{k}{2}} (-1)^k = \\ &= 2\sqrt{z^2 - 1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} z^{m-2j-1} (z^2 - 1)^j, \end{aligned}$$

выражение Q перепишем в виде

$$Q = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{2j+1} z^{m-2j} (z^2 - 1)^j - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} z^{m-2j-1} (z^2 - 1)^j = P_m(z). \quad (7)$$

Получили многочлен степени m , существующий при всех значениях z . Исследуем корни многочлена $P_m(z)$.

Пусть $z \leq -1$. Тогда $\mu_2 \leq -1 \leq \mu_1 < 0$. Поскольку $\mu_1\mu_2 = 1$, запишем

$$Q = \sum_{j=0}^m \mu_1^j \mu_2^{m-j} - \sum_{j=0}^{m-1} \mu_1^j \mu_2^{m-j-1} = \frac{\sum_{j=0}^m \mu_1^{2j} - \sum_{j=0}^{m-1} \mu_1^{2j+1}}{\mu_1^m}.$$

Перейдем к модулю величины μ_1 , тогда

$$Q = (-1)^m \frac{\sum_{j=0}^m |\mu_1|^{2j} + \sum_{j=0}^{m-1} |\mu_1|^{2j+1}}{|\mu_1|^m}.$$

В зависимости от четности m будет всегда либо $Q < 0$, либо $Q > 0$.

Пусть $z \geq 1$. Тогда $\mu_1 \geq 1 \geq \mu_2 > 0$ и

$$Q = \frac{\sum_{j=0}^m \mu_1^{2j} - \sum_{j=0}^{m-1} \mu_1^{2j+1}}{\mu_1^m} = \frac{1 + \sum_{j=1}^m \mu_1^{2j-1}(\mu_1 - 1)}{\mu_1^m} > 0.$$

Итак, если вещественные корни существуют, то они лежат в интервале $(-1, 1)$.

Положим $z = \cos \phi$. Тогда $\mu_{1,2} = e^{\pm i\phi}$ и

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(\mu_1 - 1)\mu_1^m + (1 - \mu_2)\mu_2^m}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{(e^{i\phi} - 1)e^{im\phi} + (1 - e^{-i\phi})e^{-im\phi}}{e^{i\phi} - e^{-i\phi}} = \\ &= \frac{(\cos \phi - 1 + i \sin \phi)(\cos(m\phi) + i \sin(m\phi)) + (1 - \cos \phi + i \sin \phi)(\cos(m\phi) - i \sin(m\phi))}{2i \sin \phi} \\ &= \frac{2i((\cos \phi - 1) \sin(m\phi) + \cos(m\phi) \sin \phi)}{2i \sin \phi} = \frac{\sin((m+1)\phi) - \sin(m\phi)}{\sin \phi} = \frac{\cos \frac{(2m+1)\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}. \end{aligned}$$

У выражения Q есть m корней вида $\phi = \frac{2k+1}{2m+1}\pi$, $k = 0, \dots, m-1$. Следовательно, переходя обратно к z , видим, что корни многочлена $P_m(z)$ равны $z_{k,m} = \cos \frac{2k+1}{2m+1}\pi$, $k = 0, \dots, m-1$. \square

Лемма 4. *Выражение*

$$R = \frac{(\mu_1 - 1)\mu_1^m + (1 - \mu_2)\mu_2^m}{\mu_1 - \mu_2}, \text{ где } \mu_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - d},$$

является многочленом $T_m(w)$ с m различными вещественными корнями при любом положительном d .

Доказательство. Заметим, что при $d = 1$ утверждение представляет собой лемму 3. Проведем доказательство по аналогии при $d \neq 1$.

$$R = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{2j+1} w^{m-2j} (w^2 - d)^j - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} w^{m-2j-1} (w^2 - d)^j = T_m(w).$$

R представляет собой многочлен от w степени m , существующий при всех значениях w . Формулы для коэффициентов $B_j(m)$ многочлена $T_m(w) = \sum_{j=0}^m B_j(m)w^j$ различаются в

зависимости от четности m .

При четном m

$$\left[\begin{array}{l} B_{2l+1}(m) = - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} \binom{j}{j+l+1-\frac{m}{2}} (-d)^{\frac{m}{2}-l-1}, \\ B_{2l}(m) = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m+1}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m}{2}} (-d)^{\frac{m}{2}-l}, \end{array} \right. \quad (8)$$

а при нечетном m

$$\left[\begin{array}{l} B_{2l+1}(m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m-1}{2}} (-d)^{\frac{m-1}{2}-l}, \\ B_{2l}(m) = - \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m-1}{2}} (-d)^{\frac{m-1}{2}-l}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Аналогично доказательству леммы 3 исследуем, как ведут себя корни многочлена $T_m(w)$.

Пусть $w \leq -\sqrt{d}$. Тогда $\mu_2 \leq -\sqrt{d} \leq \mu_1 < 0$. В записи R перейдем к модулям, учитывая, что $\mu_1\mu_2 = d$,

$$R = \sum_{j=0}^m \mu_1^j \mu_2^{m-j} - \sum_{j=0}^{m-1} \mu_1^j \mu_2^{m-j-1} = (-1)^m \frac{\sum_{j=0}^m d^{m-j} |\mu_1|^{2j} + \sum_{j=0}^{m-1} d^{m-1-j} |\mu_1|^{2j+1}}{|\mu_1|^m}.$$

В зависимости от четности m будет всегда либо $R < 0$, либо $R > 0$.

Пусть $w \geq \sqrt{d}$. Тогда $\mu_1 \geq \sqrt{d} \geq \mu_2 > 0$ и

$$R = \frac{\sum_{j=0}^m d^{m-j} \mu_1^{2j} - \sum_{j=0}^{m-1} d^{m-1-j} \mu_1^{2j+1}}{\mu_1^m} = \frac{d^m + \sum_{j=1}^m d^{m-j} \mu_1^{2j-1} (\mu_1 - 1)}{\mu_1^m}.$$

Изучим, когда $\mu_1 \geq 1$ и соответственно, R заведомо положительно. Если $d > 1$, то $\mu_1 \geq \sqrt{d} > 1$ и $R > 0$. Если $d < 1$, то при $w \geq 1$ будет $\mu_1 > w \geq 1$ и $R > 0$. Если же $1 > w \geq \sqrt{d}$, то $\mu_1 \geq 1$, если $w \geq \frac{d+1}{2}$. Следовательно, корни многочлена $T_m(w)$ могут лежать только в интервале $(-\sqrt{d}, \frac{d+1}{2})$.

Пусть теперь $-\sqrt{d} < w < \sqrt{d}$. Снова используем тригонометрическую замену $w = \sqrt{d} \cos \phi$. Тогда $\mu_{1,2} = \sqrt{d} e^{\pm i\phi}$ и

$$\begin{aligned} R &= d^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\sqrt{d} e^{i\phi} - 1) e^{im\phi} + (1 - \sqrt{d} e^{-i\phi}) e^{-im\phi}}{e^{i\phi} - e^{-i\phi}} = \\ &= d^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\sqrt{d} \cos \phi - 1 + i\sqrt{d} \sin \phi)(\cos(m\phi) + i \sin(m\phi))}{2i \sin \phi} + \\ &+ d^{\frac{m-1}{2}} \frac{(1 - \sqrt{d} \cos \phi + i\sqrt{d} \sin \phi)(\cos(m\phi) - i \sin(m\phi))}{2i \sin \phi} = \\ &= d^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\sqrt{d} \cos \phi - 1) \sin(m\phi) + \sqrt{d} \cos(m\phi) \sin \phi}{\sin \phi} = d^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sqrt{d} \sin((m+1)\phi) - \sin(m\phi)}{\sin \phi}. \end{aligned}$$

В отличие от доказательства выше, выражения для корней затруднительно получить в явном виде. Введем функцию $g(\phi) = \sqrt{d} \sin((m+1)\phi) - \sin(m\phi)$ и рассмотрим последовательность $\phi_k = \frac{\pi k}{m+1}$, $k = 1, \dots, m$, тогда в зависимости от четности k будет меняться знак: если $k = 2l$, то $g(\phi_{2l}) > 0$, а при $k = 2l + 1$ будет $g(\phi_{2l+1}) < 0$. Видно, что на каждом из интервалов (ϕ_k, ϕ_{k+1}) , $k = 1, \dots, m - 1$, у функции $g(\phi)$ есть вещественный корень. Следовательно, у многочлена $T_m(w)$ есть хотя бы $m - 1$ вещественный корень.

Заметим, что при $w = \sqrt{d} \cos \frac{\pi}{m+1}$ выражение R отрицательно, а при $w = \frac{d+1}{2}$ положительно. Значит, на этом интервале существует вещественный корень. Стоит отметить, что при $w = \sqrt{d}$ получим $\mu_{1,2} = \sqrt{d}$ и

$$R = (m+1)d^{\frac{m}{2}} - md^{\frac{m-1}{2}} = d^{\frac{m-1}{2}}((m+1)\sqrt{d} - m).$$

Поэтому, в зависимости от положения \sqrt{d} относительно $\frac{m}{m+1}$, этот корень будет либо равен $\frac{m}{m+1} = \sqrt{d}$, либо лежать на интервале $(\sqrt{d} \cos \frac{\pi}{m+1}, \sqrt{d})$, либо на интервале $(\sqrt{d}, \frac{d+1}{2})$.

Итак, доказали, что у многочлена $T_m(w)$ есть m вещественных корней, причем все они различны. \square

3 Время до разорения

Все подготовлено для получения результатов о предельном распределении нормированного времени до разорения $\frac{\eta_x}{\mathbf{E}\eta_x}$. Как и в случае с математическим ожиданием времени до разорения, рассмотрим два случая: $p = q$ и $p \neq q$.

Теорема 1. Пусть x — начальный капитал, а $n \geq x$ — уровень выплаты дивидендов. Тогда, если $p = q$, то при $r \rightarrow 1$ предельное распределение нормированного своим математическим ожиданием времени до разорения есть смесь $(n - x + 1)$ распределений, где k -е распределение ($k = 0, \dots, n - x$) представляет собой свертку $(n - k + 1)$ экспоненциального распределения с параметрами $(-x^2 + (2n + 1)x + 2(n + 1))(1 - \cos \frac{2j+1}{2n+3}\pi)$, $j = k, \dots, n$.

Доказательство. Используем преобразование Лапласа (см. [14]) для нахождения распределения нормированной случайной величины $\frac{\eta_x}{\mathbf{E}\eta_x}$ при $r \rightarrow 1$. Выше была вычислена (см. (5)) производящая функция для η_x , т.е. Es^{η_x} . Для получения преобразования Лапласа функции распределения величины $\frac{\eta_x}{\mathbf{E}\eta_x}$ надо вместо s подставить $e^{-\frac{t}{\mathbf{E}\eta_x}}$.

При $p = q$ будет $r = 1 - 2p$. Это означает, что $r \rightarrow 1$ равносильно $p \rightarrow 0$. Перепишем формулу (1) в виде

$$E_x = \frac{1}{cp}, \text{ где } c = \frac{2}{-x^2 + (2n + 1)x + 2(n + 1)}.$$

Далее вместо s работаем с e^{-cpt} . Начнем с поиска $\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2}$.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1 - rs \pm \sqrt{(1 - rs)^2 - 4p^2s^2}}{2ps} = \frac{1 - s + 2ps \pm \sqrt{(1 - s)(1 - s + 4ps)}}{2ps} = \\ &= \frac{cpt + o(p) + 2pe^{-cpt} \pm \sqrt{(cpt + o(p))(cpt + o(p) + 4pe^{-cpt})}}{2pe^{-cpt}}. \end{aligned}$$

Из этой записи видно, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2} = 1 + \frac{ct}{2} \pm \frac{\sqrt{ct(ct+4)}}{2}.$$

Обозначим $z = 1 + \frac{ct}{2}$, тогда $\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$. Осталось подставить получившиеся пределы в формулу (5).

По леммам 2 и 3 выражение (5) представляет собой отношение многочленов

$$\lim_{r \rightarrow 1} U_x(e^{-\frac{t}{E_x}}) = \frac{P_{n-x} \left(1 + \frac{ct}{2}\right)}{P_{n+1} \left(1 + \frac{ct}{2}\right)} = \frac{\prod_{j=0}^{n-x-1} (ct + \alpha_{j,n-x})}{\prod_{j=0}^n (ct + \beta_{j,n+1})}, \quad (10)$$

где $\alpha_{j,n-x} = 2(1 - \cos \frac{2j+1}{2(n-x)+1} \pi)$, $\beta_{j,n+1} = 2(1 - \cos \frac{2j+1}{2n+3} \pi)$.

Введем

$$S_m = \prod_{j=0}^{m-1} (ct + \alpha_{j,n-x}) \quad (11)$$

и докажем, что

$$S_m = \sum_{i=0}^m M_i(m) \prod_{j=0}^{i-1} (ct + \beta_{j,n+1}).$$

(Считаем, что при $i = 0$ будет $\prod_{j=0}^{i-1} = 1$.)

Воспользуемся методом математической индукции. Если $m = 1$, выражение (11) легко представить в требуемом виде при $M_1(1) = 1$ и $M_0(1) = \alpha_{0,n-x} - \beta_{0,n+1}$:

$$S_1 = ct + \alpha_{0,n-x} = ct + \beta_{0,n+1} + \alpha_{0,n-x} - \beta_{0,n+1}.$$

Пусть для $m - 1$ выполнено утверждение. Перепишем (11) следующим образом

$$\begin{aligned} S_m &= (ct + \alpha_{m-1,n-x}) \prod_{j=0}^{m-2} (ct + \alpha_{j,n-x}) = (ct + \alpha_{m-1,n-x}) S_{m-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} M_i(m-1) ((ct + \beta_{i,n+1}) + (\alpha_{m-1,n-x} - \beta_{i,n+1})) \prod_{j=0}^{i-1} (ct + \beta_{j,n+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^m M_i(m) \prod_{j=0}^{i-1} (ct + \beta_{j,n+1}). \end{aligned}$$

Итак, доказали, что

$$\prod_{j=0}^{m-1} (ct + \alpha_{j,n-x}) = \sum_{i=0}^m M_i(m) \prod_{j=0}^{i-1} (ct + \beta_{j,n+1}),$$

причем коэффициенты $M_i(m)$ находятся рекуррентно

$$M_i(m) = M_{i-1}(m-1) + M_i(m-1)(\alpha_{m-1,n-x} - \beta_{i,n+1}), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

$$M_m(m) = 1 \text{ и } M_0(m) = M_0(m-1)(\alpha_{m-1,n-x} - \beta_{0,n+1}).$$

Таким образом, числитель (10) можно записать как

$$P_{n-x} \left(1 + \frac{ct}{2} \right) = \prod_{j=0}^{n-x-1} (ct + \alpha_{j,n-x}) = \sum_{i=0}^{n-x} L_i(n-x) \prod_{j=0}^{i-1} (ct + \beta_{j,n+1}),$$

где $L_i(n-x) = M_i(n-x)$, $i = 0, \dots, n-x-1$.

Коэффициенты $L_i(n-x)$ состоят из сумм и произведений элементов вида $\alpha_{k,n-x} - \beta_{j,n+1}$, $k \geq j$. Учитывая выражения для $\alpha_{k,n-x}$ и $\beta_{j,n+1}$, получим

$$\alpha_{k,n-x} - \beta_{j,n+1} = 2 \left(\cos \frac{2j+1}{2n+3} \pi - \cos \frac{2k+1}{2(n-x)+1} \pi \right) > 0,$$

т.к. $\frac{2j+1}{2n+3} \leq \frac{2k+1}{2(n-x)+1} < \frac{2k+1}{2(n-x)+1}$. Итак, коэффициенты $L_i(n-x) > 0$.

Докажем теперь, что $\prod_{i=0}^{n-x-1} \alpha_{i,n-x} = \prod_{i=0}^n \beta_{i,n+1} = 1$. Для этого достаточно найти свободный член многочлена $P_{n-x} \left(1 + \frac{ct}{2} \right)$. Воспользуемся формулой (7)

$$P_{n-x} \left(1 + \frac{ct}{2} \right) = 2^{-n+x} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-x}{2} \rfloor} \binom{n-x+1}{2j+1} (ct+2)^{n-x-2j} (ct)^j (ct+4)^j -$$

$$- 2^{1-n+x} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-x-1}{2} \rfloor} \binom{n-x}{2j+1} (ct+2)^{n-x-2j-1} (ct)^j (ct+4)^j.$$

Тогда $\prod_{i=0}^{n-x-1} \alpha_{i,n-x} = \binom{n-x+1}{1} - \binom{n-x}{1} = 1$.

Окончательно,

$$\lim_{r \rightarrow 1} U_x(e^{-\frac{t}{rx}}) = \sum_{i=0}^{n-x} L_i(n-x) \left(\prod_{j=0}^{i-1} \beta_{j,n+1} \right) \frac{\prod_{j=i}^n \beta_{j,n+1}}{\prod_{j=i}^n (ct + \beta_{j,n+1})}. \quad (12)$$

Знаем, что $L_i(n-x) > 0$, $\beta_{j,n+1} > 0$ и $\sum_{i=0}^{n-x} L_i(n-x) \prod_{j=0}^{i-1} \beta_{j,n+1} = 1$. Следовательно, $0 < L_i(n-x) \prod_{j=0}^{i-1} \beta_{j,n+1} < 1$ и нормированное своим математическим ожиданием время до разорения распределено при $r \rightarrow 1$ как смесь $(n-x+1)$ распределений. Очевидно, что i -ое распределение ($i = 0, \dots, n-x$), являющееся сверткой $n-i+1$ экспоненциальных распределений с параметрами $\frac{2}{c}(1 - \cos \frac{2j+1}{2n+3} \pi)$, $j = i, \dots, n$, берется с весом $L_i(n-x) \prod_{j=0}^{i-1} \beta_{j,n+1}$. \square

Теорема 2. Если $p \neq q$, то при $r \rightarrow 1$ предельное распределение нормированного своим математическим ожиданием времени до разорения при начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$

- 1) является экспоненциальным с параметром 1, если $qr^{-1} \rightarrow 0$;
- 2) является сверткой $(x+1)$ экспоненциального распределения с параметром $(x+1)$, если $qr^{-1} \rightarrow \infty$;
- 3) обладает плотностью

$$p(u) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\hat{T}_{n-x}(\gamma_{k,n+1})}{H_k(\gamma_{k,n+1})} e^{\gamma_{k,n+1} u},$$

если $qp^{-1} \rightarrow d \neq 0$ или 1.

Здесь $\gamma_{k,n+1}$, $k = 1, \dots, n+1$, — корни уравнения $\hat{T}_{n+1}(u) = 0$, причем все $\gamma_{k,n+1} < 0$,

$$H_k(t) = \frac{\hat{T}_{n+1}(t)}{t - \gamma_{k,n+1}} \text{ и } \hat{T}_m(t) = d^{-m} \sum_{j=0}^m \sum_{k=j}^m B_k(m) \binom{k}{j} (ct)^j (d+1)^{k-j} 2^{-k},$$

где

$$c = (d-1)^2((d-1)(x+1) + d^{-n-1} - d^{x-n})^{-1}, \quad (13)$$

коэффициенты $B_k(m)$ заданы формулами (8), (9).

Доказательство. Действуем аналогично доказательству теоремы 1. Выразив r через p и q , получаем, что $p+q \rightarrow 0$. Значит, учитывая, что p и q — вероятности, стремление r к 1 равносильно стремлению p и q к 0. Далее будем рассматривать пределы при $p \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$. По лемме 1 формула для математического ожидания при $p \neq q$ выглядит следующим образом:

$$E_x = \frac{x+1}{\left(\frac{q}{p}-1\right)p} + \frac{1}{\left(\frac{q}{p}-1\right)^2 p} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{-n-1} - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-n} \right).$$

Видно, что асимптотика E_x зависит от поведения $\frac{q}{p}$. Соответственно требуют рассмотрения следующие случаи: $qp^{-1} \rightarrow 0$, $qp^{-1} \rightarrow \infty$, $qp^{-1} \rightarrow const \neq 0$ или 1.

1. Пусть $qp^{-1} \rightarrow 0$. Как и при доказательстве теоремы 1, исследуем, как ведет себя выражение для производящей функции при подстановке $e^{-\frac{t}{E_x}}$ вместо s .

В дальнейшем будем говорить, что выражение A ведет себя как B при заданном предельном переходе (или $A \simeq B$), если $\lim \frac{A}{B} = 1$. При $qp^{-1} \rightarrow 0$ ожидаемое время работы компании E_x ведет себя как

$$E_x \simeq -\frac{x+1}{p} + \frac{1}{p} \frac{q^{-n-1}}{p} = \frac{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{p \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

Подставляем $e^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}$ вместо s в выражение для $\lambda_{1,2}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1 - s + (p+q)s \pm \sqrt{(1-s + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 s)(1-s + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 s)}}{2ps} = \\ &= \frac{\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} + o(p) + (p+q)e^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}}{2pe^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\left(\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} + o(p) + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 e^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}} \right) \left(\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} + o(p) + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 e^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}} \right)}{2pe^{-\frac{pt \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - (x+1) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} \simeq \frac{1 + \frac{q}{p} + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \pm \left(1 - \frac{q}{p}\right) \sqrt{1 + 2t \frac{1+\frac{q}{p}}{\left(1-\frac{q}{p}\right)^2} \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}{2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \simeq \left(1 + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right), \quad \lambda_2 \simeq \frac{q}{p}$$

и, подставляя в (5), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} U_x(e^{-\frac{t}{E_x}}) &= \lim_{r \rightarrow 1} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \frac{t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \left(1 + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right)^{n-x} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{n-x}}{t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \left(1 + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right)^{n+1} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n-x} \left(1 - \frac{q}{p} + t \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \left(1 + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right)^{n-x}\right)}{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{q}{p} + t \left(1 + t \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right)^{n+1}\right)} \right) = \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Итак, в пределе получили экспоненциальное распределение с параметром 1.

2. Пусть $qp^{-1} \rightarrow \infty$ или $pq^{-1} \rightarrow 0$. Перепишем (2), используя $\frac{p}{q}$,

$$E_x = \frac{x+1}{q(1-\frac{p}{q})} + \frac{\frac{p}{q}}{(1-\frac{p}{q})^2 q} \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x} \right) \simeq \frac{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}{q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1 - s + (p+q)s \pm \sqrt{(1-s + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 s)(1-s + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 s)}}{2ps} = \\ &= \frac{\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}} + o(q) + (p+q)e^{-\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}}}{2pe^{-\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}}} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\left(\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}} + o(q) + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 e^{-\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}}\right) \left(\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}} + o(q) + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 e^{-\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}}\right)}{2pe^{-\frac{qt}{x+1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x+1}}}}} \right)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} \simeq \frac{1 + \frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1}\right) \pm \frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1}\right) \sqrt{1 + 2 \left(\frac{t}{x+1} - 1\right) \left(1 + \frac{t}{x+1}\right)^{-2} \frac{p}{q}}}{2}.$$

Видно, что

$$\lambda_1 \simeq \frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1}\right), \quad \lim_{r \rightarrow 1} \lambda_2 = \frac{1}{1 + \frac{t}{x+1}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 1} U_x(e^{-\frac{t}{E_x}}) = \\ & = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{x+1} \frac{\left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) \right)^{n-x} \left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) - 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{\frac{t}{x+1} + 1} \right) \left(\frac{1}{\frac{t}{x+1} + 1} \right)^{n-x}}{\left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) \right)^{n+1} \left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) - 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{\frac{t}{x+1} + 1} \right) \left(\frac{1}{\frac{t}{x+1} + 1} \right)^{n+1}} \right) = \\ & = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{x+1} \frac{\left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) \right)^{n-x+1}}{\left(\frac{q}{p} \left(1 + \frac{t}{x+1} \right) \right)^{n+2}} \right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{x+1} \right)^{x+1}}. \end{aligned}$$

Это означает, что предельное распределение представляет собой свертку $(x + 1)$ экспоненциального распределения с параметром $x + 1$.

3. Пусть $qp^{-1} \rightarrow d \neq 0$ или 1. Тогда

$$E_x \simeq \frac{(x+1)(d-1) + d^{-n-1} - d^{x-n}}{(d-1)^2 p} = \frac{1}{cp}, \quad \text{где } c = \frac{(d-1)^2}{(d-1)(x+1) + d^{-n-1} - d^{x-n}}.$$

Как и выше, преобразуем выражение для $\lambda_{1,2}$, заменив r на $1 - p - q$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - s + (p+q)s \pm \sqrt{(1-s + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 s)(1-s + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 s)}}{2ps}.$$

Подставляем e^{-cpt} , тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} & = \frac{cpt + o(p) + (p+q)e^{-cpt}}{2pe^{-cpt}} \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{(cpt + o(p) + (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 e^{-cpt})(cpt + o(p) + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 e^{-cpt})}}{2pe^{-cpt}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2} = \frac{d+1+ct}{2} \pm \frac{\sqrt{(ct + (1 + \sqrt{d})^2)(ct + (1 - \sqrt{d})^2)}}{2}.$$

Введем $w = \frac{d+1+ct}{2}$, тогда $\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - d}$. По лемме 4

$$\lim_{r \rightarrow 1} U_x(e^{-\frac{t}{E_x}}) = d^{x+1} \frac{\sum_{k=0}^{n-x} B_k(n-x) \left(\frac{d+1+ct}{2} \right)^k}{\sum_{k=0}^{n+1} B_k(n+1) \left(\frac{d+1+ct}{2} \right)^k} = \frac{\hat{T}_{n-x}(t)}{\hat{T}_{n+1}(t)},$$

где

$$\hat{T}_m(t) = T_m \left(\frac{d+1+ct}{2} \right) \quad \text{и } c = \frac{(d-1)^2}{(d-1)(x+1) + d^{-n-1} - d^{x-n}}.$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим искомое предельное распределение. В соответствии с таблицей из [3], обратное преобразование отношений многочленов $\frac{\hat{T}_{n-x}(t)}{\hat{T}_{n+1}(t)}$, у которых все корни вещественные, есть

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\hat{T}_{n-x}(\gamma_{k,n+1})}{H_k(\gamma_{k,n+1})} e^{\gamma_{k,n+1}t}, \quad \text{где } \gamma_{k,n+1} - \text{ корни уравнения } \hat{T}_{n+1}(t) = 0,$$

$$H_k(t) = \frac{\hat{T}_{n+1}(t)}{t - \gamma_{k,n+1}} \text{ и } \hat{T}_m(t) = d^{-m} \sum_{j=0}^m \sum_{k=j}^m B_k(m) \binom{k}{j} (ct)^j (d+1)^{k-j} 2^{-k}.$$

По формулам из леммы 4 получим, что $B_m(m) = 2^m$. Тогда старший коэффициент в многочлене $\hat{T}_m(t)$ равен $d^{-m} B_m(m) c^m 2^{-m} = \left(\frac{c}{d}\right)^m$ и $\hat{T}_m(t)$ можно переписать в виде $\hat{T}_m(t) = \prod_{j=1}^{n+1} \left(\frac{c}{d}t - \gamma_j\right)$. Отсюда выражение для $H_k(t)$ запишется как

$$H_k(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} \left(\frac{c}{d}t - \gamma_{j,n+1}\right).$$

Поскольку корни многочлена $T_m(w)$ лежат в интервале $\left(-\sqrt{d}, \frac{d+1}{2}\right)$, легко видеть, что все корни γ_k многочлена $\hat{T}_m(t) = T_m\left(\frac{d+1+ct}{2}\right)$ отрицательны. \square

В качестве иллюстрации приведем следующий пример распределения нормированного времени до разорения при $qp^{-1} \rightarrow d \neq 0$.

Пример. Пусть дивидендный барьер $n = 1$. Начальный капитал в этом случае может быть либо нулевым, либо равным уровню выплаты дивидендов.

При $x = 0$ производящая функция (5) запишется как

$$U_0(s) = d \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 - \lambda_2^2 + \lambda_2}{\lambda_1^3 - \lambda_1^2 - \lambda_2^3 + \lambda_2^2}.$$

Подставляя $\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - d}$ и $w = \frac{d+1+ct}{2}$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} U_0(e^{-\frac{t}{E_0}}) &= d \frac{ct + d}{(ct)^2 + (2d+1)ct + d^2} = \\ &= \frac{2d+1 - \sqrt{4d+1}}{2d} \frac{\frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}}{ct + \frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}} + \frac{\sqrt{4d+1} - 1}{2d} \frac{\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2} \frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}}{\left(ct + \frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2}\right) \left(ct + \frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Учитывая формулу (13), распределение нормированного своим математическим ожиданием времени до разорения есть смесь экспоненциального распределения с параметром $\frac{d+1}{2d^2}(2d+1+\sqrt{4d+1})$ и свертки двух экспоненциальных распределений с параметрами $\frac{d+1}{2d^2}(2d+1-\sqrt{4d+1})$ и $\frac{d+1}{2d^2}(2d+1+\sqrt{4d+1})$.

Аналогично при $x = n = 1$ будет $c = \frac{d^2}{2d+1}$ и

$$U_1(s) = \frac{d^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2}.$$

Тогда для соответствующего преобразования Лапласа

$$\lim_{r \rightarrow 1} U_1(e^{-\frac{t}{E_1}}) = \frac{\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2} \frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}}{\left(ct + \frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2}\right) \left(ct + \frac{2d+1+\sqrt{4d+1}}{2}\right)}.$$

Следовательно, предельное распределение – это свертка двух экспоненциальных распределений с параметрами $\frac{2d+1}{2d^2}(2d+1-\sqrt{4d+1})$ и $\frac{2d+1}{2d^2}(2d+1+\sqrt{4d+1})$.

4 Выплаченные до разорения дивиденды

В модели, описанной в разделе 2, дивиденды, выплаченные акционерам в i -й момент, можно записать как

$$D_x(i) = \max(S_x(i-1) + 1 - z_i - n, 0).$$

Соответственно, средние дисконтированные дивиденды, выплаченные акционерам до момента разорения $\eta_x = \min(i : S_x(i) < 0)$, при начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$ есть

$$m_x(n) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\eta_x} v^i D_x(i),$$

где $0 < v < 1$ — коэффициент дисконтирования.

Лемма 5. При начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$ средние дисконтированные дивиденды $m_x(n)$, выплаченные до разорения, имеют вид

$$m_x(n) = \frac{a_2^{x+1} - a_1^{x+1}}{\Delta_n},$$

где a_1, a_2 — корни уравнения $vr a^2 + (vr - 1)a + vq = 0$,

$$\Delta_n = a_2^{n+1}(a_2 - 1) + a_1^{n+1}(1 - a_1).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 1, выражение для средних дисконтированных дивидендов находится из уравнения

$$m_x(n) = v(pm_{x+1}(n) + rm_x(n) + qm_{x-1}(n)) \text{ при } 1 \leq x \leq n-1$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} m_0(n) &= v(pm_1(n) + rm_0(n)), \\ m_n(n) &= v((p+r)m_n(n) + qm_{n-1}(n) + p). \end{aligned}$$

□

Замечание 1. Трехчлен $vr a^2 + (vr - 1)a + vq$ положителен в 0 и отрицателен в 1, поэтому его корни расположены следующим образом: $0 < a_1 < 1, a_2 > 1$.

Теорема 3. Оптимальный барьер, максимизирующий средние дисконтированные дивиденды, выплаченные акционерам до разорения, равен либо одному из двух целых чисел, ближайших к

$$n^* = \log_{\frac{a_2}{a_1}} \frac{(1 - a_1)^2}{(a_2 - 1)^2} - 1,$$

если $n^* \geq x$, либо начальному капиталу, если $n^* < x$.

Доказательство. Рассмотрим приращение $m_x(n)$ по n

$$m_x(n+1) - m_x(n) = (a_2^{x+1} - a_1^{x+1}) \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{\Delta_n \Delta_{n+1}}. \quad (14)$$

Выражение (14) обращается в 0 при

$$n^* = \log_{\frac{a_2}{a_1}} \frac{(1 - a_1)^2}{(a_2 - 1)^2} - 1.$$

При $n \rightarrow \infty$ величина дивидендов $m_x(n)$ убывает к 0, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_x(n+1) - m_x(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-(a_2^{x+1} - a_1^{x+1}) \frac{a_2^{n+1}(a_2 - 1)^2}{a_2^{2n+3}(a_2 - 1)^2} \right) = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2^{x+1} - a_1^{x+1}}{a_2^{n+1}(a_2 - 1)} \right) = 0.$$

Следовательно, приращение обращается в 0 в точке максимума. Учитывая условие, что дивидендный барьер есть неотрицательное целое число, и он не должен опускаться ниже уровня начального капитала, получим утверждение теоремы. \square

Следствие 1. При $p < q \left(1 + \frac{1-v}{vq}\right)^2$ максимальные дивиденды будут получены при барьере, равном начальному капиталу x .

Замечание 2. Для того, чтобы оптимальный барьер был выше начального капитала, т.е. $n^* \geq x$, нужно

$$a_2^{x+1}(a_2 - 1)^2 - a_1^{x+1}(1 - a_1)^2 \leq 0.$$

Предположим, что акционеры не только покрывают убытки при разорении, но и вносят некоторый капитал, позволяя компании продолжить работу с уровня $y \leq n$ (y — неотрицательное целое число). Тогда модифицированный таким образом капитал компании в i -й момент запишется в виде

$$S_{x,y}(i) = \begin{cases} \min(S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i, n), & \text{при } S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i \geq 0, \\ y, & \text{при } S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i < 0. \end{cases}$$

Как и раньше, введем средние дисконтированные дивиденды при начальном капитале $S_{x,y}(0) = x$, дивидендном барьере $n \geq x$ и уровне возвращения $y \leq n$

$$m_x(n, y) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\infty} v^i D_{x,y}(i),$$

где v — коэффициент дисконтирования, а $D_{x,y}(i) = \max(S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i - n, 0)$.

Лемма 6. При бесконечном времени работы компании с начальным капиталом x , уровнем возвращения y и дивидендным барьером $n \geq x, y$ средние дисконтированные дивиденды $m_x(n, y)$ имеют вид

$$m_x(n, y) = \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x}{\Delta_n(y)},$$

где a_1, a_2 — корни уравнения $vr a^2 + (vr - 1)a + vq = 0$,

$$c_1(y) = qa_2^y - pa_1, \quad c_2(y) = pa_2 - qa_1^y, \quad \Delta_n(y) = a_2^n(a_2 - 1)c_2(y) - a_1^n(1 - a_1)c_1(y).$$

Доказательство. Средние дисконтированные дивиденды удовлетворяют уравнению

$$m_x(n, y) = v(pm_{x+1}(n, y) + rm_x(n, y) + qm_{x-1}(n, y)) \quad \text{при } 1 \leq x \leq n - 1$$

с граничными условиями

$$m_0(n, y) = v(pm_1(n, y) + rm_0(n, y) + qm_y(n, y)),$$

$$m_n(n, y) = v((p+r)m_n(n, y) + qm_{n-1}(n, y) + p).$$

\square

Исследуем вопрос оптимальности стратегий при бесконечном времени работы компании.

Теорема 4. *Оптимальный, с точки зрения выплаченных акционерам дивидендов, барьер равен $\max(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим приращение

$$m_x(n+1, y) - m_x(n, y) = (c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x) \frac{\Delta_n(y) - \Delta_{n+1}(y)}{\Delta_n(y)\Delta_{n+1}(y)}.$$

Исходя из расположения корней, получим

$$qa_2^y > qa_2^{-1} = pa_1, \quad pa_2 = qa_1^{-1} > qa_1^y.$$

Следовательно, $c_1(y) > 0$ и $c_2(y) > 0$. Видно, что

$$\Delta_n(y) - \Delta_{n+1}(y) = -a_2^n(a_2 - 1)^2 c_2(y) - a_1^n(1 - a_1)^2 c_1(y) < 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} a_2^n(a_2 - 1)c_2(y) &= a_2^n(a_2 - 1)qa_1^{-1}(1 - a_1^{y+1}) = \\ &= q(a_1a_2)^{-1}(1 - a_1)(a_2 - 1)a_2^{n+1}(1 + a_1 + \dots + a_1^y) > \\ &> q(a_1a_2)^{-1}(1 - a_1)(a_2 - 1)a_1^{n+1}(1 + a_2 + \dots + a_2^y) = \\ &= a_1^n(1 - a_1)qa_2^{-1}(a_2^{y+1} - 1) = a_1^n(1 - a_1)c_1(y). \end{aligned}$$

Это означает, что при $n \geq y$ будет $\Delta_n(y) > 0$, следовательно, и $\Delta_{n+1}(y) > 0$. Окончательно, приращение $m_x(n, y)$ отрицательно, значит $m_x(n, y)$ убывает по n , а следовательно, оптимальным будет взять наименьшее возможное n . Учитывая, что рассматривали модель с $x \leq n$ и $y \leq n$, будет $n = \max(x, y)$. \square

Теорема 5. *Пусть x — начальный капитал, и после разорения акционеры возвращают капитал на уровень не выше начального, тогда оптимальным с точки зрения полученных дивидендов будет взять уровень возвращения равным x .*

Доказательство. По теореме 4 при $y \leq x$ оптимальный дивидендный барьер $n = x$. Тогда

$$m_x(x, y) = \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x}{\Delta_x(y)}.$$

Рассмотрим приращение по y :

$$m_x(x, y+1) - m_x(x, y) = \frac{c_1(y+1)a_1^x + c_2(y+1)a_2^x}{\Delta_x(y+1)} - \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x}{\Delta_x(y)}.$$

При доказательстве теоремы 4 было получено, что $\Delta_x(y) > 0$ при $x \geq y$, значит, знаменатель положителен, поэтому дальше работаем только с числителем приращения.

$$\begin{aligned} &(c_1(y+1)a_1^x + c_2(y+1)a_2^x)(a_2^x(a_2 - 1)c_2(y) - a_1^x(1 - a_1)c_1(y)) - \\ &-(c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x)(a_2^x(a_2 - 1)c_2(y+1) - a_1^x(1 - a_1)c_1(y+1)) = \\ &= (a_1a_2)^x(a_2 - a_1)(c_1(y+1)c_2(y) - c_1(y)c_2(y+1)) = \\ &= q^2(a_1a_2)^{x-1}(a_2 - a_1)((a_2^{y+2} - 1)(1 - a_1^{y+1}) - (a_2^{y+1} - 1)(1 - a_1^{y+2})) = \\ &= q(a_1a_2)^{x-1}(a_2 - a_1)(a_2 - 1)(1 - a_1)[a_2^{y+1}(1 + \dots + a_1^y) - a_1^{y+1}(1 + \dots + a_2^y)]. \end{aligned}$$

Это выражение положительно, т.е. дивиденды, как функция y , возрастают, и, следовательно, оптимальным будет взять $y = x$. \square

Теорема 6. При $n = y = x$ наибольшие дивиденды будут получены акционерами при нулевом начальном капитале.

Доказательство. При $n = y = x$ запишем

$$m_x(x, x) = \frac{c_1(x)a_1^x + c_2(x)a_2^x}{\Delta_x(x)}$$

или

$$m_x(x, x) = \frac{a_2^{x+1} - a_1^{x+1}}{a_2^{x+1}(a_2 - 1) + a_1^{x+1}(1 - a_1) - (a_2 - a_1)(a_1a_2)^{x+1}}.$$

Учитывая, что $\Delta_x(x) > 0$, запишем числитель приращения

$$\begin{aligned} & (a_2^{x+2} - a_1^{x+2})(a_2^{x+1}(a_2 - 1) + a_1^{x+1}(1 - a_1) - (a_2 - a_1)(a_1a_2)^{x+1}) - \\ & - (a_2^{x+1} - a_1^{x+1})(a_2^{x+2}(a_2 - 1) + a_1^{x+2}(1 - a_1) - (a_2 - a_1)(a_1a_2)^{x+2}) = \\ & = (a_2 - a_1)(a_1a_2)^{x+1}(a_2 - 1)(1 - a_1)[(1 + \dots + a_1^{x+1}) - (1 + \dots + a_2^{x+1})]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_1 < 1 < a_2$, видим, что приращение отрицательно, а значит, оптимально взять $x = 0$. \square

5 Доход акционеров с учетом понесенных убытков

Выше исследовался вопрос о максимизации полученных акционерами дивидендов. Однако, если акционеры покрывают убытки при разорении и вносят дополнительные средства, стоит рассмотреть стратегии, оптимизирующие их итоговый доход, т.е. разницу между дивидендами и убытками. Снова изучим два случая: когда компания заканчивает работу при разорении, и когда она продолжает работу с нового начального уровня.

В момент i акционеры могут либо получить прибыль в виде дивидендов, если капитал превысил уровень n , либо понести убытки в связи с разорением компании. Таким образом, их доход представляется в виде

$$L_x(i) = \begin{cases} S_x(i-1) + 1 - z_i - n, & \text{при } S_x(i-1) + 1 - z_i \geq n, \\ S_x(i-1) + 1 - z_i, & \text{при } S_x(i-1) + 1 - z_i < 0, \\ 0, & \text{при } 0 \leq S_x(i-1) + 1 - z_i \leq n. \end{cases}$$

Отсюда средний дисконтированный доход акционеров до разорения компании считается как

$$\beta_x(n) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\eta_x} v^i L_x(i),$$

где $v < 1$ — коэффициент дисконтирования.

Лемма 7. При начальном капитале x и дивидендном барьере $n \geq x$ средний дисконтированный доход акционеров за время работы компании до разорения можно записать в виде

$$\beta_x(n) = \frac{(a_2^{n+1}(1 - a_2) - 1)a_1^{x+1} - (a_1^{n+1}(1 - a_1) - 1)a_2^{x+1}}{\Delta_n}.$$

Доказательство. Доход акционеров удовлетворяет уравнению

$$\beta_x(n) = v(p\beta_{x+1}(n) + r\beta_x(n) + q\beta_{x-1}(n)) \text{ при } 1 \leq x \leq n - 1$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\beta_0(n) &= v(p\beta_1(n) + r\beta_0(n) - q), \\ \beta_n(n) &= v((p+r)\beta_n(n) + q\beta_{n-1}(n) + p).\end{aligned}$$

□

Выразив средний дисконтированный доход в явном виде, исследуем вопрос оптимальности дивидендной стратегии.

Теорема 7. *Существует оптимальная барьерная стратегия выплаты дивидендов, максимизирующая доход акционеров.*

Доказательство. Рассмотрим приращение $\beta_x(n)$ по n и докажем, что оно убывает при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\beta_x(n+1) - \beta_x(n) &= \frac{((a_2^{n+2}(1-a_2) - 1)a_1^{x+1} - (a_1^{n+2}(1-a_1) - 1)a_2^{x+1})\Delta_n}{\Delta_n\Delta_{n+1}} \\ &\quad - \frac{((a_2^{n+1}(1-a_2) - 1)a_1^{x+1} - (a_1^{n+1}(1-a_1) - 1)a_2^{x+1})\Delta_{n+1}}{\Delta_n\Delta_{n+1}} = \\ &= \frac{(1-a_1)(1-a_2)(a_2-a_1)(a_1^{x+1}a_2 - a_1a_2^{x+1})(a_1a_2)^{n+1}}{\Delta_n\Delta_{n+1}} + \\ &\quad + \frac{(a_2^{x+1} - a_1^{x+1})(a_1^{n+1}(1-a_1^2) - a_2^{n+1}(1-a_2^2))}{\Delta_n\Delta_{n+1}}.\end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ $\Delta_n = a_2^{n+1}(a_2 - 1) + a_1^{n+1}(1 - a_1)$ ведет себя как $a_2^{n+1}(a_2 - 1)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_x(n) = a_1^{x+1}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_x(n+1) - \beta_x(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{a_2^{n+1}(1-a_2^2)}{a_2^{2n+3}(a_2-1)^2} \right) = 0.$$

Следовательно, максимальный доход акционеров достигается при некотором конечном значении n . □

Если акционеры возвращают капитал компании на уровень y после разорения, то выражение для дохода $L_{x,y}(i)$ изменится следующим образом:

$$L_{x,y}(i) = \begin{cases} S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i - n, & \text{при } S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i \geq n, \\ S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i - y, & \text{при } S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i < 0, \\ 0, & \text{при } 0 \leq S_{x,y}(i-1) + 1 - z_i \leq n. \end{cases}$$

Средний дисконтированный доход акционеров считается как

$$\beta_x(n, y) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\infty} v^i L_{x,y}(i).$$

Лемма 8. При начальном капитале x , дивидендном барьере $n \geq x$ и уровне возвращения $y \leq n$ средний дисконтированный доход можно записать в виде

$$\beta_x(n, y) = \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x - q(y+1)\psi(x, n)}{\Delta_n(y)},$$

где $\psi(x, n) = (a_2 - 1)a_2^n a_1^x + (1 - a_1)a_1^n a_2^x$.

Доказательство. Доход акционеров удовлетворяет уравнению

$$\beta_x(n, y) = v(p\beta_{x+1}(n, y) + r\beta_x(n, y) + q\beta_{x-1}(n, y)) \text{ при } 1 \leq x \leq n - 1$$

с граничными условиями

$$\beta_0(n, y) = v(p\beta_1(n, y) + r\beta_0(n, y) + q\beta_y(n, y) - q(y+1)),$$

$$\beta_n(n, y) = v((p+r)\beta_n(n, y) + q\beta_{n-1}(n, y) + p).$$

□

Аналогично случаю работы компании до разорения докажем существование оптимальной барьерной стратегии.

Теорема 8. Существует барьер выплаты дивидендов, максимизирующий доход акционеров.

Доказательство. Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} \beta_x(n+1, y) - \beta_x(n, y) &= \frac{(c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x)(\Delta_n(y) - \Delta_{n+1}(y))}{\Delta_n(y)\Delta_{n+1}(y)} - \\ &= -\frac{q(y+1)((a_2-1)a_2^{n+1}a_1^x + (1-a_1)a_1^{n+1}a_2^x)}{\Delta_{n+1}(y)} + \frac{q(y+1)((a_2-1)a_2^n a_1^x + (1-a_1)a_1^n a_2^x)}{\Delta_n(y)} = \\ &= -\frac{(c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x)(a_2^n(a_2-1)^2c_2(y) + a_1^n(1-a_1)^2c_1(y))}{(a_2^n(a_2-1)c_2(y) - a_1^n(1-a_1)c_1(y))(a_2^{n+1}(a_2-1)c_2(y) - a_1^{n+1}(1-a_1)c_1(y))} - \\ &= -\frac{q(y+1)(a_2-1)(a_1a_2)^n(1-a_1)(a_2-a_1)(c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x)}{(a_2^n(a_2-1)c_2(y) - a_1^n(1-a_1)c_1(y))(a_2^{n+1}(a_2-1)c_2(y) - a_1^{n+1}(1-a_1)c_1(y))}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ это выражение ведет себя как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_x(n+1, y) - \beta_x(n, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x}{c_2(y)a_2^{n+1}} \right) = 0.$$

Следовательно, доходы убывают.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_x(n, y) = -\frac{q(y+1)a_1^x}{c_2(y)}.$$

Итак, максимум $\beta_x(n, y)$ достигается при конечном n .

□

Автор выражает благодарность профессору Булинской Е.В. за постановку задачи и полезные замечания в процессе решения.

Список литературы

- [1] *Albrecher H., Thonhauser S.*, Optimality results for dividend problems in insurance // RACSAM Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A, Matematicas, 2009, v. 103, № 2, p. 295–320
- [2] *Avanzi B.*, Strategies for dividend distribution: a review // North American Actuarial Journal, 2009, v. 13, № 2, p. 217–251.
- [3] *Bateman H., Erdelyi A.*, Tables of integral transforms. McGraw Hill. Book Company, 1959.
- [4] *Bulmann H.*, Mathematical methods in risk theory. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [5] *De Finetti B.*, Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 1957, v. 2, p. 433–443.
- [6] *Dickson D. C. M., Waters H. R.*, Some optimal dividend problems // Astin Bulletin, 2004, v. 34, № 1, p. 49–74.
- [7] *Gerber H. U.*, An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation, Philadelphia, 1979.
- [8] *Lundberg F.*, Approximation of the probability function. Reinsurance of collective risks // Doctoral thesis, 1903.
- [9] *Wenguang Yu*, Randomized dividends in a discrete insurance risk model with stochastic premium income // Mathematical Problems in Engineering, 2013, v. 2013, Article ID 579534, 9 pages
- [10] *Wu X., Li S.*, On a discrete time risk model with time-delayed claims and a constant dividend barrier // Insurance Markets and Companies: Analysis and Actuarial Computations, 2012, v. 3, № 1, p. 50–57.
- [11] *Каранетян Н. В.*, Оптимизация дивидендной стратегии страховой компании, продолжающей работу после разорения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, 2012, № 2, p. 54–57.
- [12] *Жанблан-Пике М., Ширяев А. Н.*, Оптимизация потока дивидендов // Успехи математических наук, 1995, v. 20, p. 257–277.
- [13] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1. Мир, Москва, 1984.
- [14] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2. Мир, Москва, 1984.
- [15] *Ярцева Д. А.*, Верхние и нижние оценки дивидендов в дискретной модели // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, 2009, № 5, p. 60–62.
- [16] *Ярцева Д. А.*, Предельное распределение капитала компании в модели с выплатой дивидендов // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2010, т. 17, № 6, с. 830–838.

Экстремумы зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах¹

Лебедев А.В.²

Рассматриваются ветвящиеся процессы, в которых каждая частица обладает некоторым случайным признаком с заданным распределением. Предполагается, что признаки частиц зависимы, причем эта зависимость связана с дальностью родства частиц. Нас интересует асимптотическое поведение экстремумов признаков по поколениям. Получены невырожденные предельные законы для максимумов при линейной нормировке.

1 Введение

В работах [1, 2] изучались максимумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с дискретным временем. А именно, рассматривались классические процессы Гальтона-Ватсона [3, 4], в которых каждая частица обладает некоторым случайным признаком, и изучалось поведение максимумов признаков по поколениям или за все время. В [5] рассматривались максимумы в процессах с двумя типами частиц. Изучались также максимумы числа потомков частиц [6, 7, 8]. Однако мы сосредоточимся на моделях, в которых число потомков частицы не зависит от ее признака.

В ряде работ автора рассматривались максимумы случайных признаков частиц в бесконечных надкритических ветвящихся процессах (с конечными средним и дисперсией числа потомков). Так, в [9] рассмотрен процесс с непрерывным временем, а в [10, 11] с дискретным. Однако при этом признаки разных частиц считались независимыми. В [12] впервые изучалась модель с зависимостью признаков частиц в поколении, обусловленной их общей наследственностью.

В частности, рассмотрен случай, когда признаки имеют стандартное нормальное распределение, а коэффициент корреляции признаков пары частиц мажорируется (по модулю) величиной r^k , $r \in (0, 1)$, если эти частицы имеют ближайшего общего предка k поколений назад. Показано, что максимумы по поколениям растут асимптотически так же, как в случае независимых признаков.

Напротив, в случае, когда распределение признаков имеет тяжелый хвост, а зависимость обусловлена наследственностью, описываемой процессом авторегрессии первого

¹Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 14-01-00075.

²Лебедев Алексей Викторович, avlebed@yandex.ru, доцент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

порядка, максимумы по поколениям растут как максимумы независимых признаков меньшего числа частиц. В этом случае найден экстремальный индекс $\theta = (1 - a^\gamma)/(1 - a^\gamma/\mu) \in (0, 1)$ где $a \in (0, 1)$ — коэффициент авторегрессии, $\gamma > 0$ — хвостовой индекс распределения, $\mu > 1$ — среднее число потомков.

Заметим, что в [12] основное внимание в формировании зависимости признаков уделялось наследственности и естественной для нее модели авторегрессии. Однако возможны и другие явления, также связанные с родством. Например, как отмечено в [3, гл. 6, §28.2], при размножении бактерий продолжительности жизни сестринских клеток коррелированы, а материнских и дочерних — нет.

Далее в разделах 2 и 3 для ветвящихся процессов, начинающихся с одной частицы, изучается асимптотика максимума признаков частиц n -го поколения M_n при условии $Z_n > 0$ при $n \rightarrow \infty$. В разделе 4 изучается асимптотика максимума признаков частиц первого поколения M_n при $Z_0 = n \rightarrow \infty$.

В разделе 2 предполагается, что совместное распределение признаков частиц в поколении (при известном генеалогическом дереве поколения) является многомерным нормальным, частные распределения — стандартные нормальные, а коэффициент корреляции признаков пары частиц мажорируется (по модулю) величиной $0 \leq r_k < 1$, если эти частицы имеют ближайшего общего предка k поколений назад. Для критических, околкритических и надкритических процессов (начинающихся с одной частицы) найдены достаточные условия на r_k , $k \geq 1$, при которых максимумы по поколениям растут асимптотически так же, как при независимых признаках.

В разделе 2.1 рассмотрен критический ветвящийся процесс (с конечной дисперсией числа потомков σ^2).

Околкритическими называют ветвящиеся процессы, в которых среднее число потомков стремится к единице или колеблется около нее (в схеме серий, либо в зависимости от времени или от состояния). Например, процессы с зависимостью от времени использовались в [13] для оценки возраста “митохондриальной Евы”. В [14] рассматривались процессы с зависимостью от размера популяции и их приложения к теории эволюции и формированию степенных законов. В [15] изучался процесс с двумя взаимодействующими типами частиц.

В разделе 2.2 речь идет об околкритических процессах с зависимостью от времени (номера поколения). Пусть задана положительная функция $g(n)$, такая, что $g(0) = 1$ и

$$\frac{g(n+1)}{g(n)} \rightarrow 1, \quad g(n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим неоднородный надкритический ветвящийся процесс, у которого в n -м поколении распределение числа потомков любой частицы является геометрическим (начиная с единицы) со средним $\mu_n = g(n+1)/g(n)$, $n \geq 0$. Сначала доказана теорема для общего случая, а затем разобраны примеры $g(n) \sim Cn^\alpha$, $C > 0$, $\alpha > 0$, и $g(n) \sim \exp\{cn^\beta\}$, $c > 0$, $0 < \beta < 1$, $n \rightarrow \infty$. В указанных частных случаях $\mu_n - 1 \sim \alpha/n$ и $\mu_n - 1 \sim c/n^{1-\beta}$, $n \rightarrow \infty$, соответственно.

Наконец, в разделе 2.3 возвращаемся к надкритическим процессам (с конечными средним μ и дисперсией σ^2 числа потомков), уже не обязательно бессмертным. Для них получено более слабое достаточное условие, чем в [12] (степенного вместо экспоненциального порядка убывания корреляций).

К сожалению, используемая здесь техника не применима при бесконечной дисперсии числа потомков.

В разделе 3 предполагается, что признаки частиц имеют распределения с тяжелыми (правильно меняющимися) хвостами, и формируются максимум-линейными комбинациями независимых случайных факторов, связанных с самой частицей и всеми ее предками, а также общим прошлым до начала процесса. В эту схему укладываются и максимум-авторегрессия (любого порядка), и скользящий максимум по нескольким поколениям, в том числе сестринская зависимость. При этом возникающая зависимость признаков частиц в поколении просто описывается коэффициентами верхней хвостовой зависимости [16, §5.4] (вместо коэффициентов корреляции).

Доказана общая теорема, связывающая асимптотическое поведение максимумов с конечномерными распределениями редуцированного ветвящегося процесса. В качестве примеров рассматриваются те же критические, околочитические и надкритические процессы, что были введены ранее. Для критических и надкритических процессов оказывается, что максимумы по поколениям растут как максимумы независимых признаков меньшего числа частиц. В этих случаях возникают нетривиальные экстремальные индексы θ . Для околочитических процессов $\theta = 1$. Отмечено, что для надкритических процессов здесь можно отказаться от конечной дисперсии.

Для более естественной линейной модели, по-видимому, должны иметь место такие же результаты, однако их доказательство гораздо более затруднительно.

В разделе 4 рассмотрена модель сестринской зависимости признаков при минимальных ограничениях на характеристики ветвящегося процесса, распределения признаков и др. В предположении, что $Z_0 = n$, изучено асимптотическое поведение максимумов признаков частиц первого поколения при $n \rightarrow \infty$ и найдены экстремальные индексы для некоторых случаев.

2 Случай нормальных признаков

2.1. Критические процессы. Обозначим через $T(n, k)$ число пар частиц в n -ом поколении, имеющих общего предка не более чем k поколений назад, и через $R(n, k)$ число пар частиц в n -ом поколении, имеющих общего предка ровно k поколений назад, $n \geq k$. Напомним, что для критического процесса согласно [4, §2.6], $\mathbf{E}Z_n(Z_n - 1) = \mathbf{D}Z_n = n\sigma^2$. Введем обозначение $B = \sigma^2/2$.

Лемма 1.

$$\mathbf{E}(R(n, k)|Z_n > 0) = \frac{B}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} \sim B^2n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Доказательство. Пара частиц имеет общего предка не более чем k поколений назад тогда и только тогда, когда они принадлежат к родственной группе частиц, произошедших от одной частицы $(n - k)$ -го поколения. Поэтому $\mathbf{E}T(n, k) = \mathbf{E}Z_{n-k}\mathbf{E}Z_k(Z_k - 1)/2 = k\sigma^2/2 = kB$. Отсюда $\mathbf{E}R(n, k) = \mathbf{E}T(n, k) - \mathbf{E}T(n, k - 1) = B$. Поскольку $R(n, k) = 0$ при $Z_n = 0$, то $\mathbf{E}(R(n, k)|Z_n > 0) = B/\mathbf{P}(Z_n > 0)$. Согласно [4, теорема 10], $\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim 1/(Bn)$, $n \rightarrow \infty$, откуда $\mathbf{E}(R(n, k)|Z_n > 0) \sim B^2n$, $n \rightarrow \infty$. \square

Заметим, что результат леммы довольно удивителен: средние числа пар частиц, находящихся в каждой из возможных дальностей родства от 1 до n , одинаковы.

Напомним, что стандартное нормальное распределение принадлежит области притяжения закона Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ с известными нормирующими константами. А

именно,

$$\begin{aligned} \Phi^s(a(s)x + b(s)) &\rightarrow \Lambda(x), \quad s \rightarrow \infty, \\ a(s) &= (2 \ln s)^{-1/2}, \quad b(s) = (2 \ln s)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 \ln s)^{-1/2}(\ln \ln s + \ln 4\pi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Пусть $u_n = a(n)x + b(n)$, $n \geq 1$. Имеем $n\bar{\Phi}(u_n) \rightarrow e^{-x}$, $\Phi(u_n)^n \rightarrow \Lambda(x)$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть $\sup r_k = \delta < 1$ и $r_k \ln k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) \rightarrow (1 + Be^{-x})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Доказательство. Далее будем пользоваться следующей оценкой для стандартных нормальных величин X_1, \dots, X_N с корреляциями ρ_{ij} , удовлетворяющими условию $|\rho_{ij}| \leq \delta < 1$. Согласно [17, следствие 4.2.4] для них выполнено неравенство

$$\left| \mathbf{P} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq N} X_i \leq u \right) - \Phi^N(u) \right| \leq K(\delta) \sum_{1 \leq i < j \leq N} |\rho_{ij}| \exp \left\{ -\frac{u^2}{1 + |\rho_{ij}|} \right\}. \quad (4)$$

Отсюда применительно к нашей задаче, используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} &|\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \leq \\ &\leq K(\delta) \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n R(n, k) r_k \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{1 + r_k} \right\} \middle| Z_n > 0 \right) = \\ &= K(\delta) \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(R(n, k) | Z_n > 0) r_k \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{1 + r_k} \right\} = \\ &= \frac{K(\delta)B}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} \sum_{k=1}^n r_k \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{1 + r_k} \right\} \sim \\ &\sim K(\delta)B^2 n \sum_{k=1}^n r_k \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{1 + r_k} \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно [17, лемма 4.3.2] из условия теоремы 1 и ограниченности $n\bar{\Phi}(u_n)$, $n \geq 1$, следует

$$n \sum_{k=1}^n r_k \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{1 + r_k} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

таким образом в (5) получаем

$$|\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Кроме того, согласно [4, теорема 10],

$$\left(\frac{Z_n}{Bn} \middle| Z_n > 0 \right) \xrightarrow{d} \zeta \sim \text{Exp}(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

поэтому

$$\mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{E}\Lambda(x)^{B\zeta} = (1 + Be^{-x})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует утверждение теоремы. \square

Таким образом, предельный закон оказывается логистическим.

Здесь довольно удивительно, что полученное нами условие (6), достаточное для выполнения (3), формально совпадает с давно известным условием для максимумов нормальных последовательностей [17, §4.3], хотя в нашем случае речь идет не о последовательности, а о схеме серий, и величины r_k , $k \geq 1$, не образуют ковариационную последовательность для какой-либо случайной последовательности в нашей модели. В общем случае частицы поколения нельзя выстроить в ряд так, чтобы расстояние между ними соответствовало их дальности родства.

2.2. Околокритические процессы. Из сделанных во Введении предположений о процессе следует, что распределение Z_n при любом $n \geq 1$ является геометрическим (начиная с единицы) и $\mathbf{E}Z_n = g(n)$. Отсюда

$$\frac{Z_n}{g(n)} \xrightarrow{d} \zeta \sim \text{Exp}(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Напомним, что если геометрическая случайная величина ν имеет среднее μ , то $\mathbf{E}\nu(\nu-1) = 2\mathbf{D}\nu = 2\mu(\mu-1)$.

Теорема 2.

$$\mathbf{E}T(n, k) = \frac{g(n)(g(n) - g(n-k))}{g(n-k)}, \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $Z_{n,k}^*$ имеет распределение числа частиц n -го поколения, произошедших от одной частицы $(n-k)$ -го поколения. Тогда $Z_{n,k}^*$ имеет геометрическое распределение со средним $g(n)/g(n-k)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T(n, k) &= \mathbf{E}Z_{n-k} \mathbf{E}Z_{n,k}^* (Z_{n,k}^* - 1)/2 = \\ &= g(n-k) \frac{g(n)}{g(n-k)} \left(\frac{g(n)}{g(n-k)} - 1 \right), \end{aligned}$$

что и дает (10). □

Заметим, что

$$\mathbf{E}T(n, n) = \mathbf{E}Z_n(Z_n - 1)/2 \sim g(n)^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Лемма 2. Для любого $s \in (0, 1)$ существует целочисленная функция $m_s(n)$, $n \geq 1$, такая, что $1 \leq m_s(n) \leq n$ и

$$\frac{g(n - m_s(n))}{g(n)^s} \rightarrow 1, \quad m_s(n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Положим $m(n) = 1$ при $g(n) = 1$ и

$$m(n) = \min\{1 \leq k \leq n : g(n - m(n)) < g(n)^s\}$$

при $g(n) > 1$, что имеет место при всех достаточно больших n .

Предположим, что существует такая последовательность n_k , $k \geq 1$, что $m_s(n_k) < M$, тогда $g(n - M) < g(n)^s$, но $g(n)/g(n - M) \rightarrow 1$, так что приходим к противоречию. Следовательно, $m_s(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Имеем $g(n - m_s(n))/g(n)^s < 1$ и $g(n - m_s(n) + 1)/g(n)^s \geq 1$. Но поскольку $g(n - m_s(n) + 1)/g(n - m_s(n)) \rightarrow 1$, то $g(n - m_s(n))/g(n)^s \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. □

Из лемм 2 и 3 следует

$$\mathbf{E}T(n, m_s(n)) \sim g(n)^{2-s}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Исходя из асимптотики (9), положим $u_n = a(g(n))x + b(g(n))$, $n \geq 1$. Заметим, что тогда

$$\exp\{-u_n^2\} \sim e^{-2x} g(n)^{-2} \ln g(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть $\sup r_k = \delta < 1$ и $r_{m_s(k)} \ln g(k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, где $2\delta/(1+\delta) < s < 1$, тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) \rightarrow (1 + e^{-x})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Используем ту же оценку (4), что и в доказательстве теоремы 1. Пусть $\delta_n = \sup_{k > m_s(n)} r_k$, тогда $\delta_n = o((\ln g(n))^{-1})$ и $g(n)^{\delta_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Сумму по дальностям родства разбиваем на две: от 1 до $m_s(n)$ и от $m_s(n) + 1$ до n . С помощью (11), (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(M_n \leq u_n) - \mathbf{E}\Phi(u_n)^{Z_n}| &\leq K(\delta) \sum_{k=1}^n \mathbf{E}R(n, k)r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} \leq \\ &\leq K(\delta)\delta \mathbf{E}T(n, m_s(n)) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta}\right\} + K(\delta)\delta_n \mathbf{E}T(n, n) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta_n}\right\} = \\ &= g(n)^{2-s} g(n)^{(-2/(1+\delta))(1+o(1))} + o((\ln g(n))^{-1}) g(n)^2 g(n)^{-2/(1+\delta_n)} (\ln g(n))^{1/(1+\delta_n)} = \\ &= g(n)^{(2\delta/(1+\delta)-s)(1+o(1))} + o((\ln g(n))^{-\delta_n(1+o(1))}) g(n)^{2\delta_n(1+o(1))} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С учетом (9), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\Phi(u_n)^{Z_n} = \mathbf{E}\Lambda(x)^\zeta = (1 + e^{-x})^{-1}.$$

□

Пример 2.1. Пусть $g(n) \sim Cn^\alpha$, $C > 0$, $\alpha > 0$, тогда

$$m_s(n) \sim n - C^{(s-1)/\alpha} n^s \sim n, \quad \ln g(n) \sim \alpha \ln n, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда получаем условие

$$r_k \ln k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Интересно, что оно совпадает с условием теоремы 1 (хотя процесс совсем другой), и не зависит от α .

Пример 2.2. Пусть $g(n) \sim \exp\{cn^\beta\}$, $c > 0$, $0 < \beta < 1$, тогда

$$m_s(n) \sim (1 - s^{1/\beta})n, \quad \ln g(n) \sim cn^\beta, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда получаем условие

$$r_k = o(k^{-\beta}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Здесь уже есть зависимость от β .

2.3. Надкритические процессы. Напомним, что для рассматриваемых надкритических процессов имеет место предел почти наверное [3, гл. 1, §8]:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \xrightarrow{a.s.} W, \quad n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

причем преобразование Лапласа-Стилтьеса $\varphi(s) = \mathbf{E}e^{-sW}$ однозначно определяется формулой

$$\varphi(\mu s) = f(\varphi(s)),$$

где f — производящая функция числа потомков. Вероятность вырождения процесса q определяется как единственный корень уравнения $s = f(s)$ на $[0, 1)$. Имеем $q < 1$ и $p = 1 - q = \mathbf{P}(W > 0) > 0$. При этом $\mathbf{P}(Z_n > 0) \rightarrow p$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 3.

$$\mathbf{E}(T(n, k)|Z_n > 0) = \mu^{n-1} \frac{\mu^k - 1}{\mu - 1} \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu}{2\mathbf{P}(Z_n > 0)} \quad (15)$$

Доказательство. Как и в лемме 1, имеем $\mathbf{E}T(n, k) = \mathbf{E}Z_{n-k}\mathbf{E}Z_k(Z_k - 1)/2$. В данном случае, $\mathbf{E}Z_{n-k} = \mu^{n-k}$. Используя известную формулу дисперсии Z_n [3, гл. 1, §5], получаем

$$\mathbf{E}Z_k(Z_k - 1) = \frac{\sigma^2 \mu^k (\mu^k - 1)}{\mu^2 - \mu} + \mu^{2k} - \mu^k = (\sigma^2 + \mu^2 - \mu) \mu^{k-1} \frac{\mu^k - 1}{\mu - 1},$$

откуда

$$\mathbf{E}T(n, k) = \mu^{n-1} \frac{\mu^k - 1}{\mu - 1} \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu}{2}.$$

А поскольку $T(n, k) = 0$ при $Z_n = 0$, то $\mathbf{E}(T(n, k)|Z_n > 0) = \mathbf{E}T(n, k)/\mathbf{P}(Z_n > 0)$, что дает (15). \square

Из леммы 4 следует, что

$$\mathbf{E}(T(n, n)|Z_n > 0) \sim C(\mu, \sigma, p) \mu^{2n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

а если взять $m_s(n) = [(1 - s)n]$, $0 < s < 1$, то

$$\mathbf{E}(T(n, m_s(n)|Z_n > 0) \sim \mu^{(2-s)n+O(1)} \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

Исходя из асимптотики (14), положим $u_n = a(\mu^n)x + b(\mu^n)$, $n \geq 1$. Заметим, что тогда

$$\exp\{-u_n^2\} \sim e^{-2x} \mu^{-2n} (n \ln \mu), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Теорема 4. Пусть $\sup r_k = \delta < 1$ и $r_k = o(1/k)$, $k \rightarrow \infty$, тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\} | W > 0), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Доказательство. Используем ту же оценку (4), что и в доказательстве теоремы 1. Возьмем $2\delta/(1 + \delta) < s < 1$. Пусть $\delta_n = \sup_{k > m_s(n)} r_k$, тогда $\delta_n = o(1/n)$ и $n^{\delta_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Сумму по дальностям родства разбиваем на две: от 1 до $m_s(n)$ и от $m_s(n) + 1$ до n . С помощью (16), (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \leq \\ & \leq K(\delta) \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(R(n, k) | Z_n > 0) r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1 + r_k}\right\} \leq \\ & \leq K(\delta) \delta \mathbf{E}(T(n, m_s(n) | Z_n > 0) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1 + \delta}\right\} + \\ & + K(\delta) \delta_n \mathbf{E}(T(n, n) | Z_n > 0) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1 + \delta_n}\right\} = \\ & = \mu^{(2-s)n+O(1)} \mu^{-(2/(1+\delta))(1+o(1))} + o(1/n) \mu^{2n} \mu^{-2n/(1+\delta_n)} (n \ln \mu)^{1/(1+\delta_n)} = \\ & = \mu^{(2\delta/(1+\delta)-s)n(1+o(1))} + o(n^{-\delta_n(1+o(1))}) \mu^{2n\delta_n(1+o(1))} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При этом

$$\mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{E}(\Lambda(x)^W | W > 0) = \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\} | W > 0), \quad n \rightarrow \infty,$$

что соответствует пределу для максимумов независимых случайных признаков частиц. Отсюда получаем (19). \square

Общая закономерность, по-видимому, в том, что чем быстрее растет процесс, тем в более близком родстве оказываются частицы одного поколения, и тем быстрее должны убывать корреляции признаков.

3 Случай тяжелых хвостов

Пусть $\kappa(i, n, m)$ — номер предка i -ой частицы n -го поколения в m -ом поколении, $0 < m < n$, $1 \leq i \leq Z_n$. Положим также $\kappa(i, n, n) = i$ и $\kappa(i, n, m) = 1$ при $m < 0$. Пусть задано распределение A на \mathbf{R}_+ с правильно меняющимся хвостом, а именно, $\bar{A}(x) \sim x^{-\gamma}L(x)$, $x \rightarrow \infty$, где L — медленно меняющаяся функция, $\gamma > 0$. Тогда для любого $c > 0$ верно

$$\bar{A}(x/c) \sim c^\gamma \bar{A}(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Пусть $v(s)$ — положительная неубывающая функция, такая, что верно $s\bar{A}(v(s)) \rightarrow 1$, $s \rightarrow \infty$. Заметим, что $v(s)$ заведомо существует и является правильно меняющейся с показателем $1/\gamma$ [18, §1.5].

Предположим, что признак i -ой частицы n -го поколения задан формулой

$$\xi_{n,i} = \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k, \kappa(i, n, n-k)}, \quad (21)$$

где случайные величины $\eta_{n,i}$, $n \in \mathbf{Z}$, $i \geq 1$, независимы и имеют распределение A , и a_k , $k \geq 0$, — неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\gamma = 1. \quad (22)$$

Тогда в силу (21) все признаки частиц имеют одинаковое распределение

$$F(x) = \prod_{k=0}^{\infty} A\left(\frac{x}{a_k}\right),$$

которое в силу (20) и (22) имеет хвост $\bar{F}(x) \sim \bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$, а в случае $A(x) = \exp\{-(x/c)^{-\gamma}\}$, $x > 0$, $c > 0$ (распределение Фреше) верно даже равенство $F = A$.

Возникающая при этом зависимость признаков частиц в поколении проще всего характеризуется коэффициентами верхней хвостовой зависимости. Напомним, что согласно [16, §5.4] таким коэффициентом для пары случайных величин (X, Y) с распределениями F и G называется предел

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1-0} \mathbf{P}(Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t)),$$

если он существует. Будем использовать эквивалентное представление

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{1 - \mathbf{P}(X \leq F^{-1}(t), Y \leq G^{-1}(t))}{1 - t}. \quad (23)$$

Лемма 4. Коэффициент верхней хвостовой зависимости признаков частиц, имеющих ближайшего общего предка k поколений назад, равен

$$\lambda_U(k) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j^\gamma, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Указанные признаки частиц X и Y формируются максимумами из общей части, относящейся к поколениям до $(n-k)$ -го включительно, и независимых частей, относящихся к последним k поколениям, включая текущее. Таким образом, получаем

$$\mathbf{P}(X \leq u, Y \leq u) = \prod_{j=k}^{\infty} A\left(\frac{u}{a_j}\right) \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} A\left(\frac{u}{a_j}\right) \right\}^2 = F(u) \prod_{j=0}^{k-1} A\left(\frac{u}{a_j}\right),$$

откуда в силу (20) следует

$$1 - \mathbf{P}(X \leq u, Y \leq u) \sim \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} a_j^\gamma\right) \bar{A}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

С помощью (23) получаем утверждение леммы. \square

Таким образом, для любой невозрастающей последовательности $\lambda_k \in (0, 1)$, $k \geq 1$, стремящейся к нулю, можно взять $a_0 = (1 - \lambda_1)^{1/\gamma}$ и $a_k = (\lambda_k - \lambda_{k+1})^{1/\gamma}$, $k \geq 1$, и тогда будет выполняться $\lambda_U(k) = \lambda_k$ для всех $k \geq 1$.

Рассмотрим, в частности, модель максимум-авторегрессии первого порядка

$$\xi_{n,i} = a\xi_{n-1,\kappa(i,n,n-1)} \vee b\xi_{n,i}^*, \quad a \in (0, 1), \quad b > 0, \quad (24)$$

где $\xi_{n,i}$ — признак i -ой частицы в n -ом поколении, а случайные величины $\xi_{n,i}^*$ независимы и имеют распределение A .

Тогда при $b = (1 - a^\gamma)^{1/\gamma}$ модель эквивалентна (21) с $a_k = ba^k$, и $\lambda_U(k) = a^{\gamma k}$, $k \geq 1$, по лемме 5.

Пусть $Z(m, n)$ — число частиц ветвящегося процесса в момент $m \leq n$, которые имеют непустое потомство в момент n . Процесс $Z(m, n)$, $0 \leq m \leq n$ называется редуцированным процессом [4, §10].

Теорема 5. Пусть для любого $K \geq 1$ верно

$$((Z(n-k, n)/c_n)_{0 \leq k \leq K} | Z_n > 0) \xrightarrow{d} \zeta(b_k)_{0 \leq k \leq K}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где ζ — положительная случайная величина, $b_k \geq 0$, $k \geq 0$, и $c_n > 0$, $n \geq 1$, — некоторые числовые последовательности, и $u_n = xv(c_n)$, $n \geq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{E} \exp\{-\theta x^{-\gamma} \zeta\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (26)$$

где

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\gamma b_k. \quad (27)$$

Доказательство. Прежде всего, из (21) получаем

$$M_n \stackrel{d}{=} \bigvee_{k=0}^{\infty} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right),$$

полагая $Z(m, n) = 1$ при $m < 0$.

Пусть $1 \leq K \leq n$. Определим

$$\begin{aligned} M_n^- &= \bigvee_{k=0}^K \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right), \\ M_n^+ &= \left(\bigvee_{k=K+1}^{\infty} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right) \right) \vee \left(\bigvee_{k=0}^K \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

тогда³ $M_n^- \leq_d M_n \leq_d M_n^+$, поскольку $Z(n-k, n)$ не возрастает по k . В силу этого же факта последовательность b_k , $k \geq 1$, является неубывающей.

Тогда из (25) и (28) следует

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n^+ \leq u_n | Z_n > 0) = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ - \left(\lambda_U(K+1)b_K + \sum_{k=0}^K a_k^\gamma b_k \right) x^{-\gamma} \zeta \right\}, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n^- \leq u_n | Z_n > 0) = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ - \left(\sum_{k=0}^K a_k^\gamma b_k \right) x^{-\gamma} \zeta \right\}, \end{aligned}$$

откуда переходя к пределу по $K \rightarrow \infty$ получаем (26). □

Пример 3.1А. Для критических процессов, согласно [19], имеем $c_n = n$, $\zeta \sim \text{Exp}(1/B)$, $b_k = \mathbf{P}(Z_k > 0) = 1 - f^{(k)}(0)$, где $f^{(k)}$ — k -ая итерация производящей функции числа потомков, поэтому

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(n) | Z_n > 0) \rightarrow (1 + \theta B e^{-x})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\gamma (1 - f^{(k)}(0)). \quad (29)$$

Так, в модели максимум-авторегрессии, если распределение числа потомков геометрическое (начиная от нуля), то $1 - f^{(k)}(0) = 1/(k+1)$ и

$$\theta = -(1 - a^\gamma) \frac{\ln(1 - a^\gamma)}{a^\gamma}. \quad (30)$$

При $a \rightarrow 0$ получаем $\theta \rightarrow 1$, а при $a \rightarrow 1$ верно $\theta \rightarrow 0$, как и следовало ожидать.

Пример 3.1В. Для критических процессов с бесконечной дисперсией числа потомков, когда $f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, где $\alpha \in (0, 1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся в нуле

³Здесь через \leq_d обозначено отношение стохастического порядка случайных величин: $X \leq_d Y$, если $\mathbf{P}(X > u) \leq \mathbf{P}(Y > u)$.

функция [18], согласно [20], имеем $b_k = \mathbf{P}(Z_k > 0) = 1 - f^{(k)}(0)$, $c_n = 1/b_n$, $\mathbf{E}e^{-t\zeta} = 1 - (1 + t^{-\alpha})^{-1/\alpha}$, поэтому

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(c_n)|Z_n > 0) \rightarrow (1 + \theta x^{-\gamma\alpha})^{-1/\alpha}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где θ также описывается (29).

Пример 3.2. Для околоритических процессов имеем $c_n = g(n)$, $\zeta \sim \text{Exp}(1)$, $b_k \equiv 1$. Это следует из (9) с заменой n на $n - K$ и того, что в силу закона больших чисел,

$$((Z_{n-k}/m)_{0 \leq k \leq K} | Z_{n-K} = m) \rightarrow (g(n-k)/g(n-K))_{0 \leq k \leq K}, \quad m \rightarrow \infty,$$

но $g(n-k)/g(n-K) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, для всех $0 \leq k \leq K$. В силу (22) получаем $\theta = 1$ и

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(g(n))) \rightarrow (1 + e^{-x})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пример 3.3. Для надкритических процессов в силу (14) и согласно [21] имеем $c_n = \mu^n$, $\zeta \stackrel{d}{=} (W|W > 0)$, $b_k = \mu^{-k}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(\mu^n)|Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{E}(\exp\{-\theta x^{-\gamma}W\}|W > 0), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} \mu^{-k}.$$

В частности, в модели максимум-авторегрессии получаем

$$\theta = (1 - a^{\gamma})/(1 - a^{\gamma}/\mu). \quad (31)$$

Заметим, что, как известно, для выполнения (14) не обязательно наличие конечной дисперсии, достаточно условия $\mathbf{E}Z_1 \ln^+ Z_1 < \infty$, и наш результат останется верным.

Иногда предельное распределение можно найти в явном виде. В [3, гл. 1, §7.1] приведен пример дробно-линейной производящей функции

$$f(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}, \quad b, c > 0, \quad b + c \leq 1,$$

(модель Лотки для числа потомков по мужской линии), в случае которой

$$\mu = \frac{b}{(1-c)^2},$$

и при $\mu > 1$ вероятность вырождения

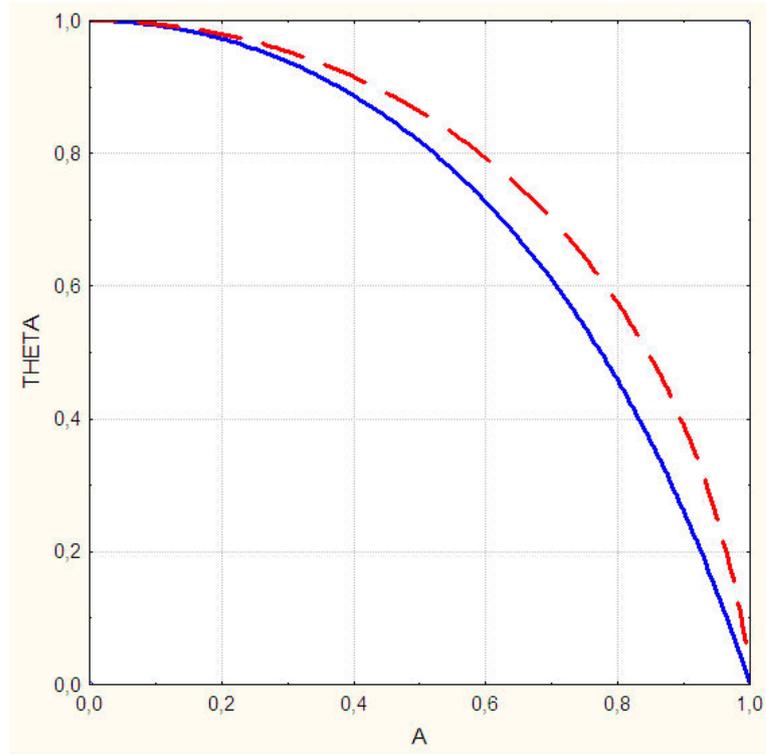
$$q = \frac{1 - (b+c)}{c(1-c)}.$$

Тогда согласно [3, гл. 1, §8.5] условное распределение $(W|W > 0)$ оказывается показательным с параметром $p = 1 - q$, так что

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(\mu^n)|Z_n > 0) \rightarrow (1 + \theta x^{-\gamma}/p)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Возникшее предельное распределение называют лог-логистическим или распределением Фиска (в экономике).

На рис. 1 представлены графики $\theta(a)$: пример 3.1А (30) с $\gamma = 2$ пунктиром, пример 3.3 (31) с $\gamma = 2$, $\mu = 3$ сплошной линией.

Рис. 1: показатели $\theta(a)$

4 Модель сестринской зависимости

Изучим асимптотику максимума признаков частиц первого поколения M_n при $Z_0 = n \rightarrow \infty$.

В данном случае максимум признаков частиц первого поколения M_n представляет собой максимум n независимых случайных величин, распределенных как $Y = \vee_{i=1}^{\nu} X_i$, где ν имеет распределение числа потомков, а X_1, \dots, X_ν имеют совместное распределение как признаки сестер. Будем предполагать, что $0 < \mu < \infty$, а случайные величины X_1, \dots, X_ν симметрично зависимы и каждая имеет распределение F , причем совместное распределение любой пары не зависит от ν (при $\nu \geq 2$). Обозначим распределение Y через G . Если $\nu = 0$, то полагаем $Y = -\infty$, так что распределение G может быть несобственным. Но поскольку $\mathbf{P}(Z_1 > 0) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то предельное распределение M_n (при соответствующей нормировке) будет собственным, и нет смысла вводить условные вероятности с условием $Z_1 > 0$ (для $M_n > -\infty$).

Пусть для каждого $s \in (0, 1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $F(u_n(s))^{\mu n} \rightarrow s$, что эквивалентно $n\bar{F}(u_n(s)) \rightarrow (-\ln s)/\mu$, а в рассматриваемой модели также эквивалентно $\mathbf{E}F(u_n(s))^{Z_1} \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$, по закону больших чисел. Далее определим достаточные условия, при которых $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \rightarrow s^\theta$, для некоторого $\theta > 0$.

Напомним, что согласно [17, теорема 1.7.13], если $0 < \tau < \infty$, то последовательность u_n , удовлетворяющая $n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau$, существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x-0)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

При этом распределение F не обязано принадлежать области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона при линейной нормировке.

Обозначим через λ_U коэффициент верхней хвостовой зависимости между признаками любых двух сестер.

Теорема 6. Если $\lambda_U = 0$ и $\sigma^2 < \infty$, то $\theta = 1$.

Доказательство. Используя неравенства Бонферрони

$$k\bar{F}(x) - \frac{k(k-1)}{2}\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) \leq 1 - \mathbf{P}(Y > x | \nu = k) \leq k\bar{F}(x), \quad k \geq 2,$$

и равенство $\mathbf{P}(Y > x | \nu = 1) = \bar{F}(x)$, усреднением по ν получаем

$$\mu\bar{F}(x) - \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu}{2}\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) \leq \bar{G}(x) \leq \mu\bar{F}(x).$$

Поскольку из-за $\lambda_U = 0$ верно $\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) = o(\bar{F}(x))$, $x \rightarrow \infty$, то получаем $\bar{G}(x) \sim \mu\bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) = G(u_n(s))^n \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$. \square

Условие $\lambda_U = 0$ выполнено, например, если признаки сестер имеют совместное нормальное распределение с любым коэффициентом корреляции $\rho < 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда признаки сестер связаны строго архимедовой копулой. Напомним соответствующие понятия согласно [16].

Копулой C называется функция многомерного распределения на $[0, 1]^d$, $d \geq 2$, если все частные распределения являются равномерными на $[0, 1]$. Согласно теореме Склера, любая функция многомерного распределения в \mathbf{R}^d представима в виде

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

где F_i , $1 \leq i \leq d$, — функции частных распределений. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если частные распределения непрерывны, то такое представление единственно.

Строго архимедовой копулой называется копула вида

$$C_d(y_1, \dots, y_d) = \psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \psi(y_i) \right), \quad (32)$$

где ψ — убывающая функция на $[0, 1]$, называемая генератором, $\psi(0) = +\infty$, $\psi(1) = 0$. При $d = 2$ достаточно, чтобы эта функция была выпуклой. Если потребовать еще, чтобы функция ψ^{-1} была вполне монотонной, то формула (32) определяет копулу при любом $d \geq 2$.

Итак, предположим, что копула совместного распределения X_1, \dots, X_ν при условии $\nu = d \geq 1$ задается (32).

Теорема 7. Если $\psi(y) \sim c(1-y)^\gamma$, $y \rightarrow 1-0$, то $\theta = \mathbf{E}\nu^{1/\gamma}/\mu$.

Доказательство. Из условия получаем $1 - \psi^{-1}(t) \sim (t/c)^{1/\gamma}$, $t \rightarrow 0+0$, и

$$1 - C_d(1-\varepsilon, \dots, 1-\varepsilon) \sim d^{1/\gamma}\varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (33)$$

Переходя к распределению Y и усредняя по ν , получаем

$$\bar{G}(u_n(s)) = 1 - \mathbf{E}C_\nu(F(u_n(s)), \dots, F(u_n(s))) \sim \mathbf{E}\nu^{1/\gamma}\bar{F}(u_n(s)), \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда следует утверждение теоремы. \square

Заметим, что в силу выпуклости ψ возможно только $\gamma \geq 1$, и существование $\mathbf{E}\nu^{1/\gamma}$ следует из $\mu < \infty$.

В качестве копулы, удовлетворяющей условию теоремы 6 с $\gamma > 1$, можно назвать, например, копулу Гумбеля-Хоугаарда с $\psi(y) = (-\ln y)^\gamma$:

$$C_d(y_1, \dots, y_d) = \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^d (-\ln y_i)^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\}, \quad \gamma \geq 1.$$

Напротив, копулы Клейтона и Франка, например, удовлетворяют условию теоремы 5: для них $\lambda_U = 0$.

Интересно выяснить, как связаны показатели γ и λ_U для строго архимедовых копул. С помощью (23) и (33) получаем $\lambda_U = 2 - 2^{1/\gamma}$. Отсюда $\gamma = 1/\log_2(2 - \lambda_U)$. Таким образом, $\theta = \mathbf{E}\nu^{\log_2(2 - \lambda_U)}/\mu$, и θ убывает от 1 до $\mathbf{P}(\nu > 0)/\mu$ с ростом λ_U от 0 до 1. Например, в случае ν , принимающей только значения 1 и 2 с вероятностями p_1 и p_2 , зависимость оказывается самой простой — линейной: $\theta = (p_1 + p_2(2 - \lambda_U))/(p_1 + 2p_2)$.

Заметим, что утверждение теоремы 6 сформулировано в общем виде, но из него легко получить следствия для частных случаев.

Например, если F — стандартное нормальное распределение (как в разделе 2), то

$$\mathbf{P}(M_n \leq a(\mu n)x + b(\mu n)) \rightarrow \exp\{-\theta e^{-x}\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $a(n)$ и $b(n)$ определены в (2).

Если же $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$, $x \rightarrow \infty$, где L — медленно меняющаяся функция, $\alpha > 0$, и $v(r)$ — положительная неубывающая функция, такая, что верно $r\bar{F}(v(r)) \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$ (как в разделе 3), то

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(\mu n)) \rightarrow \exp\{-\theta x^{-\alpha}\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Список литературы

- [1] *Arnold B.C., Villasenor J.A.*, The tallest man in the world // Statistical theory and applications. Papers in honor of H.A.David. Springer, 1996, p. 81–88.
- [2] *Pakes A.G.*, Extreme order statistics on Galton-Watson trees // *Metrika*, 1998, v. 47, p. 95–117.
- [3] *Харрис Т.*, Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
- [4] *Ватутин В.А.*, Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: МИАН, 2008.
- [5] *Mitov K.V., Yanev G.P.*, Maximum individual score in critical two-type branching processes // *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 2002, v. 55, № 11, p. 17–22.
- [6] *Yanev G.P.*, Revisiting offspring maxima in branching processes // *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, 2007, v. 18, p. 401–426.
- [7] *Bertoin J.*, On the maximal offspring in a critical branching processes with infinite variance // *J. Appl. Probab.*, 2011, v. 48, № 2, p. 576–582.

- [8] *Bertoin J.*, On the maximal offspring in a critical branching processes with finite variance // *J. Appl. Probab.*, 2013, v. 50, № 3, p. 791–800.
- [9] *Lebedev A.V.*, Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // *Extremes*, 2008, v. 11, № 2, p. 203–216.
- [10] *Лебедев А.В.*, Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* 2008, № 5, с. 3–6.
- [11] *Лебедев А.В.*, Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // *Теория вероятностей и ее применения*, 2012, т. 57, № 4, с. 788–794.
- [12] *Лебедев А.В.*, Асимптотическое поведение экстремумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с наследственностью // *Ярославский педагогический вестник. Сер. Физико-математические и естественные науки*, 2010, № 1, с. 7–14. <http://www.math.msu.su/departement/probab/linasl.pdf>
- [13] *O’Connel N.*, The genealogy of branching processes and the age of our most recent common ancestor // *Adv. Appl. Probab.*, 1995, v. 27, p. 418–442.
- [14] *Adami C., Chu J.*, Critical and near-critical branching processes // *Phys. Rev.*, 2002, v. 66, 011907.
- [15] *Budhiraja A., Reinhold D.*, Near critical catalyst-reactant process with controlled immigration // *Adv. Appl. Probab.*, 2013, v. 23, № 5, p. 2053–2098.
- [16] *Nelsen R.*, An introduction to copulas. Springer, 2006.
- [17] *Лидбеттер М., Лундгрэн Г., Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
- [18] *Сенета Е.*, Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [19] *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.*, The structure of reduced critical Galton-Watson processes // *Math. Nachr.*, 1977, v. 79, № 1, p. 233–241.
- [20] *Якымив А.Л.*, Редуцированные ветвящиеся процессы // *Теория вероятностей и ее применения*, 1980, т. 25, № 3, с. 593–596.
- [21] *Якымив А.Л.*, Асимптотические свойства докритических и надкритических редуцированных ветвящихся процессов // *Теория вероятностей и ее применения*, 1985, т. 30, № 1, с. 183–188.

Архимедовы операции и копулы с приложениями к ветвящимся процессам со взаимодействием частиц¹

Лебедев А.В.²

Рассматриваются обобщенные операции суммирования (коммутативные и ассоциативные бинарные операции), изоморфные сложению. Устанавливается соответствие между операциями и строго архимедовыми копулами, а также их свойствами. Изучается возможность приложений к ветвящимся процессам со взаимодействием частиц типа конкуренции. Обсуждается понятие архимедовости применительно к операциям и копулам, а также его возможные обобщения на стохастические операции.

1 Введение

В классической монографии [1] и работах автора [2, 3] рассматривались обобщенные операции суммирования (коммутативные и ассоциативные бинарные операции) на $T \subset \mathbf{R}$ вида

$$x \oplus_f y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad x, y \in T, \quad (1)$$

где функции $f : U \rightarrow T$ строго монотонны и непрерывны, $U = \mathbf{R}$ или $U = \mathbf{R}_+$. В силу соотношения

$$f(r + s) = f(r) \oplus_f f(s), \quad r, s \in U,$$

эти операции можно назвать изоморфными сложению. Одним из важных свойств таких операций является то, что по $z = x \oplus_f y$ и x можно восстановить y , т.е. существует и “обобщенное вычитание”: $y = f(f^{-1}(z) - f^{-1}(x))$. Примером обобщенной операции суммирования, не изоморфной сложению, является максимум \vee : при $x > y$ по $x \vee y$ и x невозможно восстановить y , так что информация теряется безвозвратно.

При $f(u) = e^u$, очевидно, получаем в (1) умножение на $T = (0, +\infty)$.

В [4] рассматривались операции вида (1) с $f(u) = -h \ln u$, $u > 0$, применительно к исследованию уравнения Бюргерса и к нелинейному осреднению в математической экономике. В [5] предлагалось использовать операции вида (1) с $f(u) = |u|^s \operatorname{sign} u$, $s > 0$ к обработке сейсмограмм.

Далее будем полагать $T \subset \mathbf{R}_+$.

Операции (1) логично назвать *архимедовыми* по аналогии с архимедовыми копулами, представимыми подобным образом [6, гл. 4].

¹Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 14-01-00075.

²Лебедев Алексей Викторович, avlebed@yandex.ru, доцент, кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Напомним понятия из теории копул, следуя [6].

Копулой C называется функция многомерного распределения на $[0, 1]^d$, $d \geq 2$, если все частные распределения являются равномерными на $[0, 1]$. Согласно теореме Склера, любая функция многомерного распределения на \mathbf{R}^d представима в виде

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

где F_i , $1 \leq i \leq d$ — функции частных распределений. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если частные распределения непрерывны, то такое представление единственно. Далее мы будем рассматривать только двумерные копулы ($d = 2$).

Функция двух переменных $C(u, v)$, $u, v \in [0, 1]$, является копулой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(C1) $C(u, 0) = C(0, v) = 0$;

(C2) $C(u, 1) = u$, $C(1, v) = v$;

(C3) $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$, где $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$.

Поскольку копула является функцией распределения, для нее верно свойство монотонности

(C4) $C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2)$, где $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$,

которое вытекает из (C1)–(C3). Кроме того, имеют место границы Фреше-Хеффдинга:

(C5) $\max\{u + v - 1, 0\} \leq C(u, v) \leq \min\{u, v\}$.

Нижняя граница дается копулой совершенной отрицательной зависимости, верхняя — копулой совершенной положительной зависимости. Они соответствуют распределениям случайных пар $(R, 1 - R)$ и (R, R) , где случайная величина R равномерно распределена на $[0, 1]$.

Копулой выживания \hat{C} совместного распределения случайных величин X и Y называется функция, связывающая уже не функции распределения, а хвосты:

$$\mathbf{P}(X > x, Y > y) = \hat{C}(\mathbf{P}(X > x), \mathbf{P}(Y > y)).$$

Копула выживания \hat{C} связана с копулой C соотношением

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v),$$

и наоборот.

Положительными копулами назовем такие, что $C(u, v) > 0$ при всех $u, v \in (0, 1)$.

Строго архимедовой копулой называется копула, представимая в виде

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \tag{2}$$

где $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная, строго убывающая, выпуклая функция, $\varphi(0) = +\infty$, $\varphi(1) = 0$, называемая генератором. Понятно, что генератор определяется с точностью до постоянного положительного множителя.

Строго архимедовы копулы являются положительными. Для нестрого архимедовых копул допускается $\varphi(0) < \infty$, тогда вместо инверсии берется псевдоинверсия $\varphi^{[-1]}$: в области $t \geq \varphi(0)$ полагают $\varphi^{[-1]}(t) = 0$, и таким образом копула перестает быть положительной.

Архимедовы копулы являются коммутативными и ассоциативными (как операции на $[0, 1]$). Более того, показано, что если некоторая копула является коммутативной и ассоциативной, а также обладает свойством $C(u, u) < u$ при всех $u \in (0, 1)$, то она является архимедовой. Примером неархимедовой коммутативной и ассоциативной копулы является копула совершенной положительной зависимости.

2 Операции, порожденные копулами

Определим теперь операции на \mathbf{R}_+ , порожденные строго архимедовыми копулами, следующим образом:

$$x \oplus_C y = -\ln C(e^{-x}, e^{-y}), \quad x, y \geq 0. \quad (3)$$

В этом определении мы используем положительность копулы.

Понятно, что такие операции будут коммутативными и ассоциативными, т.е. обобщенными операциями суммирования. Понятно также, что они представимы в виде (1), и между функциями f и φ устанавливаются следующие соотношения:

$$f(s) = -\ln \varphi^{-1}(s), \quad \varphi(t) = f^{-1}(-\ln t). \quad (4)$$

Из свойств генератора строго архимедовой копулы с помощью (4) получаем следующие свойства f : f непрерывна и строго возрастает на \mathbf{R}_+ , $f(0) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$. Таким образом, получаем некоторый подкласс архимедовых операций (1) с $U = T = \mathbf{R}_+$.

Можно дать следующую вероятностную интерпретацию операции (4): пусть (X, Y) — пара стандартных показательных случайных величин с копулой выживания C , и Z — также стандартная показательная случайная величина, тогда

$$\mathbf{P}(Z > x \oplus_C y) = \mathbf{P}(X > x, Y > y).$$

Посмотрим, во что переходят свойства копулы (C1)–(C5) под действием преобразования (3):

(O1) $x \oplus_C y \rightarrow +\infty$, если $x \rightarrow +\infty$ или $y \rightarrow +\infty$;

(O2) $x \oplus_C 0 = x$, $0 \oplus_C y = y$;

(O3) $\exp\{-x_2 \oplus_C y_2\} - \exp\{-x_2 \oplus_C y_1\} - \exp\{-x_1 \oplus_C y_2\} + \exp\{-x_1 \oplus_C y_1\} \geq 0$, где $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$;

(O4) $x_1 \oplus_C y_1 \leq x_2 \oplus_C y_2$, где $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$;

(O5) $\max\{x, y\} \leq x \oplus_C y \leq -\ln \max\{e^{-x} + e^{-y} - 1, 0\}$.

В последнем случае при $e^{-x} + e^{-y} - 1 \leq 0$ верхняя граница исчезает.

Рассмотрим некоторые примеры копул и порожденных ими операций.

Пример 2.1. Копула Гумбеля-Хоугаарда

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right\}, \quad \theta \geq 1,$$

генератор $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, функция $f(s) = s^{1/\theta}$, операция

$$x \oplus_C y = (x^\theta + y^\theta)^{1/\theta}.$$

Пример 2.2. Копула Клейтона

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{1/\theta}, \quad \theta > 0,$$

генератор $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$, функция $f(s) = (1/\theta) \ln(1 + s)$, операция

$$x \oplus_C y = \frac{1}{\theta} \ln(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1).$$

Пример 2.3. Копула Гумбеля-Барнетта

$$C(u, v) = uv \exp\{-\theta \ln u \ln v\}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

генератор $\varphi(t) = \ln(1 - \theta \ln t)$, функция $f(s) = (e^s - 1)/\theta$, операция

$$x \oplus_C y = x + y + \theta xy.$$

Пример 2.4. Копула Али-Михаил-Хака

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}, \quad |\theta| \leq 1,$$

генератор $\varphi(t) = \ln((1 - \theta(1 - t))/t)$, функция $f(s) = \ln((e^s - \theta)/(1 - \theta))$, операция

$$x \oplus_C y = \ln((1 - \theta)e^{x+y} + \theta(e^x + e^y - 1)).$$

Пример 2.5. Копула Франка

$$C(u, v) = -\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right),$$

генератор $\varphi(t) = -\ln((e^{-\theta t} - 1)/(e^{-\theta} - 1))$, функция $f(s) = -\ln(-(1/\theta) \ln(1 + e^{-s}(e^{-\theta} - 1)))$, операция

$$x \oplus_C y = -\ln\left\{-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta e^{-x}} - 1)(e^{-\theta e^{-y}} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)\right\}.$$

Рассмотрим дистрибутивные обобщенные операции суммирования, т.е. такие, что

$$(\lambda x) \oplus (\lambda y) = \lambda(x \oplus y), \quad \forall \lambda > 0. \quad (5)$$

Применительно к копулам это дает условие

$$C(u^\lambda, v^\lambda) = C^\lambda(u, v),$$

характеризующее класс копул экстремальных значений [6, §3.3.4]. Единственным пересечением этого класса с классом архимедовых копул являются копулы Гумбеля-Хоугаарда (пример 2.1), а в качестве дистрибутивных операций получаем $x \oplus y = (x^\theta + y^\theta)^{1/\theta}$. Такие операции также можно назвать *безмасштабными* (free-scale), поскольку они не зависят от единиц измерения (масштаба) аргументов.

Заметим, что копуле независимости $C(u, v) = uv$ соответствует операция простого сложения $x + y$. Таким образом, зависимость случайных величин, отражаемая копулой, соответствует отклонению операции \oplus_C от простого сложения. В связи с этим можно рассмотреть различные меры зависимости как характеристики операций. Возьмем, например, коэффициенты Кендалла τ_C и Спирмена ρ_C [6, гл. 5]:

$$\tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad \rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3,$$

тогда получаем

$$\tau_C = 4\mathbf{E} \exp\{-X \oplus_C Y\} - 1, \quad \rho_C = 12\mathbf{E} \exp\{-Z \oplus_C W\} - 3,$$

где (X, Y) — пара стандартных показательных случайных величин с копулой выживания C , (Z, W) — пара независимых стандартных показательных случайных величин. Фактически, коэффициент Спирмена можно применять для оценки отклонения от сложения

произвольных обобщенных операций суммирования на \mathbf{R}_+ , однако при этом уже нельзя гарантировать его попадание в традиционную область значений $[-1, 1]$.

Можно рассмотреть копулы положительной квадрантной зависимости $C(u, v) \geq uv$ и отрицательной квадрантной зависимости $C(u, v) \leq uv$. Для порожденных ими операций получаем $x \oplus_C y \leq x + y$ и $x \oplus_C y \geq x + y$ соответственно. В примерах 2.1 и 2.2 имела место положительная квадрантная зависимость, в примере 2.3 — отрицательная, в примерах 2.4 и 2.5 — положительная при $\theta > 0$ и отрицательная при $\theta < 0$.

Разность между обычной суммой и обобщенной можно назвать *дефектом* операции, подобно дефекту масс в ядерной физике: масса атомного ядра меньше, чем сумма масс составляющих его протонов и нейтронов.

3 Приложения к обобщенным ветвящимся процессам

Понятие “ветвящийся процесс” применительно к марковскому процессу с дискретным временем и обобщенной операцией суммирования \oplus может быть введено следующим образом [3]: пусть случайные величины η_k , $1 \leq k \leq m$, независимы и распределены как значения процесса X_n при условиях $X_{n-1} = x_k$ соответственно, тогда X_n распределено как $\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_m$ при условии $X_{n-1} = x_1 + \dots + x_m$, для любых $x_k \geq 0$, $m \geq 2$.

Очевидно, это определение верно по отношению к процессам Гальтона-Ватсона с простым сложением частиц. Переходя от дискретного к непрерывному пространству состояний, получаем процессы Иржины [7, 8], которые могут быть представлены в виде

$$X_n = \xi_n(X_{n-1}),$$

где $\xi_n(t)$, $t \geq 0$, — независимые вероятностные копии некоторого неотрицательного процесса Леви $\xi(t)$. Переход от целых к произвольным неотрицательным значениям может быть обусловлен как большим количеством частиц в популяции (так поступают в демографии, биологии и др.), так и содержательной стороной модели (если речь идет о времени, массе и т.п.). Заменяя сложение на максимум, получаем максимальные ветвящиеся процессы, которым посвящен цикл работ автора, из них упомянем лишь [9] и обзор [10]. Ветвящиеся процессы с операциями вида (1) рассматривались автором в [2, 3]. Вводилось конструктивное представление для них формулой:

$$X_n = f(\xi_n(X_{n-1})), \quad (6)$$

где $\xi_n(t)$, $t \geq 0$, — независимые вероятностные копии некоторого процесса Леви $\xi(t)$.

Обозначим область значений $\xi(t)$ в (6) через V . Чтобы определение (6) стало содержательным, следует потребовать выполнения условий: $V \subset U$, $T \subset \mathbf{R}_+$. Тогда (6) задает цепь Маркова на T .

Можно также ввести сопутствующие величины $Y_n = f^{-1}(X_n)$, для которых получаем формулу

$$Y_n = \xi_n(f(Y_{n-1})), \quad (7)$$

определяющую цепь Маркова на V , что обобщает φ -ветвящиеся процессы [11].

В биологических приложениях обобщенные операции суммирования могут описывать взаимодействие частиц типа конкуренции (за территорию, ресурсы и т.п.), в силу которой итоговое число частиц в поколении может оказаться меньше, чем при простом сложении числа потомков предыдущего поколения. Заметим, что взаимодействие здесь происходит

только между частицами одного поколения; такая модель наиболее адекватна случаю “однолетних” организмов, чей жизненный цикл укладывается от весны до осени.

Рассмотрим с этой точки зрения полученные свойства операций, порожденных строго архимедовыми копулами:

- (O1) означает неограниченность возможной численности популяции сверху. Отметим, что противоположный пример был рассмотрен в [3], где задавались максимальная численность популяции $A > 0$ и $f(x) = A(1 - e^{-x/A})$. Однако если типичная численность популяции мала по сравнению с максимально возможной, то ограничения можно пренебречь;
- (O2) означает, что при взаимодействии с пустой группой частиц численность не меняется, что логично;
- (O3) не имеет содержательной интерпретации;
- (O4) означает, что при увеличении численностей частиц в исходных взаимодействующих группах их итоговое число также не уменьшится, что также выглядит разумно;
- (O5) означает (по нижней границе), что итоговое число частиц не меньше, чем максимум из численностей взаимодействующих групп. Это возможно, если при взаимодействии пары частиц выживает хотя бы одна (т.е. они не аннигилируют). Верхняя граница не имеет содержательной интерпретации.

Таким образом, перечисленные свойства представляются вполне реалистичными во многих случаях.

Добавим также, что здесь нужно дополнительно потребовать $x \oplus y \leq x + y$ (поскольку при взаимодействии число частиц не увеличивается), что приводит нас к копулам положительной квадрантной зависимости (см. примеры 2.1, 2.2 и примеры 2.4, 2.5 при $\theta > 0$). Операции оказываются “промежуточными” между суммой и максимумом, а их изучение относится к пока малоисследованной области между классической теорией суммирования и стохастической теорией экстремумов. Подобные операции с точки зрения устойчивых относительно них распределений рассматривались автором в [12]. При этом ветвящиеся процессы с такими операциями также оказываются, в некотором смысле, “промежуточными” между процессами Иржины и максимальными ветвящимися процессами.

Пример 3.1. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ — положительный строго устойчивый процесс Леви, с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\mathbf{E}e^{-t\xi(1)} = e^{-t^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $f(s) = s^{1/\theta}$, $\theta \geq 1$ (см. пример 2.1). Тогда с помощью (6) получаем параметрическое семейство ветвящихся процессов с операциями \oplus_f , заданных стохастически рекуррентными формулами:

$$X_n = X_{n-1}^{1/(\alpha\theta)} \varepsilon_n^{1/\theta},$$

где ε_n , $n \geq 1$, независимы и $\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \xi(1)$. Заметим, что при $\alpha\theta > 1$ эти процессы эргодические (логарифмированием переходим к процессам линейной авторегрессии первого порядка). В пределе при $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha\theta \rightarrow \beta > 1$ имеет место сходимост (в смысле конечномерных распределений) к процессу, заданному формулой

$$X_n = X_{n-1}^{1/\beta} \eta_n, \tag{8}$$

где η_n , $n \geq 1$, независимы и имеют распределение Фреше $\Phi_\beta(x) = \exp\{-x^{-\beta}\}$, $x > 0$ (здесь мы используем сходимост степеней α -устойчивых случайных величин к максимум-устойчивым [12]). Однако процесс (8) является примером максимального ветвящегося процесса [9] с распределением числа потомков Φ_β , и он также эргодический. С другой стороны, при $\theta = 1$ получаем процесс

$$X_n = X_n^{1/\alpha} \varepsilon_n,$$

который является процессом Иржины и уходит в нуль или бесконечность в зависимости от знака $\mathbf{E} \ln \xi(1)$.

Отметим, что марковские ветвящиеся процессы со взаимодействием частиц комплексами и счетным множеством состояний ранее подробно изучались, например, в [13]. Однако здесь мы рассматриваем другие модели и используем другие подходы к их изучению.

Альтернативная интерпретация процесса (6) заключается в том, что мы учитываем только те частицы, которые дают потомство. Иначе говоря, вместо модели, в которой все частицы дают потомство, но не все потомки выживают, можно рассмотреть модель, в которой все выживают, но потомство дают не все, а только часть, определяемая функцией f . Полное число частиц в поколении в этом случае описывает процесс (7).

Отметим, что условие $f(x) \leq x$ логично при описании взаимодействия типа конкуренции, но в общем случае не обязательно. Неравенство $f(x) > x$ допускает такую интерпретацию, что частицы не мешают, а помогают друг другу размножаться, и это проявляется так, как будто их стало больше (чем реально было в поколении), т.е. речь идет уже о взаимодействии типа кооперации.

4 Асимптотическое поведение ветвящихся процессов

Напомним свойства процессов Иржины [7, 8]

$$Z_n = \xi_n(Z_{n-1}). \quad (9)$$

Как и процессы Гальтона–Ватсона, процессы Иржины неустойчивы, и либо вырождаются, либо уходят на бесконечность. Разница в том, что для процессов Гальтона–Ватсона вырождение означает обращение в ноль, начиная с некоторого момента, а для процессов Иржины возможна еще сходимости к нулю без обращения в ноль (почти наверное).

Обозначим $f(\lambda) = -\ln \mathbf{E} e^{-\lambda \xi(1)}$, $\lambda \geq 0$. Эта функция является вогнутой и возрастающей (до бесконечности). В [14, предложение 2.2] была найдена вероятность вырождения процесса Иржины с начальным условием $x > 0$: она равна $e^{-\eta x}$, где

$$\eta = \sup\{\lambda \geq 0 : f(\lambda) = \lambda\},$$

но из доказательства следует, что речь идет о

$$\eta = \sup\{\lambda \geq 0 : f(\lambda) \geq \lambda\},$$

а поскольку в случае $\xi(1) \geq 1$ п.н. верно $f(\lambda) \geq \lambda$ при всех $\lambda \geq 0$, то $\eta = +\infty$ и вырождения не происходит п.н. При $\mathbf{P}(\xi(1) < 1) > 0$ существует $0 \leq \eta < \infty$, поэтому при ненулевом начальном условии всегда имеется положительная вероятность вырождения процесса (9).

Будем рассматривать процессы (6) только при ненулевых начальных условиях (в противном случае получаем тождественный ноль).

Далее нас будут интересовать условия, определяющие асимптотическое поведение процессов (6): их вырождение или невырождение, уход или не уход на бесконечность.

Обозначим $\mu_s = \mathbf{E} \xi(1)^s$, $s > 0$.

Теорема 1. Пусть существуют такие $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < s \leq 1$, что $\mu_s < \infty$ и $f(x) \leq x^s/\mu_s - \varepsilon$ при $x \geq N$, тогда $\mathbf{P}(X_n \rightarrow +\infty) = 0$.

Доказательство. Проверим первый критерий положительной возвратности [15, гл. 1, §4.2, теорема 1]. С учетом того, что $\mathbf{E}\xi(t)^s \leq \mu_s t$, $0 < s \leq 1$, $t \geq 0$, получаем для любого $x \geq N$:

$$\mathbf{E}(X_n | X_{n-1} = x) - x = \mathbf{E}(f(\xi(x)) - x) \leq -\varepsilon,$$

откуда следует, что среднее времени возвращения во множество $[0, N)$ из состояния x конечно и не превышает x/ε . Таким образом, ухода на бесконечность не происходит п.н. \square

Обозначим теперь $r = \inf\{u > 0 : \mathbf{P}(\xi(1) \leq u) > 0\}$, тогда $\xi(1) \geq r$ и $\xi(t) \geq rt$ п.н. Условие $\mathbf{P}(\xi(1) < 1) > 0$ эквивалентно $r < 1$.

Следствие 1. Пусть $f(x) \leq x$, $r < 1$ и выполнены условия теоремы 1, тогда $\mathbf{P}(X_n \rightarrow 0) = 1$.

Доказательство. Заметим, что процесс X_n стохастически мажорируется процессом Иржины Z_n . Построим их на одном вероятностном пространстве с одним начальным условием, тогда $X_n \leq Z_n$, $n \geq 1$ п.н. Поскольку $\mathbf{P}(\xi(1) < 1) > 0$, то $0 \leq \eta < \infty$. Если $\eta = 0$, то Z_n вырождается п.н., а значит, вырождается и X_n . Пусть теперь $\eta > 0$, тогда процесс Z_n либо уходит на бесконечность, либо вырождается. Это значит, что он либо в какой-то момент выходит из множества $V = [0, N)$, либо вырождается, ни разу не выйдя из V . Если в какой-то момент Z_n вышел из V , определим этот момент за κ_1 . Если в этот момент X_n также вышел из V , подождем до момента ν_1 , когда он туда вернется, а если $X_{\kappa_1} \in V$, положим $\nu_1 = \kappa_1$. Построим независимую вероятностную копию процесса Z_n , начиная с момента ν_1 , с начальным условием X_{ν_1} , с соответствующими процессами Леви, и обозначим ее через $Z_n^{(2)}$, тогда $X_n \leq Z_{n-\nu_1}^{(2)}$, $n \geq \nu_1$. Далее, процесс $Z_n^{(2)}$ снова либо выходит из V (и можем определить ν_2 и т.д.), либо вырождается (а с ним и X_n). Поскольку в каждом цикле может наступить вырождение с положительной вероятностью (отделенной от нуля), то процесс X_n вырождается п.н. \square

Пример 4.1. В [3] рассмотрен случай, когда $f(x) = 1 - e^{-x}$, а $\xi(1)$ имеет гамма-распределение. В этом случае по следствию 1 процесс вырождается п.н. Однако проведенное в [3] компьютерное моделирование заставило на тот момент ошибочно предположить наличие стационарного режима (при некоторых значениях параметров и начальных условиях). Этот результат моделирования мог быть связан либо с недостаточно большим промежутком наблюдения процесса, либо со спецификой машинной генерации случайных чисел с заданным распределением.

Теорема 2. Пусть существует такое $\delta > 0$, что $f(rx) \geq x + v(x)$ при $x \in (0, \delta)$, где $v(x)$ — неубывающая функция, $v(x) > 0$, $x > 0$. Тогда $\mathbf{P}(X_n \rightarrow 0) = 0$.

Доказательство. Пусть $X_0 = x_0 > 0$. Рассмотрим числовую последовательность $x_n = f(rx_{n-1})$, $n \geq 1$, тогда $X_n \geq x_n$, $n \geq 1$ п.н. Пусть $x_0 < \delta$, тогда для всех n таких, что $x_{n-1} < \delta$, получаем $x_n \geq x_0 + nv(x_0)$, так что последовательность x_n выходит из области $(0, \delta)$ не более чем за $(\delta - x_0)/v(x_0)$ шагов, а значит, выходит и процесс X_n п.н. \square

Пример 4.2. Если $f(x) = 1 - e^{-x}$, то условие теоремы 2 выполнено только при $r > 1$, а при $r < 1$ работает следствие 1. При $r = 1$ ситуация остается неопределенной.

Пример 4.3. Если $f(x) = 1 - \exp\{-x - \gamma x^2\}$, где $\gamma > 1/2$, то условие теоремы 2 выполняется при $r \geq 1$.

Пример 4.4. Если $f(x) = x^{1/\theta}$, $\theta > 1$, то условие теоремы 2 выполнено при любом $r > 0$.

В примерах 4.2 и 4.3 процесс заведомо ограничен сверху (единицей). В примере 4.4 условия теоремы 1 выполнены, если существует $s > 1/\theta$ такое, что $\mu_s < \infty$, либо $0 < \mu_{1/\theta} < 1$.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2 и существует $N > 0$ такое, что $f(rN) < N$, то существует

$$x^* = \inf\{x > 0 : f(rx) = x\} \in [\delta, N)$$

$$\text{и } \mathbf{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \geq x^*) = 1.$$

Доказательство. Поскольку при $0 < x < \delta$ имеет место $f(rx) > x$, а $f(rN) < N$, то где-то в промежутке $[\delta, N)$ должна быть хотя бы одна точка, в которой $f(rx) = x$. Возьмем из них наименьшую x^* , тогда $x < f(rx) < x^*$ при $x < x^*$ и $f(rx) \geq x^*$ при $x \geq x^*$. Построив последовательность x_n , как в доказательстве теоремы 2, получаем $x_n \rightarrow x^*$ при $x_0 < x^*$ и $x_n \geq x^*$ при $x_0 \geq x^*$. В любом случае $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x^*$, откуда $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \geq x^*$ п.н. \square

Понятно, что если условия теорем 1 и 2 выполнены одновременно, то процесс и не вырождается, и не уходит на бесконечность п.н. Это означает, что он может быть эргодическим. Эргодичность некоторых классов процессов (6) доказана в [2]. Ситуация упрощается, если $\xi(1)$ имеет устойчивое распределение. Однако в общем случае возникает проблема с проверкой условия перемешивания [15, 8, гл. 1, §2], которое тривиально в исходной целочисленной модели.

Когда не удается получить утверждения с вероятностью ноль или единица, можно использовать следующую простую теорему.

Теорема 3. Пусть $X_0 = x > 0$. Тогда:

- 1) если $f(x) \leq x$, то $\mathbf{P}(X_n \rightarrow 0) \geq e^{-\eta x}$, $\mathbf{P}(X_n \rightarrow \infty) \leq 1 - e^{-\eta x}$;
- 2) если $f(x) \geq x$, то $\mathbf{P}(X_n \rightarrow 0) \leq e^{-\eta x}$, $\mathbf{P}(X_n \rightarrow \infty) \geq 1 - e^{-\eta x}$.

Доказательство. Утверждения элементарно следуют из построения процессов X_n и Z_n на одном вероятностном пространстве, так что $X_n \leq Z_n$, $n \geq 1$ п.н. в первом случае и $X_n \geq Z_n$, $n \geq 1$ п.н. во втором. \square

5 Архимедовость и ее обобщения

Название архимедовых копул имеет свою историю. Согласно классической аксиоме Архимеда, если даны два положительных числа a и b , то существует такое натуральное n , что $na > b$. Для архимедовых копул верна следующая модификация этой аксиомы: если $u, v \in (0, 1)$ и задана последовательность $u_n = C(u, u_{n-1})$, $u_1 = u$, то существует такое натуральное n , что $u_n < v$. Получается, чтобы называться “архимедовой”, операции достаточно обладать тем свойством, что при многократном применении к одному и тому же числу результат оказывается либо заведомо меньше, либо заведомо больше другого наперед заданного числа из области определения. Примером неархимедовой операции, очевидно, является максимум.

Рассмотрим операции (1). Пусть заданы два числа $a, b \in T$, причем $f^{-1}(a), f^{-1}(b) > 0$, и последовательность $a_n = a \oplus_f a_{n-1}$, $a_1 = a$, тогда $a_n = f(nf^{-1}(a))$. Получается, что если

f возрастает, то a_n станет больше b , а если f убывает, то наоборот, меньше b , при всех достаточно больших n . В этом смысле такие операции действительно архимедовы.

В [2] рассматривались также стохастические бинарные операции следующего типа. Пусть $f : \mathbf{R} \rightarrow T$ — неотрицательная непрерывная четная функция, строго монотонная на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, $T \subset \mathbf{R}_+$. Обозначим тогда формально через $f^{-1}(t)$ случайную величину, равновероятно принимающую значения положительного и отрицательного корней уравнения $f(s) = t$, либо значение нуль, если $t = f(0)$. Тогда формула (1), где $f^{-1}(x)$ и $f^{-1}(y)$ независимы, определяет стохастическую операцию, которая обозначалась через \oplus_f^\pm . Можно показать, что такие операции являются коммутативными и ассоциативными в смысле равенства по распределению.

В [1, §1.4] фактически рассмотрен случай операции, порожденной функцией $f(s) = |s|^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$. Понятно, что такие операции являются безмасштабными в смысле равенства по распределению.

Следует отметить, что, когда стохастическая операция применяется уже не к числам, а к случайным величинам, предполагается дополнительно, что при каждом применении ее “внутренняя” случайность (в данном случае выбор знаков у слагаемых) не зависит от аргументов.

Применение обобщенных операций суммирования (детерминированных или стохастических) к независимым случайным величинам индуцирует коммутативные и ассоциативные операции на их распределениях, которые называют обобщенными свертками [16].

Введем функцию $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow T$ соотношением $g(s) = f(s)$ при $s \geq 0$, тогда $f(s) = g(|s|)$ и возможно представление:

$$x \oplus_f^\pm y = g(|\delta_1 g^{-1}(x) + \delta_2 g^{-1}(y)|), \quad (10)$$

где δ_i , $i \geq 1$, — независимые случайные величины, равновероятно принимающие значения ± 1 . Пусть $a \in T$ такое, что $g^{-1}(a) > 0$, тогда для последовательности $a_n = a \oplus_f^\pm a_{n-1}$, $a_1 = a$, получаем представление

$$a_n = g \left(g^{-1}(a) \left| \sum_{i=1}^n \delta_i \right| \right),$$

откуда следует, что $a_n \rightarrow g(\infty)$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Возьмем $b \in T$ такое, что $g^{-1}(b) > 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n , начиная с которого верно $\mathbf{P}(a_n > b) > 1 - \varepsilon$ (если g возрастает) или наоборот, $\mathbf{P}(a_n < b) > 1 - \varepsilon$ (если g убывает). Подобное свойство операции \oplus_f^\pm естественно назвать *слабой стохастической архимедовостью*, в то время как *сильной* можно назвать свойство, при котором неравенство $a_n > b$ или $a_n < b$ достигается почти наверное (здесь этого нет).

В [2] рассматривались ветвящиеся процессы со стохастическими операциями \oplus_f^\pm . В частности, когда $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс и $f(s) = \beta + \lambda s^2$, $\beta, \lambda > 0$, оказывается, что случайные величины Y_n , $n \geq 1$, образуют ARCH-процесс первого порядка, хорошо известный в стохастической финансовой математике [17, гл. 2, §3а]:

$$Y_n = \sqrt{\beta + \lambda Y_{n-1}^2} \varepsilon_n,$$

а X_n , $n \geq 1$, — последовательность соответствующих условных дисперсий:

$$X_n = \beta + (\lambda \varepsilon_n^2) X_{n-1},$$

Таким образом, приложения ветвящихся процессов с обобщенными операциями суммирования не обязательно связаны с какими-то частицами, а могут быть относиться к другим областям.

Приведем теперь пример сильно стохастически архимедовой операции, но уже на дискретном множестве $\{0, 1, \dots, N\}$.

Пусть имеется N ячеек. Рассмотрим комплект из k частиц. Частицы комплекта размещаются в ячейки по одной, причем все C_N^k размещений равновероятны. При размещении нескольких комплектов, частицы разных комплектов могут попадать в одну ячейку. Такие размещения изучались, например, в [18] и [19].

Пусть случайная величина $k_1 \oplus k_2$ распределена как число занятых ячеек после размещения комплектов длин k_1 и k_2 . Тогда операция \oplus коммутативна и ассоциативна в смысле равенства по распределению:

$$k_1 \oplus k_2 \stackrel{d}{=} k_2 \oplus k_1, \quad (k_1 \oplus k_2) \oplus k_3 \stackrel{d}{=} k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3).$$

Легко доказать следующие очевидные свойства операции:

1. $k \oplus 0 = k$.
2. $k \oplus N = N$ (т.е. N играет роль “плюс бесконечности”).
3. Если $k_1 \leq l_1$ и $k_2 \leq l_2$, то $k_1 \oplus k_2 \leq_d l_1 \oplus l_2$ (стохастическая монотонность).
4. $\max(k_1, k_2) \leq k_1 \oplus k_2 \leq k_1 + k_2$ п.н.

Пусть $k, l \in \{1, \dots, N-1\}$, и $u_1 = k$, $u_n = u_{n-1} \oplus k$, тогда п.н. существует $n(\omega)$, начиная с которого $u_n = N$, а значит, и $u_n > l$. Таким образом, имеет место сильная стохастическая архимедовость.

Определим теперь обобщенный ветвящийся процесс:

$$X_n = \bigoplus_{i=1}^{X_{n-1}} \eta_{i,n}, \quad 0 \leq X_0 \leq N,$$

где $\eta_{i,n}$, $i, n \geq 1$, — н.о.р. случайные величины со значениями в $\{0, 1, \dots, N\}$.

Как и ранее, мы получаем процесс, промежуточный между максимальным ветвящимся процессом и процессом Гальтона-Ватсона. Потомки частиц размещаются комплектами. Если в ячейку попали несколько частиц, из них выживает и дает потомство только одна. При этом о процессе можно сказать следующее:

1. Если $\mathbf{P}(\eta = 0) = p_0 > 0$, то $\mathbf{P}(X_n = 0 | X_{n-1} > 0) \geq p_0^N$, так что процесс вырождается в 0 п.н.
2. Если $\mathbf{P}(\eta = 1) = 1$, то процесс с любым $X_0 \geq 1$ вырождается в 1 п.н. Фактически, такой процесс рассматривался в [20], где изучалось время до вырождения.
3. Если $\mathbf{P}(\eta = 0) = 0$ и $\mathbf{P}(\eta = 1) < 1$, то процесс X_n эргодический.

Список литературы

- [1] Золотарев В.М., Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
- [2] Лебедев А.В., Случайные процессы с обобщенными операциями суммирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2005, № 4, с. 3–5.
- [3] Лебедев А.В., Ветвящиеся процессы с конкуренцией частиц // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2006, № 4, с. 56–58.

- [4] Маслов В.П., Нелинейное среднее в экономике // Математические заметки, 2005, т. 78, № 3, с. 377–395.
- [5] Шварцман Ю.П., Возможность повышения эффективности обработки сейсмограмм на основе использования нелинейного алгоритма накопления сигналов // Прикладная геофизика, 1979, т. 96, с. 70–81.
- [6] Nelsen R., An introduction to copulas. Springer, 2006.
- [7] Jiřina M., Stochastic branching processes with continuous state space // Czechoslovak Math. J., 1958, v. 8, № 2, p. 292–313.
- [8] Иржина М., Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний // Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, № 4, с. 482–484.
- [9] Лебедев А.В., Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005, т.50, № 3, с. 564–570.
- [10] Лебедев А.В. Максимальные ветвящиеся процессы // Современные проблемы математики и механики, 2009, т. 4, № 1, с. 93–106.
<http://www.math.msu.su/departement/probab/svodny2.pdf>
- [11] Севастьянов Б.А., Зубков А.М., Регулируемые ветвящиеся процессы // Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 1, с. 15–24.
- [12] Лебедев А.В., О взаимосвязи между α -устойчивыми и максимум-устойчивыми распределениями // Современные проблемы математики и механики, 2013, т. 8, № 3, с. 102–107. <http://www.math.msu.su/departement/probab/mm80.pdf>
- [13] Калинин А.В., Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук, 2002, т. 57, № 2, с. 23–84.
- [14] Lambert A., The contour of splitting trees is a Levy process // Ann. Probab., 2010, v. 38, № 1, p. 348–395.
- [15] Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999.
- [16] Урбаник К., Обобщенные свертки // Успехи математических наук, 1985, v. 40, № 4, p. 205–206.
- [17] Ширяев А.Н., Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.
- [18] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
- [19] Ватутин В.А., Михайлов В.Г., Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Теория вероятностей и ее применения, 1982, т. 27, № 4, с. 684–692.
- [20] Зубков А.М., Шибанов О.К., Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек // Математические заметки, 2009, № 3, с. 373–381.

Новые модели динамики транспортных потоков

Лыков А.А.¹, Малышев В.А.², Меликян М.В.³

Исследуются условия устойчивости (отсутствия ДТП) одномерного потока машин, где движение каждой машины определяется только движением предыдущей.

1 Введение

Моделирование транспортных потоков, как компьютерное, так и теоретическое, — чрезвычайно популярная тема исследований. При этом под потоком можно понимать все, что угодно — от потоков вещества (жидкости) до потоков информации (сети связи), клиентов в системах массового обслуживания, финансовых потоков или транспорта по дорогам в буквальном смысле. Что же касается математических методов, все исследования, где явно присутствует динамика, можно разбить на три области:

1. Первая область имеет корни в теории массового обслуживания (ТМО) или теории очередей. Здесь естественным пространством для клиентов является граф сети, в вершинах которого они ожидают обслуживания. А их движение по сети, приход, переходы и уход определяются только случайными временами перехода (см., например [5, 1, 4, 13, 2, 14, 3]). Мы особенно выделяем эту область, так как в течение долгого времени ТМО являлась одной из центральных на кафедре, при этом основными руководителями были зав. кафедрой теории вероятностей Гнеденко Б.В., а также профессора Соловьев А.Д. и Беляев Ю.К. Постоянно проводились школы, конференции, общемосковские семинары, выпускались монографии и сборники [7, 8, 9, 6].
2. Гидродинамический подход, где поток рассматривается как сплошная среда [12], [17, 18, 16].
3. Поток моделируется процессом с локальным взаимодействием, где точки движутся по некоторому пространству (чаще всего это решетка), но совершают случайные скачки в случайные моменты времени [11], [5].

¹Лыков Александр Андреевич, alekslyk@yandex.ru, научный сотрудник ЛБСС, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

²Малышев Вадим Александрович, 2malyshev@mail.ru, профессор кафедры теории вероятностей, главный научный сотрудник (зав. лаб.) ЛБСС, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

³Меликян Маргарита Врежовна, magaarm@list.ru, студентка кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Каждая из областей безусловно отражает некоторые качественные особенности реальных потоков, но тем не менее, видим мы на дороге реальные отдельные единицы потока, причем движущиеся скорее детерминировано, чем случайно. Более того, увеличивается тенденция к автоматизации управления каждым автомобилем (машины без водителя). Все это говорит о том, что необходимы разработка и исследование алгоритмов такого управления. Понятно, что хотя они могут быть самыми разными, но движение каждой машины может зависеть только от движения соседних машин (локальность взаимодействия). В данной статье мы исследуем один из простейших алгоритмов такого рода и показываем для каких значений параметров он является устойчивым, то есть гарантирует отсутствие столкновений на бесконечном интервале времени, а при каких нет.

Этой статьей (см. также [10]) мы начинаем исследование новых транспортных моделей с детерминированной динамикой точечных частиц. Заметим, что точечность частиц в этой работе несущественна, так как длины машин, даже случайные, легко включаются в расстояние d между соседними машинами, см. ниже.

2 Модель

Самая простая ситуация — это когда по однополосной дороге движется поток машин, например, без водителя, и на каждой из машин стоит прибор, который и регулирует движение машины в зависимости от движения машины непосредственно перед ней. Другой вариант — в каждой машине есть водитель — тогда на модель можно смотреть как на попытку моделировать психику стандартного водителя.

В произвольный момент времени $t \geq 0$ мы будем рассматривать произвольное, даже бесконечное, число точечных частиц на прямой, занумерованных следующим образом:

$$\dots < z_N(t) < \dots < z_1(t) < z_0(t).$$

При этом предполагается, что начальная частица, с номером 0, движется направо, то есть с положительной скоростью $v_0(t)$, которая произвольна. Для устойчивости мы предположим ее ограниченной с отсутствием резких ускорений.

Если начальная машина движется “как хочет”, то движение других частиц, например, частицы $k = 1, 2, \dots$, полностью определяется движением предыдущей машины $k - 1$. Наша задача — организовать устойчивое движение этого потока машин, то есть чтобы машины не приближались слишком близко друг к другу, но в то же время чтобы соблюдалась необходимая средняя скорость и чтобы расстояние между машинами было минимальным.

Для этого мы используем два механизма. Во-первых, специальный прибор на машине k постоянно измеряет расстояние $r_k(t) = z_{k-1}(t) - z_k(t)$ до впереди идущей машины, с номером $k - 1$, и стремится удерживать его на некотором безопасном расстоянии $d > 0$ (параметр, который мы фиксируем). Точнее, при отклонении этого расстояния от d некоторая сила F_k возвращает это расстояние к значению d .

Простейший вариант такой силы — линейная сила

$$F_k(t) = \omega^2(r_k(t) - d) = \omega^2(z_{k-1}(t) - z_k(t) - d),$$

которая ускоряет движение k -той машины, если расстояние $r_k(t)$ растёт, и замедляет, если оно уменьшается.

Во-вторых, некая сила трения $-\alpha v_k(t)$ сдерживает рост скорости каждой машины. Как мы показываем, этот второй механизм чрезвычайно важен. Наш результат состоит

в следующем. Во-первых, если $\alpha = 0$, то устойчивое движение невозможно. Если же, для данного ω , α достаточно велико, то на протяжении всего времени расстояние между машинами будет равномерно отделено от нуля. В то же время, для любого α найдется положительное ω такое, что машины столкнутся с течением времени.

Тогда имеет место следующая система уравнений

$$z_k''(t) = \omega^2(z_{k-1}(t) - z_k(t) - d) - \alpha z_k'(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Помимо функционального параметра $v_0(t)$, числовых параметров a и ω^2 , необходимо задать начальные условия. Удобно их задать так:

$$z_k(0) = -kd, \quad z_k'(0) = v$$

для некоторой постоянной $v \geq 0$.

Обозначим

$$x_k(t) = z_{k-1}(t) - z_k(t) - d,$$

тогда, ввиду

$$z_k''(t) = \omega^2 x_k(t) - \alpha z_k'(t) = \omega^2 x_k(t) - \alpha(-x_k'(t) + z_{k-1}'(t)),$$

$$z_k''(t) = -x_k''(t) + z_{k-1}''(t),$$

система (1) принимает вид

$$x_k''(t) + \alpha x_k'(t) + \omega^2 x_k(t) = \omega^2 x_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$x_k(0) = 0, \quad x_k'(0) = 0$$

и где

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega^2}(z_0''(t) + \alpha z_0'(t)).$$

3 Устойчивость

Теорема 1. Пусть $|x_0(t)| \leq c$ для всех $t \geq 0$ и $\alpha \geq 2\omega > 0$. Тогда для всех k и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство:

$$|x_k(t)| \leq c$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$X_k(t) = (x_k(t), x_k'(t))^T.$$

Тогда систему (2) можно записать в виде:

$$X_k'(t) = AX_k(t) + \omega^2 x_{k-1}(t)e_2,$$

где $e_2 = (0, 1)^T$ — стандартный орт, а матрица A определяется формулой:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

При нулевых начальных условиях решение имеет вид

$$X_k(t) = \omega^2 \int_0^t x_{k-1}(s) \exp(A(t-s))e_2 ds. \quad (3)$$

Нам понадобятся собственные числа матрицы A . Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\alpha^2 > 4\omega^2$. Тогда корни уравнения

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2 = 0 \quad (4)$$

отрицательны, обозначим их $\lambda_1, \lambda_2: \lambda_1 < \lambda_2 < 0$, и пусть $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ — соответствующие им собственные вектора. Тогда фундаментальная матрица решений имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \exp(\lambda_2 t) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\exp(At) = \Phi(t) * \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \exp(\lambda_2 t) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

и

$$(\exp(At)e_2)_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\exp(\lambda_2 t) - \exp(\lambda_1 t)),$$

где $(\exp(At)e_2)_1$ обозначает первую компоненту соответствующего вектора. Откуда получаем:

$$x_k(t) = \frac{\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t (\exp(\lambda_2(t-s)) - \exp(\lambda_1(t-s)))x_{k-1}(s)ds. \quad (5)$$

Докажем утверждение теоремы индукцией по k . Предположив, что утверждение верно для $k-1$, докажем его для k . Из (3), и используя $\lambda_1\lambda_2 = \omega^2$, имеем:

$$\begin{aligned} |x_k(t)| &= \frac{\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left| \int_0^t (\exp(\lambda_2 s) - \exp(\lambda_1 s))x_{k-1}(t-s)ds \right| \leq \\ &\leq \frac{c\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^{+\infty} (\exp(\lambda_2 s) - \exp(\lambda_1 s))ds = \frac{c\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = c. \end{aligned}$$

2. Пусть $\alpha = 2\omega$. Тогда собственные значения матрицы совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$. При $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ получаем (из предыдущего пункта доказательства):

$$(\exp(At)e_2)_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\exp(\lambda_2 t) - \exp(\lambda_1 t)) \rightarrow t \exp(-\omega t).$$

Откуда

$$x_k(t) = \omega^2 \int_0^t (t-s) \exp(-\omega(t-s))x_{k-1}(s)ds$$

и

$$\begin{aligned} |x_k(t)| &= \omega^2 \left| \int_0^t (t-s) \exp(-\omega(t-s))x_{k-1}(s)ds \right| \leq \\ &\leq \frac{c\omega^2}{\omega^2} |\exp(-\omega t)(1 + \omega t) - 1| \leq c. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим теперь случай ненулевых начальных условий: $x_k(0) = a_k, k \in \mathbb{N}, \dot{x}_k(0) = b_k, k \in \mathbb{N}$, где $|a_k| \leq a, |b_k| \leq b$ для всех k и для некоторых неотрицательных чисел a, b .

Теорема 2. Пусть $|x_0(t)| \leq c$ для всех $t \geq 0$, а $\alpha > 2\omega$, $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$, $C = \frac{\alpha a + 2b}{2\gamma}$. Тогда для всех k и для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство:

$$|x_k(t)| \leq \max\{c, C\}.$$

Доказательство. Здесь для доказательства удобнее использовать другое представление решения. Так, если корни

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$$

характеристического уравнения (4) различны, то общее решение имеет вид

$$x_k(t) = x_{k,+}(t) + x_{k,-}(t),$$

где

$$\begin{aligned} x_{k,\pm}(t) &= C_{k,\pm} e^{\lambda_{\pm} t} + \omega^2 \frac{e^{\lambda_{\pm} t}}{Q'(\lambda_{\pm})} \int_0^t e^{-\lambda_{\pm} t_1} x_{k-1}(t_1) dt_1 = \\ &= C_{k,\pm} e^{\lambda_{\pm} t} + \omega^2 \frac{e^{\lambda_{\pm} t}}{2\lambda_{\pm} + \alpha} \int_0^t e^{-\lambda_{\pm} t_1} x_{k-1}(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Используя начальные условия, находим

$$C_{k,\pm} = \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\pm \frac{\alpha}{2} + \gamma \right) a_k \pm b_k \right).$$

Из $\lambda_+ > \lambda_-$ получаем следующую оценку:

$$|x_k(t)| \leq |C_{k,+}| \exp(\lambda_+ t) + |C_{k,-}| \exp(\lambda_- t) + \sup_{s \geq 0} |x_{k-1}(s)| \frac{\omega^2}{2\gamma} \int_0^t |\exp(\lambda_+(t-t_1)) - \exp(\lambda_-(t-t_1))| dt_1$$

Положим $y_j = \sup_{s \geq 0} |x_j(s)|$ и получим для y_k рекуррентное соотношение.

Так как

$$|C_{k,\pm}| \leq \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \pm \gamma \right) a + b}{2\gamma},$$

то, делая замену: $t - t_1 = s$, получаем:

$$\begin{aligned} |x_k(t)| &\leq |C_{k,+}| \exp(\lambda_+ t) + |C_{k,-}| \exp(\lambda_- t) + \sup_{s \geq 0} |x_{k-1}(s)| \frac{\omega^2}{2\gamma} \int_0^t (\exp(\lambda_+ s) - \exp(\lambda_- s)) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) a + b + y_{k-1} \lambda_- \right) \exp(\lambda_+ t) + \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) a + b - y_{k-1} \lambda_+ \right) \exp(\lambda_- t) + y_{k-1}. \end{aligned}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Рассмотрим функцию

$$f(t) = a \exp(\lambda_+ t) + b \exp(\lambda_- t) + c$$

для некоторых констант $b, c > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство:

$$|f(t)| \leq \max\{c, a + b + c\}.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. $a > 0$. В этом случае очевидно, что $\sup_{s \geq 0} |f(s)|$ достигается в точке 0 и равен $a+b+c$.
2. $a < 0$. Тогда множество t , при которых производная больше 0, описывается:

$$t > \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \ln \left(-\frac{a \lambda_+}{b \lambda_-} \right)$$

Точка $t_0 = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \ln \left(-\frac{a \lambda_+}{b \lambda_-} \right)$ - точка минимума. Если $t_0 < 0$, то $\sup_{s \geq 0} |f(s)|$ достигается в точке $+\infty$ и равен c . Если же $t_0 > 0$, то $\sup_{s \geq 0} |f(s)|$ достигается либо в точке 0, либо в точке $+\infty$. \square

Далее применяя эту лемму к правой части неравенства для x_k выше, получаем оценку

$$y_k \leq \max \left\{ y_{k-1}, \frac{\alpha a + 2b}{2\gamma} \right\},$$

из которой следует утверждение теоремы. \square

4 Неустойчивость

Рассмотрим снова систему (2) с нулевыми начальными условиями

$$x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

где $\alpha > 0, \omega > 0$, для некоторой заданной функции $x_0(t)$. Неустойчивость проявит себя, когда k и t одновременно стремятся к бесконечности, причем так, что $t = \mu k$, $k \rightarrow \infty$ для некоторой константы $\mu > 0$.

Теорема 3. Пусть $x_0(t) = v$ для всех $t \geq 0$. Для любого $\alpha > 0$ существует $\omega > 0$ и константы $q_{\pm} > 1$, $\mu_{\pm} > 0$, $c_{\pm} \neq 0$, такие, что

$$x_k(t) \sim \frac{c_{\pm}}{\sqrt{k}} q_{\pm}^{\pm k}, \quad \text{при } t = \mu_{\pm} k, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому каким бы ни было расстояние $d > 0$ между машинами, соседние машины могут как угодно сближаться и наоборот, цепочка может бесконечно растягиваться.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим преобразование Лапласа:

$$u_k(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} x_k(t) dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Система уравнений (2) с нулевыми начальными условиями эквивалентны следующему рекуррентному соотношению:

$$u_k(z) = \frac{\omega^2}{z^2 + \alpha z + \omega^2} u_{k-1}(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

или

$$u_k(z) = \left(\frac{\omega^2}{z^2 + \alpha z + \omega^2} \right)^k u_0(z).$$

Далее будем считать, что $\alpha < 2\omega$. При данном выборе α и ω корни характеристического уравнения являются комплексными числами с вещественной частью равной $-\frac{\alpha}{2}$. Поэтому

функция $u_k(a + ib)$ абсолютно интегрируема по b на \mathbb{R}^1 при всех $a > -\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, для всех k и произвольных $t > 0$ справедлива классическая формула обращения:

$$x_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u_k(z) e^{zt} dz,$$

для любого $a > -\frac{\alpha}{2}$. Для $t = \mu k$ перепишем последний интеграл:

$$\begin{aligned} x_k(\mu k) &= F(\mu, k) = \frac{v}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z} \exp(k(\mu z - \ln(z^2 + \alpha z + \omega^2) + \ln \omega^2)) dz = \\ &= \frac{v}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z} \exp(kS(z)) dz, \quad S(z) = \mu z - \ln(z^2 + \alpha z + \omega^2) + \ln \omega^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При отображении $z^2 + \alpha z + \omega^2$ прямая $a + ib$, $b \in \mathbb{R}$ переходит в параболу. Следовательно, можно выделить голоморфную ветвь логарифма на любой такой прямой при $a > -\frac{\alpha}{2}$ таким образом, чтобы:

$$\ln(z^2 + \alpha z + \omega^2) = \ln |z^2 + \alpha z + \omega^2| + i \arg(z^2 + \alpha z + \omega^2).$$

Точки перевала определяются из уравнения

$$S'(z) = \mu - \frac{2z + \alpha}{z^2 + \alpha z + \omega^2} = 0$$

или из следующего квадратного уравнения

$$\mu z^2 + (\alpha\mu - 2)z + \omega^2\mu - \alpha = 0, \quad (7)$$

для которого дискриминант

$$D = (\alpha\mu - 2)^2 - 4\mu(\omega^2\mu - \alpha) = \alpha^2\mu^2 + 4 - 4\mu^2\omega^2 = -4\mu^2r^2 + 4, \quad r^2 = \omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0.$$

Будем считать, что $\mu < \frac{1}{r}$. Тогда $D > 0$ и имеем вещественную точку перевала (вообще говоря, их две, но вклад в интеграл будет давать только одна, которую мы и рассмотрим):

$$z = z(\mu) = \frac{2 - \alpha\mu + \sqrt{D}}{2\mu} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2r^2}.$$

Проверим, что $z(\mu)$ является простой точкой перевала. Для этого вычислим вторую производную функции $S(z)$:

$$\begin{aligned} S''(z(\mu)) &= -\frac{2}{z^2 + \alpha z + \omega^2} + \frac{(2z + \alpha)^2}{(z^2 + \alpha z + \omega^2)^2} \Big|_{z=z(\mu)} = -\frac{2\mu}{2z(\mu) + \alpha} + \mu^2 = \\ &= -\frac{\mu}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2r^2}} + \mu^2 = \mu^2 \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2r^2}}{1 + \sqrt{1 - \mu^2r^2}} \right). \end{aligned}$$

В силу того, что $\mu < \frac{1}{d}$, последнее выражение не обращается в нуль, поэтому $z(\mu)$ является простой точкой перевала. В формуле (6) положим $a = z(\mu)$. Тогда

$$F(\mu, k) = \frac{v}{2\pi i} \int_{z(\mu)-i\infty}^{z(\mu)+i\infty} \frac{1}{z} \exp(kS(z)) dz.$$

Докажем, что прямая $z(\mu) + ib$, $b \in \mathbb{R}$ является перевальным контуром для $S(z)$. Для этого достаточно проверить два условия:

1) справедливость следующего соотношения:

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}(S(z(\mu) + iy)) = \operatorname{Re}(S(z(\mu))); \quad (8)$$

2) в окрестности точки перевала $z(\mu)$ прямая проходит через два различных сектора, в которых $\operatorname{Re}(S(z)) < \operatorname{Re}(S(z(\mu)))$.

Проверим вначале первое условие. Имеем равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S(z(\mu) + iy)) &= \mu z(\mu) - \frac{1}{2} \ln((z^2(\mu) - y^2 + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2 + (2z(\mu)y + \alpha y)^2) + \ln \omega^2 = \\ &= \mu z(\mu) + \ln \omega^2 - \frac{1}{2} \ln h(y^2), \quad h(s) = (z^2(\mu) - s + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2 + s(2z(\mu) + \alpha)^2. \end{aligned}$$

Для функции $h(s)$ имеем:

$$h(s) = s^2 + s((2z(\mu) + \alpha)^2 - 2(z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)) + (z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2.$$

Графиком функции $h(s)$ является парабола с вершиной в точке:

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{(2z(\mu) + \alpha)^2 - 2(z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)}{2} = -\frac{(2z(\mu) + \alpha)^2 - 2\frac{(2z(\mu) + \alpha)}{\mu}}{2} = \\ &= -(2z(\mu) + \alpha)\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2} - \frac{1}{\mu}\right) = -\left(\frac{2}{\mu} + \frac{2}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2}\right)\frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2}. \end{aligned}$$

Из последней формулы видно, что

$$s_0 < 0.$$

Поэтому функция $h(s)$ достигает своего минимального значения на множестве $s \geq 0$ в точке $s = 0$. Значит, получаем:

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}(S(z(\mu) + iy)) = \mu z(\mu) + \ln \omega^2 - \frac{1}{2} \ln \min_{s \geq 0} h(s) = \mu z(\mu) + \ln \omega^2 - \frac{1}{2} \ln h(0) = \operatorname{Re}(S(z(\mu))).$$

Таким образом, формула (8) доказана.

Для доказательства второго пункта достаточно проверить, что точка $z(\mu)$ является локальным минимумом функции $f(a) = \operatorname{Re}(S(a))$ при $a > 0$. Имеем равенство:

$$f(a) = \operatorname{Re}(S(a)) = \mu a - \ln(a^2 + \alpha a + \omega^2) + \ln \omega^2.$$

Для производной имеем формулу:

$$f'(a) = \mu - \frac{2a + \alpha}{a^2 + \alpha a + \omega^2} = \frac{\mu(a - z(\mu))(a - \tilde{z}(\mu))}{a^2 + \alpha a + \omega^2},$$

где $\tilde{z}(\mu)$ мы обозначили второй вещественный корень уравнения (7), причем, $\tilde{z}(\mu) < z(\mu)$. Следовательно, функция f убывает на интервале $(\tilde{z}(\mu), z(\mu))$ и возрастает на луче $(z(\mu), +\infty)$, и, значит, $z(\mu)$ является точкой локального минимума $f(a)$. Тем самым второй пункт доказан.

Таким образом, в силу теоремы 1.3 на с. 263 из [15] справедлива асимптотическая формула:

$$F(\mu, k) \sim ce^{kS(z(\mu))}, \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

где константа c определяется по формуле:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2\pi k S''(z(\mu))}} \frac{v}{z(\mu)}.$$

Покажем, что для некоторых $\omega > 0$ и $\mu < \frac{1}{d}$ величина $S(z(\mu))$ положительна. Имеем:

$$\begin{aligned} S(z(\mu)) &= -\frac{\alpha\mu}{2} + 1 + \sqrt{1 - \mu^2 r^2} - \ln\left(\frac{2z(\mu) + \alpha}{\mu}\right) + \ln \omega^2 = \\ &= -\frac{\alpha\mu}{2} + 1 + \sqrt{1 - \mu^2 r^2} - \ln(1 + \sqrt{1 - \mu^2 r^2}) + \ln(\mu^2 \omega^2). \end{aligned}$$

В точке $\mu = \frac{1}{r}$ справедливо равенство:

$$S\left(z\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2r} + \ln\left(\frac{\omega^2}{r^2}\right) \rightarrow 1, \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при достаточно больших ω имеет место неравенство $S(z(\frac{1}{r})) > 0$. Значит, в силу непрерывности функции $S(z(\mu))$ можно указать таким образом, $\mu = \mu_+$, чтобы величина $S(z(\mu))$ была положительной. Для нахождения μ_- достаточно заметить, что $S(z(\mu)) \rightarrow -\infty$ при $\mu \rightarrow 0$. Тем самым теорема полностью доказана. \square

Список литературы

- [1] *Haight F.*, Mathematical theories of traffic flow. Elsevier, 1963.
- [2] *Renyi A.*, On two mathematical models of the traffic on a divided highway // Journal of Applied Probability, 1964, v. 1, p. 311–320.
- [3] *Solomon H., Wang P.*, Nonhomogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. (Univ. of Calif. Press), 1972, v. 3, p. 383–400.
- [4] *Kelly F.*, Reversibility and stochastic networks. N.-Y.: Wiley. 1979.
- [5] *Caceres F., Ferrari P., Pechersky E.*, A slow-to-start traffic model related to a M/M/1 queue // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2007, P07008. Available at <http://iopscience.iop.org/1742-5468/2007/07/P07008/fulltext/>
- [6] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. Изд. 2, испр. и доп. Либроком, 2013.
- [7] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. 1966.
- [8] Теория массового обслуживания / Труды семинара по вероятностным методам в технике. Изд-во МГУ. Москва, 1975.
- [9] Теория массового обслуживания / Труды 2 Всесоюзного совещания-школы по теории массового обслуживания. Дилижан, 1970.

- [10] Лыков А.А., Малышев В.А., Удимов Д., Машины без водителя как нестандартные протоколы в транспортных сетях. Доклад на конференции “Транспортное моделирование” в Институте Генплана Москвы. Опубликовано на сайте <http://www.genplanmos.ru>.
- [11] Blank M., Ergodic properties of a simple deterministic traffic flow model // J. Stat. Phys., 2003, v. 111, p. 903–930.
- [12] Lighthill M.J., Whitham G.B., On kinematic waves. II // Theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. R. Soc. London, Ser. A., 1955, v. 229, p. 281–345.
- [13] Malyshev V., Yakovlev A., Condensation in large closed Jackson networks // Ann. Appl. Prob., 1996, v. 6, № 1, p. 92–115.
- [14] Serfozo R., Introduction to stochastic networks. Springer, 1999.
- [15] Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [16] Prigogine I., Herman R., Kinetic theory of vehicular traffic. N.Y.: Elsevier, 1971.
- [17] Helbing D., Verkehrsdynamik. Berlin: Springer, 1997.
- [18] Helbing D., Traffic and related self-driven many particle systems // Rev. Mod. Phys., 2001, v. 73, p. 1067–1141.

О двух результатах Я. В. Успенского и одном результате К.-Г. Эссеена

Сенатов В.В.¹

Обсуждаются результаты Я. В. Успенского, полученные в 1937 г., которые дают асимптотические разложения с явными оценками остаточных частей для биномиального распределения. Простым следствием одного из них является нижняя оценка постоянной в теореме Берри–Эссеена, полученная К.-Г. Эссееном в 1956 г. Результаты Я. В. Успенского обобщаются на произвольные решетчатые распределения, и при этом уточняются. Показано, как следует изменить постановку задачи о точности аппроксимации в ЦПТ для решетчатых распределений с тем, чтобы получать оценки, которые во много раз точнее той, что даёт теорема Берри–Эссеена.

Пусть X_1, X_2, \dots - независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и общим распределением P . Обозначим P_n - распределение нормированной суммы $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ и Φ - стандартный нормальный закон, плотность которого $\phi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Центральная предельная теорема (ЦПТ) утверждает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\rho(F_n, G) = \sup\{|F_n(x) - G(x)| : -\infty < x < \infty\} \rightarrow 0,$$

где $F_n(x)$ и $G(x)$ - функции распределения мер P_n и Φ .

Оценка точности аппроксимации в ЦПТ давно стала традиционной задачей в теории вероятностей, и здесь одними из первых результатов, которые оставались наилучшими на протяжении шести десятилетий, были два результата, полученные Я. В. Успенским² в 1937 г. в [12] для случая, в котором P - распределение Бернулли.

Мы называем распределением Бернулли распределение случайной величины, множество возможных значений которой состоит из двух чисел. Без ограничения общности достаточно рассматривать распределения Бернулли с нулевым средним и единичной дисперсией. Это множество является однопараметрическим семейством, для которого

$$P\left(\left\{-\frac{p}{\sqrt{pq}}\right\}\right) = q, \quad P\left(\left\{\frac{q}{\sqrt{pq}}\right\}\right) = p, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Напомним, что невырожденное распределение P называется решетчатым, если множество его точек роста $\text{supp } P = \{x : P((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$ принадлежит решетке (арифметической прогрессии) $D = \{a + kh : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с шагом

¹Сенатов Владимир Васильевич, v.senatov@yandex.ru, профессор, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

²Успенский Яков Викторович (1883 - 1947) - рос. математик, акад. АН СССР (1921). В 1930 г. был в командировке в США, откуда в Советский Союз не вернулся.

$h > 0$. В определении D число a – произвольная точка множества D . Для решетчатого распределения P существует единственная решетка, для которой шаг h максимален, он называется шагом распределения P , только такие решетки рассматриваются в дальнейшем. Очевидно, что если распределение P является решетчатым с шагом h , то распределение P_n также решетчато и его шаг есть h/\sqrt{n} , оно сосредоточено на решетке $D_n = \{x : a_n + kh/\sqrt{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где можно выбрать $a_n = a\sqrt{n}$, функция распределения $F_n(x)$ может изменяться только скачками в точках решетки D_n , на интервалах между соседними точками этой решетки она постоянна. Распределение Бернулли с параметром p является решетчатым с шагом $h = 1/\sqrt{pq}$.

Далее нам понадобятся моменты

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(dx), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и абсолютные моменты

$$\beta_s = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s P(dx), \quad s > 0$$

распределения P .

Для распределения Бернулли с параметром p

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{pq}}, \quad \beta_3 = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}}, \quad \alpha_4 = \beta_4 = \frac{p^3+q^3}{pq} = \frac{1}{pq} - 3.$$

Следствием одного из результатов Я. В. Успенского (см. также [5, с. 223] и [6, с. 95]) является следующее равенство в случае, когда P – распределение Бернулли с параметром p и $npq \geq 25$.

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + O_I\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in \bar{D}_n, \quad (1)$$

где $\bar{D}_n = D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}$ – сдвиг решетки D_n на половину её шага, а

$$\left| O_I\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{0.13 + 0.18|p-q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}. \quad (2)$$

Другой результат Я. В. Успенского (см. также [1]) можно записать в виде

$$\tilde{p}_n(x) - \phi(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (x^3 - 3x)e^{-x^2/2} + O_L\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in D_n, \quad (3)$$

где

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{h} (F_n(x+0) - F_n(x-0)), \quad x \in D_n,$$

$$\left| O_L\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{0.15 + 0.25|p-q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}. \quad (4)$$

Здесь и далее индекс I показывает, что величина относится к интегральной, а L – к локальной форме ЦПТ. Отметим, что из (1) и (3) следует, что первые слагаемые в их правых частях при $n \rightarrow \infty$ эквивалентны левым частям. Разумеется, здесь необходимо сделать оговорку о том, что $\alpha_3 \neq 0$ и величины x отделены от ± 1 в (1) и от 0 и $\pm\sqrt{3}$ в (3).

Основная цель данной работы состоит в доказательстве того, что равенства (1) и (3) справедливы для любого решетчатого распределения P с конечным четвёртым моментом. При этом мы получим аналоги (2) и (4), которые для распределений Бернулли в несколько раз точнее этих оценок. Будет получено несколько аналогов (2) и (4), при этом, к сожалению, увеличение точности оценок сопровождается их усложнением. Но вначале мы рассмотрим некоторые другие вопросы, связанные с точностью аппроксимации в ЦПТ.

В 1937 г. появился хорошо известный результат Г. Крамера [3], который состоит в том, что для распределений P с конечным третьим моментом при выполнении условия $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$, где $f(t)$ – характеристическая функция распределения P , справедливо равенство

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где величина $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ равномерна по x . Из (5) следует, что первое слагаемое в его правой части при $\alpha_3 \neq 0$ для $x \neq \pm 1$ эквивалентно левой части.

Упомянутое условие сейчас называется условием Крамера, оно является условием «гладкости» распределения P в терминах характеристических функций, его выполнение влечёт существование непрерывной компоненты у функции распределения меры P . В той же работе Г. Крамер, опираясь на идеи и методы А. М. Ляпунова [4], установил, что при выполнении упомянутого условия

$$\rho(F_n, G) \leq c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

В 1941 г. А. Берри и в 1942 г. К.-Г. Эссеен доказали, что эта оценка справедлива для любого распределения P с конечным третьим моментом. Это утверждение сейчас называется теоремой Берри – Эссеена.

Результаты Я. В. Успенского (1) и Г. Крамера (5) были обобщены К.-Г. Эссееном в 1945 г. Он ослабил условие гладкости в результате Г. Крамера до его естественной границы, до условия нерешетчатости распределения P .

Кроме того, он показал, что для решетчатых распределений с конечным третьим моментом результат Г. Крамера остаётся справедливым, если в правую часть (5) добавить слагаемое

$$\frac{h}{2\sqrt{n}} S_n(x) \phi(x),$$

где $S_n(x)$ – функция, которая в точках решетки D_n изменяется скачками от -1 до 1 , а в интервалах между соседними точками решетки D_n линейно убывает от 1 до -1 . Назначение этой функции – компенсировать изменение нормальной функции распределения $G(x)$ на интервалах постоянства функции $F_n(x)$. В точках решетки \bar{D}_n функция $S_n(x) = 0$. Явных оценок величин $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ у К.-Г. Эссеена не было.

Уточнение верхней оценки постоянной c из теоремы Берри – Эссеена продолжалось более семи десятилетий. Одним из существенных результатов в этой задаче был результат К.-Г. Эссеена, который в 1956 г. установил, что

$$c \geq c_E = \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097\dots$$

Отметим, что постоянная c_E в шесть с лишним раз больше постоянной $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}$, которая участвует в правой части (1). Постоянную c_E мы будем называть постоянной Эссеена.

При доказательстве того, что именно она является нижней оценкой постоянной в теореме Берри – Эссеена, использовалось распределение Бернулли с параметром $p = (4 - \sqrt{10})/2$, которое мы будем называть распределением Эссеена. В случае, когда распределение P является распределением Эссеена, и только в этом случае (по крайней мере, в классе распределений Бернулли) при $n \rightarrow \infty$

$$\rho(F_n, G) \sim c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

Верхние оценки в теореме Берри – Эссеена, в которые участвует постоянная Эссеена, появились спустя сорок с лишним лет после последнего результата К.-Г. Эссеена. В 2001 г. Г. П. Чистяков [9] доказал неравенство

$$\rho(F_n, G) \leq c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + C \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right)^{40/39} \left| \log \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right) \right|^{7/6},$$

при этом оценка постоянной C им не указывалась (несколько ранее в работах Г. П. Чистякова были получены аналогичные неравенства, в которых оценки второго слагаемого в правой части были несколько хуже).

В 2012 г. И. Г. Шевцова [11] установила, что

$$\rho(F_n, G) \leq c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + 2.58 \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

После появления последнего результата дальнейшее совершенствование оценки теоремы Берри – Эссеена стало бессмысленным, однако, и этот факт хорошо известен, оценка теоремы Берри – Эссеена во многих случаях не может правильно отражать близость функций $F_n(x)$ и $G(x)$.

Далее мы увидим, что с помощью (1) и (2) для распределения Эссеена можно получать аппроксимации, точность которых примерно в двадцать раз превосходит точность оценки Берри – Эссеена, и покажем, как можно изменить постановку задачи о точности аппроксимации в интегральной форме ЦПТ для решетчатых распределений с тем, чтобы оценки этой точности стали в несколько раз лучше, чем в теореме Берри – Эссеена.

Явные оценки величины $o(1/\sqrt{n})$ из (5), убывающие при росте n как $O(1/n)$ для «гладких» распределений P с конечным четвёртым моментом, были получены в [7] и [8]. Таким образом, в классе распределений с конечным четвёртым моментом можно выделить два достаточно широких подкласса («гладкие» и решетчатые распределения), для которых можно получать оценки точности аппроксимации в ЦПТ, эквивалентные оцениваемым величинам. Отметим, что задача о выделении классов распределений, для которых гарантированная точность аппроксимации соответствует фактически наблюдаемой, была сформулирована в [5, с. 232].

Из (1) и (2) следует, что для распределения Бернулли с параметром p при $x \in \bar{D}_n$

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} |1 - x^2| e^{-x^2/2} + \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}. \quad (6)$$

Для распределения Эссеена $p = 0.4188\dots$ и простые вычисления показывают, что

$$\max\{|F_n(x) - G(x)| : x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}\} \leq \frac{0.022}{\sqrt{n}} + \frac{0.655}{n} + e^{-0.74\sqrt{n}} \quad (7)$$

(при вычислении постоянной в первом слагаемом правой части мы оценили функцию $|1 - x^2|e^{-x^2/2}$ единицей, хотя при $|x| \geq 0.63$ она меньше 0.5, но эта потеря для нас при обосновании теоремы Берри - Эссеена не важна). В то же время, для распределения Эссеена $\beta_3 > 1.04$ и правая часть оценки Берри - Эссеена для распределения Эссеена больше

$$c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} > 0.4097 \frac{1.04}{\sqrt{n}} = \frac{0.426}{\sqrt{n}}.$$

Отношение правой части последнего равенства к первому слагаемому в правой части (7) больше 19. Нетрудно понять, из-за чего произошла столь большая потеря точности: она связана с тем, что в теореме Берри - Эссеена оценивается равномерное расстояние между $F_n(x)$ и $G(x)$, а задача о точности аппроксимации функции $F_n(x)$ и задача о равномерной аппроксимации $F_n(x)$ именно функцией $G(x)$ - разные задачи.

Нетрудно понять, что если мы хотим получить аппроксимацию функции $F_n(x)$ в точке x , мы можем найти интервал постоянства F_n , в котором лежит x , и аппроксимировать $F_n(x)$ значением нормальной функции распределения в середине этого интервала. Как использовать этот «рецепт» для $x \in D_n$ достаточно очевидно, и на этом мы останавливаться не будем.

Скажем несколько слов о нижней оценке постоянной c из оценки теоремы Берри - Эссеена в случае, когда P является распределением Бернулли, и покажем, что результат Эссеена 1956 г. о нижней оценке c является простым следствием (1). Без ограничения общности мы можем считать, что параметр p распределения Бернулли P принадлежит интервалу $(0, 0.5)$.

Рассмотрим интервал (x'_n, x''_n) , $x'_n, x''_n \in D_n$, постоянства F_n , середина которого $x_n^* = (x'_n + x''_n)/2$ ближе всего к нулю. Величины x'_n, x_n^*, x''_n суть $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Из (1) следует, что

$$F_n(x_n^*) - G(x_n^*) = \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi npq}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$$

для достаточно больших n . Сдвинемся влево к точке x'_n , при этом $F_n(x)$ останется неизменной, а $G(x)$ уменьшится на величину $\frac{h}{2\sqrt{n}}G'(0) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_n(x'_n + 0) - G(x'_n + 0) &= \frac{q-p}{6\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{h}{2\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \frac{q-p+3}{6\sqrt{2\pi npq}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

где c - постоянная из оценки Берри - Эссеена. Отсюда следует, что

$$\frac{q-p+3}{6\beta_3\sqrt{2\pi pq}} = c_p \leq c.$$

Для распределения Бернулли $\beta_3 = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}}$, откуда следует, что

$$c_p = \frac{q-p+3}{6\sqrt{2\pi}(p^2+q^2)} = \frac{2-p}{3\sqrt{2\pi}(p^2+(1-p)^2)}.$$

Это - нижняя оценка постоянной c в теореме Берри - Эссеена для распределения Бернулли с параметром p . Её максимум достигается при $p = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$, т. е. для распределения Эссеена. Вычисление величины c_E труда не представляет. Вернёмся к равенству

$$F_n(x'_n + 0) - G(x'_n + 0) = \frac{q-p}{6\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{h}{2\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} + \frac{h}{2\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Из него нетрудно понять (здесь мы не претендуем на строгость рассуждений), как формируется оценка $\rho(F_n, G)$ в случае, когда P – распределений Бернулли: оценка $\rho(F_n, G)$ есть сумма оценок величины

$$\max\{|F_n(x) - G(x)| : x \in \bar{D}_n\}$$

и половины максимального скачка функции F_n (см. также [2, гл. 3, §5]). Для распределения Эссеена вторая величина в 18.47 раз больше первой. Из сказанного выше понятно, как можно обойти появление половины максимального скачка $F_n(x)$, – эта величина не появится, если мы будем рассматривать только середины интервалов постоянства этой функции.

Если же нам нужна именно равномерная оценка $F_n(x)$ какой либо функцией, которая легко вычисляется, можно поступить следующим образом. Рассмотрим функцию распределения $G_n^{a,h}(x)$, которая является решетчатой функцией распределения, постоянной на интервалах постоянства $F_n(x)$, и совпадающей с $G(x)$ в серединах этих интервалов. Очевидно, что следствием (6) является неравенство

$$\rho(F_n, G_n^{a,h}) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} + \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}.$$

Таким образом, для данного числа n с помощью функции распределения стандартного нормального закона и параметров решётки D мы построили функцию распределения $G_n^{a,h}$, которая больше похожа на $F_n(x)$, чем $G(x)$, и с помощью этой функции в случае, когда P является распределением Бернулли, получили равномерную аппроксимацию $F_n(x)$, которая существенно лучше той, что даёт теорема Берри – Эссеена.

Нетрудно понять, что последнее неравенство является неулучшаемым в следующем смысле: если умножить первое слагаемое в его правой части на любое число, меньшее единицы, то неравенство станет неверным, начиная с некоторого n . Сказанное верно для любого распределения Бернулли. Предположение о том, что P является распределением Бернулли, мы существенно ослабим, как только обобщим (1) на случай произвольных решетчатых распределений с конечным четвёртым моментом. Разумеется, слагаемые в правой части последнего неравенства, кроме первого, изменятся. Первое слагаемое останется неизменным.

В формулировке следующей теоремы нам понадобятся величины

$$B_{k,n,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-j} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt,$$

где $\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{t^2/2}\}$, $k > 0$, $0 \leq j < n$. Ясно, что $\mu^{n-j} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow e^{-t^2/2}$ при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных j и t . Можно показать, что для любого распределения с конечным четвёртым моментом существует выбор T , для которого при $n \rightarrow \infty$

$$B_{k,n,j} \rightarrow B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^k e^{-t^2/2} dt. \quad (8)$$

Последняя величина лишь множителем отличается от абсолютного момента стандартного нормального закона порядка k .

Теорема 1. Для любого решетчатого распределения P с нулевым средним, единичной дисперсией, конечным четвёртым моментом и шагом h при $n \geq 2$ справедливо представление

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} + O_I \left(\frac{1}{n} \right), \quad x \in \bar{D}_n,$$

где

$$\begin{aligned} \left| O_I \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\leq \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\pi}{2} B_1 + \frac{\beta_4 + 3\pi}{4!n} \frac{\pi}{2} B_{3,n,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\pi}{2} B_{5,n,2} + \\ &+ \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} \frac{\pi}{2} B_4 \left(\frac{n}{n-1} \right)^{5/2} + \frac{1}{6} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\pi}{2} B_4 + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3\pi}{4!n} \frac{\pi}{2} B_{6,n,2} + \\ &+ \frac{h^2}{\pi^3 n} e^{-\frac{\pi^2 n}{2h^2}} + \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi\sqrt{n}}{h}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

кроме того, справедливо представление

$$\tilde{p}_n(x) - \phi(x) = \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} (x^3 - 3x) e^{-x^2/2} + O_L \left(\frac{1}{n} \right), \quad x \in D_n,$$

где

$$\begin{aligned} \left| O_L \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\leq \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_{4,n,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 B_{6,n,2} + \\ &+ \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_5 \left(\frac{n}{n-1} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_{7,n,2} + \\ &+ \frac{h}{\pi^2 \sqrt{n}} e^{-\pi^2 n / 2h^2} + \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi\sqrt{n}}{h}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

а в определениях величин $B_{k,n,j}$ используется число $\Gamma = \frac{\pi}{h}$.

Отметим, что последний интеграл в (9) легко оценивается, а последний интеграл в (10) легко вычисляется, он равен сумме двух слагаемых, которые при росте n стремятся к нулю экспоненциально быстро. Мы оценивать и вычислять эти интегралы не будем, чтобы не усложнять вид оценок.

Мы докажем эти утверждения чуть позже, а сейчас сравним полученные оценки с оценками Я. В. Успенского. Для того чтобы доводить оценки теоремы 1 до численных значений, необходимы явные оценки величин $B_{k,n,j}$. В некоторых случаях эти оценки получаются без труда. Так, если P – решетчатое распределение с шагом h , для характеристической функции которого справедливо неравенство

$$|f(t)| \leq e^{-t^2/2} \text{ при } |t| \leq \frac{\pi}{h}, \text{ то}$$

$$\mu(t) = e^{-t^2/2} \text{ при } |t| \leq \frac{\pi}{h}$$

и для $0 \leq j < n$

$$B_{k,n,j} < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^k e^{-(n-j)t^2/(2n)} dt = \left(\frac{n}{n-j} \right)^{(k+1)/2} B_k,$$

а $B_{2l} = \frac{(2l-1)!!}{\sqrt{2\pi}}$, $l = 1, 2, \dots$, $B_{2l+1} = \frac{2^l l!}{\pi}$, $l = 1, 2, \dots$

В указанном случае вторая оценка теоремы для $n \geq 3$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \left| O_L \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\leq \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{1}{npq} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{5/2} + \frac{5}{24\sqrt{2\pi}} \frac{(p-q)^2}{npq} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{7/2} + \\ &+ \frac{2}{3\pi} \frac{|p-q|}{n\sqrt{npq}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^3 + \frac{1}{6\pi} \frac{|p-q|}{(npq)^{3/2}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^4 + \\ &+ \frac{1}{\pi^2 \sqrt{npq}} e^{-\pi^2 npq/2} + \frac{|p-q|}{3! \sqrt{npq}} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{npq}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

В общем случае оценка $|f(t)|$ составляет отдельную задачу, о которой мы поговорим после доказательства теоремы.

Оценки, которые будут получены далее, являются довольно громоздкими. Чтобы отчасти упростить их мы в их правых частях будем заменять множители, стремящиеся к 1 при $n \rightarrow \infty$, и для которых известны явные оценки, на единицу, при этом знак \leq будет заменяться на \lesssim . В этих обозначениях предыдущую оценку можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left| O_L \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\lesssim \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{1}{npq} + \frac{5}{24\sqrt{2\pi}} \frac{(p-q)^2}{npq} + \frac{1}{6\pi} \frac{|p-q|(1+4pq)}{(npq)^{3/2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi^2 \sqrt{npq}} e^{-\pi^2 npq/2} + \frac{|p-q|}{3! \sqrt{npq}} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{npq}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{8\sqrt{2\pi}} < 0.05$, $\frac{5}{24\sqrt{2\pi}} < 0.084$, а $\frac{1}{6\pi} < 0.054$, мы видим, что эта оценка существенно точнее, чем (4).

При тех же предположениях первую оценку теоремы 1 можно, несколько закругляя, записать в виде

$$\begin{aligned} \left| O_I \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\lesssim \frac{1}{16} \frac{1}{npq} + \frac{1}{18} \frac{(p-q)^2}{npq} + \frac{\pi}{96} \frac{|p-q|(1+1.2pq)}{(npq)^{3/2}} + \\ &+ \frac{h^2}{\pi^3 n} e^{-\pi^2 n/2h^2} + \frac{|\alpha_3|}{3! \sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi\sqrt{n}}{h}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

Эта оценка существенно точнее, чем (2). Далее мы увидим, что правую часть этой оценки можно уменьшить примерно в полтора раза.

Для доказательства теоремы нам понадобится лемма, в формулировке которой мы обозначаем $g(t)$ характеристическую функцию $e^{-t^2/2}$ стандартного нормального закона. Ясно, что $g(t) = g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)$ для любого натурального n . Далее мы обозначаем через $\gamma = \gamma(t)$ функции (вообще говоря, комплекснозначные), абсолютные величины которых не превосходят единицы, эти функции могут быть различны даже в пределах одной формулы, поэтому справедливы, например, равенства $-\gamma = \gamma$, $\frac{\gamma+\gamma}{2} = \gamma$, где все функции γ различны. Равенство $h(t) = \gamma H(t)$ эквивалентно неравенству $|h(t)| \leq |H(t)|$.

Лемма 1. Если P – распределение с конечным четвёртым моментом, то для разности характеристических функций $f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g(t)$ при $n \geq 2$ справедливо представление

$$f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g(t) = \frac{\alpha_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 n g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) +$$

$$+\gamma \left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_4 + 3}{3! 4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \quad (11)$$

Доказательство леммы основано на использовании простого и хорошо известного равенства

$$a^k - b^k = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} b^j (a - b), \quad (12)$$

справедливого для любых комплексных чисел a, b и натуральных k . Мы будем использовать также представления функций $f(t)$ и $g(t)$ отрезками их рядов Тейлора, простейшие из которых можно записать в виде

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3}{3!} (it)^3 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} t^4, \quad g(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \gamma \frac{t^4}{8}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t) &= f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \\ &= \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \frac{\alpha_3}{3!} \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Слагаемое из суммы по j в правой части последнего равенства, соответствующее $j = n - 1$, равно $g^{n-1} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$. Нетрудно понять, что для любого $0 \leq j \leq n - 2$ из (12) следует, что

$$\begin{aligned} f^{n-j-1} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) &= f^{n-j-1} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) - g^{n-j-1} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) + g^{n-j-1} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-j-2} f^{n-j-1-l-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^l \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) + g^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t) &= \frac{\alpha_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 n g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &\frac{\alpha_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \sum_{j_1+j_2=0}^{n-2} f^{n-j_1-j_2-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j_1+j_2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) + \\ &+\gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

где суммирование по j_1, j_2 ведётся по всем решениям неравенств $0 \leq j_1 + j_2 \leq n - 2$ в неотрицательных целых числах, всего таких решений C_n^2 .

Теперь нетрудно понять, что для $n \geq 2$

$$f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t) = \frac{\alpha_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 n g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) +$$

$$+\gamma \left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\alpha_3 \beta_4 + 3}{3! 4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

что и утверждается в формулировке леммы.

Доказательство первой части теоремы основано на использовании формулы обращения

$$F(x) - G(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-itx} \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{th}{2}} dt + \\ + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-itx} g(t) \left(\frac{1}{\sin \frac{th}{2}} - \frac{1}{\frac{th}{2}} \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \frac{\pi}{h}} e^{-itx} \frac{g(t)}{it} dt,$$

где $x \in D + \frac{h}{2}$, справедливой для любой решетчатой функции распределения с шагом $h > 0$, носитель которой принадлежит решетке $D = \{a + kh : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, а $G(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Эта формула обращения была получена в [6, гл. 5, §2].

Из этой формулы обращения следует, что для всех натуральных n и $x \in \bar{D}_n$

$$F_n(x) - G(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t)}{\sin \frac{th}{2\sqrt{n}}} dt + \\ + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-(\pi\sqrt{n})/h}^{(\pi\sqrt{n})/h} e^{-itx} g(t) \left(\frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} - \frac{1}{th/2\sqrt{n}} \right) dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{g(t)}{it} dt. \quad (13)$$

Очевидно, что абсолютная величина последнего слагаемого в правой части этого равенства не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \pi\sqrt{n}/h} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} \frac{te^{-t^2/2}}{t^2} dt \leq \frac{h^2}{\pi^3 n} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} te^{-t^2/2} dt = \frac{h^2}{\pi^3 n} e^{-\frac{\pi^2 n}{2h^2}}$$

и при росте n убывает экспоненциально быстро.

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (13). Очевидно, что

$$\frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} - \frac{1}{th/2\sqrt{n}} = \frac{th/2\sqrt{n} - \sin(th/2\sqrt{n})}{\sin(th/2\sqrt{n})(th/2\sqrt{n})} = \\ = \frac{\gamma(th/2\sqrt{n})^3}{6 \sin(th/2\sqrt{n})(th/2\sqrt{n})} = \frac{\gamma}{6} \cdot \frac{th}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{th/2\sqrt{n}}{\sin(th/2\sqrt{n})}. \quad (14)$$

Функция

$$\frac{th/2\sqrt{n}}{\sin(th/2\sqrt{n})} \quad (15)$$

является чётной функцией t , которая при возрастании t от нуля до $\pi\sqrt{n}/h$ возрастает от 1 до $\pi/2$. Поэтому абсолютная величина этого слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-t^2/2} \frac{1}{6} \frac{|t|h}{2\sqrt{n}} \frac{\pi}{2} dt < \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}}\right)^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{6} \frac{h}{2\sqrt{n}} \frac{2\pi}{2} B_1.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (13). Нам нужно проинтегрировать с некоторой весовой функцией разность $f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t)$, для которой получено представление в виде правой части равенства из леммы 1. Нетрудно понять, что при интегрировании трёх последних слагаемых из правой части (11) мы получим величину, модуль которой не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{1}{|\sin(th/2\sqrt{n})|} \left(\frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 t^6 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{1}{|\sin(th/2\sqrt{n})|} \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} |t|^7 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{th/2\sqrt{n}}{\sin th/2\sqrt{n}} \left(\frac{\beta_4 + 3}{4!n} |t|^3 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 |t|^5 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{th2\sqrt{n}}{\sin(th/2\sqrt{n})} \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^6 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt. \end{aligned}$$

Из сказанного выше следует, что правая часть последнего равенства не превосходит

$$\frac{\beta_4 + 3}{4!n} \frac{\pi}{2} B_{3,n,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\pi}{2} B_{5,n,2} + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} \frac{\pi}{2} B_{6,n,2}.$$

Проинтегрируем первое слагаемое из правой части (11), но вначале слегка его преобразуем. Ясно, что оно равно

$$\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} e^{t^2/2n} = \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} \left(1 + \gamma \frac{t^2}{2n} e^{t^2/2n} \right) = \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} + \gamma \frac{\alpha_3}{12n^{3/2}} t^5 g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right).$$

Интегрирование последнего слагаемого из правой части последнего равенства даёт величину, модуль которой не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{th/2\sqrt{n}}{\sin(th/2\sqrt{n})} \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} t^4 e^{-(n-1)t^2/2n} dt < \\ & < \frac{\pi}{2} \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{5/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt = \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} \frac{\pi}{2} B_4 \left(\frac{n}{n-1} \right)^{5/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, величину

$$\frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} dt.$$

Ясно, что её можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \left(\frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} - \frac{1}{th/2\sqrt{n}} \right) \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} dt + \\ & + \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{1}{th/2\sqrt{n}} \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^3 e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Вспоминая формулу (14), мы видим, что абсолютная величина первого слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} \frac{th/2\sqrt{n}}{\sin(th/2\sqrt{n})} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2/2} dt < \frac{1}{6} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\pi}{2} B_4.$$

Второе слагаемое в (16) равно

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^2 e^{-t^2/2} dt &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^2 e^{-t^2/2} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} (it)^2 e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Абсолютная величина второго слагаемого в последней сумме не превосходит

$$\frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt,$$

при росте n она убывает экспоненциально быстро. Первое слагаемое в правой части (17) равно

$$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (1-x^2) e^{-x^2/2}.$$

Его вычисление не представляет трудностей, если мы учтём, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} it^k e^{-t^2/2} dt = H_k(x) \phi(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

где $H_k(x)$ – многочлены Чебышева – Эрмита, определяемые с помощью производных плотности стандартного нормального закона, $H_k(x) = (-1)^k \phi^{(k)}(x)/\phi(x)$, в частности, $H_2(x) = x^2 - 1$.

Из полученных результатов следует утверждение первое утверждение теоремы. Доказательство второго утверждения теоремы основано на хорошо известной формуле обращения, которая даёт величину скачка в точке $x \in D$ решетчатой функции распределения с шагом $h > 0$, носитель которой принадлежит решетке $D = \{a + kh : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, эта величина есть

$$\frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-itx} f(t) dt.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{h} (F_n(x+0) - F_n(x-0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt, \quad x \in D_n,$$

и

$$\tilde{p}_n(x) - \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g(t) \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} g(t) dt, \quad x \in D_n.$$

Очевидно, что абсолютная величина второго слагаемого в правой части последнего равенства не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} \frac{t}{t} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{h}{\pi^2\sqrt{n}} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{h}{\pi^2\sqrt{n}} e^{-\pi^2 n/2h^2}.$$

Для того, чтобы разобраться с первым слагаемым, мы вновь используем представление разности характеристических функций из леммы 1. Нетрудно понять, что интегрирование трёх последних слагаемых из правой части (11) даст величину, не превосходящую

$$\frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_{4,n,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 B_{6,n,2} + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_{7,n,2},$$

а интегрирование первого слагаемого даст $\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x) \phi(x)$ и величину, модуль которой не превосходит

$$\frac{\alpha_3}{12n^{3/2}} B_5 \left(\frac{n}{n-1} \right)^3 + \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \int_{\pi\sqrt{n}/h}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

Осталось лишь заметить, что $H_3(x) = x^3 - 3x$.

Вернёмся к следствиям теоремы, которые были приведены сразу после её формулировки. Уже отмечалось, что при оценках величин $B_{k,n,j}$ ключевую роль играют оценки функции $|f(t)|$. В некоторых случаях эти оценки получаются без труда. Так, если P – распределение Бернулли с параметром p , то для него $|f(t)| = \sqrt{1 - 4pq \sin^2 \left(\frac{t}{2\sqrt{pq}} \right)^2}$ и нетрудно проверить, что при $0.35 \leq p \leq 0.65$ для $|t| \leq \pi/h = \pi\sqrt{pq}$ справедливо неравенство $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$. В этом случае $\mu(t) = e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq \pi/h$ и для этих значений p справедливы оценки, о которых говорилось выше. В то же время, для распределения Бернулли с параметром, скажем, 0.25, неравенство $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$ для всех $|t| \leq \pi/h$ неверно. Разумеется, мы можем попробовать найти число $0 < \sigma^2 < 1$ такое, что $|f(t)| \leq e^{-\sigma^2 t^2/2}$ при всех $|t| \leq \pi/h$. Тогда, действуя аналогично предыдущему, мы получим аналоги оценок, приведённых выше, в которых оценки величин $B_{k,n,j}$ заменятся на $\sigma^{-(k+1)} B_k \left(\frac{n}{n-j} \right)^{(k+1)/2}$, то есть они возрастут в $\sigma^{-(k+1)}$ раз. Для распределения Бернулли с параметром 0.25 величина σ^2 чуть меньше 0.75, то есть оценки величин $B_{k,n,j}$ возрастут более, чем в 1.15^{k+1} раз, то есть для $k \geq 4$ более, чем в два раза. Можно действовать и по-другому. Для характеристических функций многих распределений для небольших T можно получить хорошие оценки $|f(t)|$. Например, для распределения Бернулли с параметром 0.25 величина $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq T = 0.92$.

Пусть для характеристической функции решетчатого распределения P с шагом h справедливо неравенство $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq T$, где $0 < T \leq \pi/h$. В этом случае мы можем записать формулу обращения для разности $\tilde{p}_n(x) - \phi(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(x) - \phi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n \frac{t}{\sqrt{n}} - g(t) \right) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt, \quad x \in D_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что абсолютная величина третьего слагаемого в правой части этого равенства не превосходит

$$\frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2},$$

эта величина при росте n убывает экспоненциально быстро.

Абсолютная величина второго слагаемого в правой части (18) не превосходит

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_T^{\pi/h} |f(t)|^n dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^n(T) \left(\frac{\pi}{h} - T \right),$$

где

$$\alpha(T) = \max\{|f(t)| : T \leq t \leq \pi/h\} < 1,$$

и при росте n также убывает экспоненциально быстро. Доказательство последнего неравенства легко получить от противного. Предположение о том, что $\alpha(T) = 1$, $T > 0$, приводит к тому, что $|f(\tau)| = 1$ для некоторого $T \leq \tau \leq \pi/h$. Отсюда следует, что распределение P сосредоточено на некоторой решетке D' с шагом $h' = \frac{2\pi}{\tau} \geq 2h$, а это противоречит тому, что шаг h решетки D является максимальным среди всех решеток, содержащих носитель распределения P .

Первое слагаемое в правой части (18) рассматривается точно также как и раньше, при этом в определениях чисел $B_{k,n,j}$ используется та же величина T , что и в (18).

Таким образом, если для характеристической функции решетчатого распределения P с конечным четвёртым моментом и шагом h справедливо неравенство $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq T$, где $0 < T \leq \pi/h$, то справедлив следующий аналог оценки (10)

$$\begin{aligned} \left| O_L \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\lesssim \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 B_6 + \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_5 + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_7 + \\ &+ \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^n(T) \left(\frac{\pi}{h} - T \right) + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2} + \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Свяжем T и n равенством $T = \left(\frac{12}{\beta_4 + 3} \right)^{1/4} n^{-1/4}$. Хорошо известно, что функция $|f(t)|^2$ является характеристической функцией распределения $P * P^-$, где распределение $P^-(A) = P(-A)$ для любого борелевского множества A . Распределение $P * P^-$ (оно называется симметризацией P) имеет нулевое среднее, дисперсию, равную двум, нулевой третий момент и четвёртый момент $2(\beta_4 + 3)$, поэтому $|f(t)|^2 = 1 - t^2 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{12} t^4$, откуда $|f(t/\sqrt{n})|^2 \leq 1 - t^2/n + \frac{\beta_4 + 3}{12} t^4/n^2$, если $t^2 \leq n$.

Отсюда следует, что

$$\left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^2 \leq \exp \left(-t^2/n + \frac{\beta_4 + 3}{12} \frac{t^4}{n^2} \right), \quad (20)$$

если

$$\frac{\beta_4 + 3}{12} \frac{t^2}{n} \leq 1.$$

Указанные условия выполнены, если $|t| \leq T\sqrt{n} = \left(\frac{12}{\beta_4 + 3} \right)^{1/4} n^{1/4} \leq \sqrt{n}$ и

$$\frac{\beta_4 + 3}{12n} \left(\frac{12}{\beta_4 + 3} \right)^{1/2} n^{1/2} \leq 1.$$

Первое из них выполнено при $n \geq 4$, а второе – при $\frac{\beta_4 + 3}{n} \leq 12$. Поскольку при нарушении этих условий наши оценки становятся тривиальными, мы будем считать, что эти условия выполнены.

Поэтому при указанных t

$$\begin{aligned} \left| \mu \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^{n-j} &\leq \exp \left(-(n-j) \frac{t^2}{2n} + \frac{\beta_4 + 3t^4}{24} \frac{t^4}{n} \right) \leq \\ &\leq \exp \left(-(n-j) \frac{t^2}{2n} \right) \left(1 + \frac{\beta_4 + 3t^4}{24} \frac{t^4}{n} \exp \left(\frac{\beta_4 + 3t^4}{24} \frac{t^4}{n} \right) \right) \\ &\leq \exp \left(-(n-j) \frac{t^2}{2n} \right) \left(1 + \frac{\beta_4 + 3t^4}{24} \frac{t^4}{n} e^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$B_{k,n,j} \leq B_k \left(\frac{n}{n-j} \right)^{(k+1)/2} \left(1 + \sqrt{e} \frac{\beta_4 + 3}{24n} (k+3)(k+1) \left(\frac{n}{n-j} \right)^2 \right),$$

в определении $B_{k,n,j}$ мы использовали $T = \left(\frac{12}{\beta_4 + 3} \right)^{1/4} n^{-1/4}$.

Вернёмся к формуле (18) и рассмотрим второе слагаемое в её правой части при указанном выборе T . Нетрудно проверить, что функция в правой части (20) является убывающей для $0 < t \leq \sqrt{\frac{6n}{\beta_4 + 3}}$. Верхний предел интегрирования в рассматриваемом слагаемом есть $\pi\sqrt{n}/h$. Нетрудно проверить также, что $\sqrt{\frac{6}{\beta_4 + 3}} < \frac{\pi}{h}$. Действительно, это неравенство эквивалентно неравенству $h^2 < \pi^2/6\beta_4 + 3$. В [10] установлено, что для решетчатых распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $h \leq 1 + \beta_3$, и нетрудно показать, что для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\beta_3 \leq \sqrt{\beta_4}$. Так как $\beta_1 \leq 1$, то для доказательства нужного неравенства достаточно убедиться в том, что

$$\left(1 + \sqrt{\beta_4} \right)^2 < \frac{\pi^2}{6} (\beta_4 + 3),$$

а это совсем несложно.

Из сказанного следует, что на области интегрирования во втором слагаемом в правой части (18)

$$\left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^n \leq \exp \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{\beta_4 + 3t^4}{24} \frac{t^4}{n} \right) \leq \sqrt{e} \exp \left(-\sqrt{\frac{3n}{\beta_4 + 3}} \right),$$

а само слагаемое не превосходит

$$\frac{\sqrt{n}}{h} \sqrt{e} \exp \left(-\sqrt{\frac{3n}{\beta_4 + 3}} \right).$$

Теперь нетрудно понять, что справедлив следующий аналог оценки (19)

$$\begin{aligned} \left| O_L \left(\frac{1}{n} \right) \right| &\lesssim \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 B_6 + \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_5 + \frac{1}{2} \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_7 + \\ &+ \frac{\sqrt{n}}{h} \sqrt{e} \exp \left(-\sqrt{\frac{3n}{\beta_4 + 3}} \right) + \frac{1}{\pi n^{1/4}} \left(\frac{\beta_4 + 3}{12} \right)^{1/4} \exp \left(-\sqrt{\frac{3n}{\beta_4 + 3}} \right) + \\ &+ \frac{|\alpha_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\pi} \int_{\left(\frac{12n}{\beta_4 + 3}\right)^{1/4}}^{\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

который получен без всяких предположений об оценках $|f(t)|$.

Рассмотрим теперь оценку в интегральной форме ЦПТ для распределений P таких, что $|f(t)| \leq e^{-t^2/2}$ при $|t| \leq T \leq \pi/h$. Ясно, что формулу обращения (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_n(x) - G(x) &= \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t)}{\sin(th/2\sqrt{n})} dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g(t) \left(\frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} - \frac{1}{th/2\sqrt{n}} \right) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{g(t)}{it} dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\sin(th/2\sqrt{n})} dt - \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} \frac{g(t)}{\sin(th/2\sqrt{n})} dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n} < |t| \leq \pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} g(t) \left(\frac{1}{\sin(th/2\sqrt{n})} - \frac{1}{th/2\sqrt{n}} \right) dt. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в правой части этого равенства дадут нам функцию

$$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2}$$

и сумму шести слагаемых, оценки которых отличаются от первых шести слагаемых в правой части (9) лишь заменой сомножителей $\pi/2$ на $\frac{Th/2}{\sin(Th/2)}$, кроме того, в последнем слагаемом в (9), точнее, в его аналоге, нижний предел интегрирования нужно заменить на $T\sqrt{n}$. Помимо этого, в аналоге (9) появятся три слагаемых, которые при росте n убывают экспоненциально быстро, они не превосходят

$$\frac{\alpha^n(T)}{2} \ln \frac{\pi}{Th}, \quad \frac{1}{2T^2n} e^{-T^2n/2} \text{ и } \frac{1}{12} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 e^{-T^2n/2}.$$

Из сказанного следует, что слагаемые в правой части (9), убывающие при росте n степенным образом, можно существенно уменьшить. Так, для распределения Эссеена можно выбрать в качестве T любое положительное число, меньшее 1.55, при выборе $T = 0.25$ величина $\frac{Th/2}{\sin(Th/2)} < 1.011$, т. е. слагаемые в правой части (9), убывающие при росте n степенным образом, уменьшаются более, чем в полтора раза. Однако, выбирать малые T нужно с известной осторожностью: при очень малых T и не очень больших n может случиться, что доминирующую роль в оценках станут играть слагаемые, убывающие при росте n экспоненциально быстро.

Результаты Я. В. Успенского дают первые члены асимптотических разложений для функций из левых частей равенств (1) и (3). Покажем, как выглядят вторые члены этих разложений. Далее нам будет удобно использовать моменты Чебышева – Эрмита, которые определяются равенствами

$$\theta_l = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) P dx,$$

нам понадобятся только $\theta_3 = \alpha_3$ и $\theta_4 = \alpha_4 - 3$.

Лемма 2. Для разности характеристических функций $f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t)$ при $n \geq 3$ справедливо представление

$$\begin{aligned} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t) &= \frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 ng^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 ng^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &+ \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 C_n^2 g^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\beta_4}{4!n} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^7 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &\frac{\gamma}{6} \left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}\right)^3 t^9 \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\gamma}{48n^2} t^6 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\gamma}{2} \frac{\theta_4}{4!n} \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^8 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &\frac{\gamma}{6} \left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 \frac{\beta_4 + 3}{4!n} t^{10} \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1, но используются более аккуратные представления функций $f(t)$ и $g(t)$ отрезками их рядов Тейлора, которые имеют вид

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3}{3!} (it)^3 + \frac{\alpha_4}{4!} (it)^4 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} t^4, \quad g(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \gamma \frac{t^6}{48},$$

$-\infty < t < \infty$, откуда следует, что

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 + \gamma \frac{\beta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 + \gamma \frac{1}{48} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6.$$

Разумеется, величины α_4 и β_4 совпадают, но нам удобнее записывать их по-разному в главных и остаточных частях разложений.

Действуя также как при доказательстве леммы 1, нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g(t) &= \left(\frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4\right) \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &+ \gamma \frac{\beta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{1}{48} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 n \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства есть

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4\right) ng^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ &+ \left(\frac{\theta_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4\right) \sum_{j_1+j_2=0}^{n-2} f^{n-j_1-j_2-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j_1+j_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Пользуясь разложениями функций f и g из леммы 1, нетрудно понять, что второе слагаемое в этой сумме есть

$$\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 \sum_{j_1+j_2=0}^{n-2} f^{n-j_1-j_2-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j_1+j_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\theta_3}{3!} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) +$$

$$+\gamma \frac{\theta_3 \theta_4}{3! 4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \frac{\theta_4 \beta_4 + 3}{4! 4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^8 C_n^2 \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Нетрудно показать, что первое слагаемое в последней сумме есть

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 C_n^2 g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \\ & + \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 \sum_{j_1+j_2+j_3=0}^{n-3} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j_1+j_2+j_3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right), \end{aligned}$$

где суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел j_1, j_2, j_3 таким, что $0 \leq j_1 + j_2 + j_3 \leq n - 3$. Число таких наборов есть C_n^3 . Поэтому второе слагаемое в последней сумме можно записать в виде

$$\gamma \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^9 C_n^3 \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \gamma \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{t}{\sqrt{n}} C_n^3 \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Из полученных результатов нетрудно получить утверждение леммы, при этом следует учесть, что $|\theta_4| \leq \beta_4 + 3$.

С помощью формулы обращения, которая использовалась при доказательстве второго утверждения теоремы, и леммы 2 для $x \in D_n$ легко получить представление

$$\tilde{p}_n(x) - \phi(x) = \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \phi(x) + \frac{\theta_4}{4! n} H_4(x) \phi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}}\right)^2 H_6(x) \phi(x) + O_L\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$\left|O_L\left(\frac{1}{n}\right)\right| \lesssim \frac{\beta_4}{8\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (22)$$

Величина $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ является суммой, в которую входят девять слагаемых, которые при росте n убывают степенным образом. Пять из них порождаются пятью последними слагаемыми в правой части (21). Три из них порождаются тремя первыми слагаемыми в правой части (21) при замене величин $g^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ и $g^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ на $g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ и оценке погрешности такой замены. Наконец, появление девятого слагаемого связано с тем, что при интегрировании третьего слагаемого из правой части (21) мы в итоге приходим к величине

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 C_n^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}}\right)^2 H_6(x) \phi(x) - \frac{1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}}\right)^2 H_6(x) \phi(x).$$

Первое слагаемое из правой части этого равенства мы включили в главную часть разложения $\tilde{p}_n(x) - \phi(x)$, а оценку второго отнесли в $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

С помощью леммы 2 и формулы обращения (13) нетрудно получить следующее асимптотическое разложение в интегральной форме ЦПТ: для $x \in \bar{D}_n$

$$\begin{aligned} F_n(x) - G(x) = & -\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_2(x) \phi(x) - \frac{\theta_4}{4! n} H_3(x) \phi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}}\right)^2 H_5(x) \phi(x) + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}}\right)^2 H_1(x) \phi(x) + O_I\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

где

$$\left| O_I \left(\frac{1}{n} \right) \right| \lesssim \frac{\beta_4}{12\pi n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right). \quad (23)$$

При получении этого разложения приходится использовать равенства

$$\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} = \frac{u - \sin u}{u \sin u} = \frac{u - (u - u^3/6 + \gamma u^5/120)}{u \sin u} = \frac{u^2}{6 \sin u} + \gamma \frac{u^4}{120 \sin u}$$

и

$$\frac{u^2}{6 \sin u} = \frac{u}{6} + \frac{u^2}{6} \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) = \frac{u}{6} + \frac{u^2 u - \sin u}{6 u \sin u} = \frac{u}{6} + \frac{u^2 \gamma u^3/6}{6 u \sin u} = \frac{u}{6} + \gamma \frac{u^4}{36 \sin u}.$$

Сравним оценку (23) с оценкой (9). В правой части (9) присутствуют три слагаемых, которые при росте n убывают как $1/n$. Выше мы видели, что множители $\pi/2$ в этих слагаемых можно заменить на величины, близкие к 1. При построении последнего разложения разности $F_n(x) - G(x)$ мы, в некотором смысле, перевели первое и третье слагаемые из правой части (9) в главную часть разложения разности $F_n(x) - G(x)$ и частично перевели второе. При этом второе слагаемое уменьшилось, для распределений Бернулли с параметром p , близким к 0.5, примерно в 4 раза.

Отметим, что для распределений с конечным пятым моментом первые слагаемые в оценках (22) и (23) можно заменить на

$$\frac{\beta_5}{15\pi n^{3/2}} \text{ и } \frac{\beta_5}{40\sqrt{2\pi} n^{3/2}},$$

при этом ход рассуждений при построении разложений и оценках остаточных частей практически не меняется.

Мы закончим тремя численными примерами, относящимися к последнему разложению разности $\tilde{p}_n(x) - \phi(x)$. Пусть P – распределение Эссеена и $n = 64$. Распределение P_{64} сосредоточено на множестве точек

$$\{x_k = -8 \frac{p}{\sqrt{pq}} + k \frac{1}{8\sqrt{pq}} : k = 0, 1, \dots, 64\}, \quad q = 1 - p, \quad p = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}.$$

Нетрудно проверить, что максимальное значение $\tilde{p}_{64}(x)$ достигается при $x = x_{27} = 0.048869$ (мы оставляем по шесть цифр после точки), это – ближайшая к нулю точка носителя P_{64} , и равно $8\sqrt{pq}C_{64}^{27}q^{37}p^{27} = 0.396470$. Величина $\phi(x_{27}) = 0.398466$, первый член асимптотического разложения разности $\tilde{p}_{64}(x_{27}) - \phi(x_{27})$ равен $-4 \cdot 10^{-4}$, второй член разложения, равный сумме слагаемых, связанных с H_4 и H_6 , равен -0.001606 . В итоге величину $\tilde{p}_{64}(x_{27})$ аппроксимирует число 0.396459, точность этой аппроксимации близка к 10^{-5} . Обратим внимание на то, что вклад первого члена асимптотического разложения в 4 раза меньше вклада второго члена. Этот, на первый взгляд, странный факт связан с тем, что точка x_{27} близка к нулю, где многочлен $H_3(x)$ обращается в нуль.

В точке $x_{23} = -0.964563$, где достигается максимальное значение разности $\tilde{p}_{64}(x_k) - \phi(x_k)$, $\tilde{p}_{64}(x_{23}) = 0.254593$, величина $\phi(x_{23}) = 0.250541$, первый член асимптотического разложения равен 0.003427, второй равен 0.000616. В итоге величину $\tilde{p}_{64}(x_{23})$ аппроксимирует число 0.254584, точность этой аппроксимации $0.9 \cdot 10^{-5}$. Вклад второго члена разложения примерно в 5.5 раз меньше вклада первого.

В точке $x_{21} = -1.471280$, где достигается максимальное значение разности

$$\tilde{p}_n(x) - \phi(x) - \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\phi(x) - \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x)\phi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 H_6(x)\phi(x),$$

$$\tilde{p}_{64}(x_{21}) = 0.137308, \quad \phi(x_{21}) = 0.135163,$$

первый член асимптотического разложения равен 0.001138, второй равен 0.000953. В итоге величину $\tilde{p}_{64}(x_{21})$ аппроксимирует число 0.137255, точность этой аппроксимации $5.3 \cdot 10^{-5}$.

Отметим, что для распределения Эссеена при $n = 64$ величина $\frac{\beta_5}{15\pi n^{3/2}}$ чуть меньше $5 \cdot 10^{-5}$.

Автор надеется, что читателя не смутит то, что в последнем из рассмотренных случаев реальная точность аппроксимации оказалась хуже, чем $\frac{\beta_5}{15\pi n^{3/2}}$. В настоящей оценке последнюю дробь нужно умножить на $(\frac{64}{63})^3 > 1.048$, кроме того, в ней присутствуют дополнительные слагаемые, одно из них, связанное со слагаемым из леммы 2, в котором участвует сомножитель θ_3^3 , даст вклад в оценку, больший $6.4 \cdot 10^{-6}$.

Список литературы

- [1] Гамкрелидзе Н.Г., Муавра-Лапласа теорема / Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: БРЭ, 1999, с. 364.
- [2] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
- [3] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей. М.: ИЛ, 1947.
- [4] Ляпунов А.М., Собрание сочинений, т. 1. М.: АН СССР, 1954.
- [5] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.
- [6] Сенатов В.В., Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009.
- [7] Сенатов В.В., О неравномерных оценках точности аппроксимации в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и её примен., 2014, т. 59, № 2, с. 276–312.
- [8] Сенатов В.В., О расширении класса распределений, многократные свёртки которых допускают асимптотические разложения с явными оценками остаточных частей // Теория вероятн. и её примен. (в печати).
- [9] Чистяков Г.П., Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. // Теория вероятн. и её примен., 2001, т. 46, № 2, с. 326–344, 2001, т. 46, № 3, с. 573–579, 2001, т. 47, № 3, с. 475–497.
- [10] Шевцова И.Г., Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса // Информ. и её примен. 2009, т. 3, № 3, с. 69–78.
- [11] Шевцова И.Г., О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин // Докл. РАН, 2012, т. 443, № 5, с. 555–560.
- [12] *Uspensky J.*, Introduction to mathematical probability. N.-Y.: McGraw-Hill, 1937.

Графические методы разведочного статистического анализа данных¹

Чепурин Е.В.², Нифонтова Т.А.³

На этапе выбора статистической модели, порождающей данные, предлагается использовать расширенный класс представлений графического образа полученных данных, характеризующего степень адекватности исходной гипотезы о порождающей модели полученным статистическим данным. Соответствующие графики строятся и интерпретируются по аналогии с общеизвестными "P – P" графиками. Однако, в ряде случаев для построения вероятностных графиков вместо оценок функций распределения приходится использовать состоятельные оценки "характеристических функционалов" типа преобразований Лапласа, производящих функций, производящих функций моментов и т.д. Приводятся статистически значимые примеры удачного использования способа визуального анализа непрерывных или дискретных, одномерных или многомерных данных.

1 Введение

На предварительном (разведочном) этапе статистического анализа прежде, чем остановиться на каком-то, как правило, математически весьма сложном, виде обработки данных, приходится решить ряд проблем общего описания структуры данных. Среди них важнейшими являются:

- а) выбор наиболее простой математической модели структуры данных;
- б) выявление наличия и типа отклонений от выбранной модели.

При решении этих проблем трудно переоценить роль графических методов. Яркий пример того, к каким бессмысленным результатам приводит пренебрежение предварительным графическим анализом данных, приводит Энскомб [2]. Четыре различных набора данных аппроксимируются одной и той же линейной регрессионной зависимостью с одинаковыми показателями точности подгонки. Из графического представления данных как функции единственной объясняющей переменной – номера наблюдений следует, что

¹Работа представляет собой часть электронной версии лекции Чепурина Е.В. по курсу "Статистический практикум" для студентов математико-экономической специализации механико-математического факультета.

²Чепурин Евгений Васильевич, echerugin@mail.ru, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

³Нифонтова Татьяна Анатольевна, ni.ta@bk.ru, ведущий инженер кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

лишь первый набор соответствует гипотезе линейной регрессии, во втором имеются грубые выбросы, в третьем явно нелинейная зависимость, а четвертый скорее независимая выборка с одним резко уклоняющимся наблюдением.

При анализе этого примера естественно вспомнить об афоризме, приписываемом выдающемуся статистику Дж. Тьюки, который гласит, что простейший график содержит больше информации, чем груда цифр. По существу, именно на основе графического анализа представляется возможным сформулировать гипотезы о структуре данных. Правда, здесь возникает своя математическая проблема: как для конкретной статистической задачи определить тип графика, который бы наиболее полно суммировал и выявлял искомую информацию. В определенном смысле, на каждый конкретный вопрос к данным необходимо строить свой тип графика. И если до 1964 года, т.е. до момента появления первых графических рабочих станций, математические фантазии в этом направлении сдерживались невозможностью их технического осуществления, то бурный процесс развития графических средств в последние двадцать лет требует как пересмотра старых, так и предложения новых средств графического анализа. С традиционными процедурами графического анализа можно ознакомиться по монографиям Боровикова [8], Дю Туата [7] и др., а также по обзорным статьям Фишера [4], Кливеленда [5] и Хьюбера [6].

В данной работе предлагается использовать при статистическом анализе расширенный класс графиков, который назовем СН-вероятностными графиками. Эти графики применимы не только при анализе одномерных непрерывных совокупностей, но также при анализе и дискретных данных, и многомерных данных.

Изложение методологии СН-графики и иллюстрации ее возможностей проведем в основном для независимых выборок. Однако область применимости метода СН-графики гораздо шире. Он применим для тех статистических моделей, в которых имеется возможность получать состоятельные оценки для СН-характеристик статистических моделей. К таковым относятся, например, функции распределения, характеристические и производящие функции, преобразования Лапласа и т.д.

Из всего многообразия статистических проблем выберем три, пожалуй, наиболее часто встречающихся на разведочном этапе статистического анализа данных.

Проблема А: Проверка гипотезы о параметрическом типе распределения.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i \in \mathbb{R}^k$, y_i – независимые в совокупности одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины, $i = \overline{1, n}$, функцией распределения отдельных наблюдений является

$$\mathcal{L}(y_1) = \mathbf{P}\{y_1 < \mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k.$$

Далее будем предполагать известным функциональный вид фигурирующих ниже параметрических функций распределения $\mathcal{F}_j(\mathbf{u}; \theta_j)$, θ_j – параметр, $\theta_j \in \Theta_j$, Θ_j – соответствующее параметрическое пространство, $j = \overline{1, b}$.

Задача А₁: Необходимо проверить гипотезу

$$\Gamma_{11} : \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{F}_1(\mathbf{u}; \theta_1), \quad \theta_1 \in \Theta_1,$$

против альтернативы

$$\Gamma_{21} : \mathcal{L}(y_1) \neq \mathcal{F}_1(\mathbf{u}; \theta_1), \quad \theta_1 \in \Theta_1.$$

Задача А₂: Необходимо проверить гипотезу

$$\Gamma_{12} : \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{F}_1(\mathbf{u}; \theta_1), \quad \theta_1 \in \Theta_1,$$

против альтернативы

$$\Gamma_{22}^j : \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{F}_j(\mathbf{u}; \theta_j), \quad \theta_j \in \Theta_j, \quad j = \overline{2, b}.$$

Проблема В: Проверка гипотезы однородности выборок.

Эта проблема может носить как параметрический, так и непараметрический характер. Поэтому, фигурирующие ниже функции распределения $\mathcal{G}_q(\mathbf{u}; \theta_q)$, $\theta_q \in \Theta_q$, в зависимости от контекста задачи будут иметь или известный, или неизвестный функциональный вид. Итак, пусть $y = (x, w)$, фрагменты данных x и w независимы, $x = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^k$, \mathbf{x}_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{G}_1(\mathbf{u}; \theta_1)$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$, $\theta_1 \in \Theta_1$, $w = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$, $\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^k$, \mathbf{w}_j – н.о.р. случайные величины, $j = \overline{1, m}$, $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1) = \mathcal{G}_2(\mathbf{u}; \theta_2)$, $\theta_2 \in \Theta_2$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$.

Задача В: Необходимо проверить гипотезу

$$\Gamma_3 : \mathcal{G}_1(\mathbf{u}, \theta_1) = \mathcal{G}_2(\mathbf{u}; \theta_2), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k; \quad \theta_q \in \Theta_q, \quad q = 1, 2,$$

против альтернативы

$$\Gamma_4 : \mathcal{G}_1(u, \theta_1) \neq \mathcal{G}_2(u; \theta_2), \quad \exists u \in \mathbb{R}^k; \quad \theta_q \in \Theta_q, \quad q = 1, 2.$$

Проблема С: Проверка гипотезы независимости компонент выборок.

Пусть $y = ((\mathbf{x}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{w}_n))$, $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^{k_2}$, фрагменты данных $(\mathbf{x}_j, \mathbf{w}_j)$ н.о.р. случайные величины, $j = \overline{1, n}$, $\mathcal{L}((\mathbf{x}_1, \mathbf{w}_1)) = \mathcal{K}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{K}_1(\mathbf{u}_1)$, $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1) = \mathcal{K}_2(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$.

Задача С: Необходимо проверить гипотезу

$$\Gamma_5 : \mathcal{K}(u_1, u_2) = \mathcal{K}_1(u_1)\mathcal{K}_2(u_2), \quad \forall u_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, \forall u_2 \in \mathbb{R}^{k_2}.$$

против альтернативы

$$\Gamma_6 : \mathcal{K}(u_1, u_2) \neq \mathcal{K}_1(u_1)\mathcal{K}_2(u_2), \quad \exists u_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, u_2 \in \mathbb{R}^{k_2}.$$

Здесь подробно изложим использование СН-вероятностных графиков лишь для проблемы А. Для решения других проблем необходимые видоизменения в способе построения СН-графиков вполне очевидны.

2 О СН-вероятностных графиках в проблеме А

2.1 Обсуждение общей концепции СН-вероятностных графиков

Идея построения СН-вероятностных графиков для проверки статистических гипотез проста. Опишем ее, имея в виду возможность расширения средств ее применения. Предположим, что имеется две гипотезы о структуре случайных данных y , например, Γ_1 и Γ_2 .

Далее, будем считать, что существует параметр n , характеризующий величину объема данных, а лучше сказать, объем информации, содержащихся в данных. Выберем функционал $\rho(v)$, однозначно определяющий распределение случайных данных y . Здесь v – детерминированный параметр функционала, $v \in V$, V – область допустимых значений v .

В дальнейшем $\rho(v)$ будем называть характеризационным или СН-функционалом. В конкретных ситуациях в качестве СН-функционалов будут браться в зависимости от целесообразности или функции распределения, или характеристические функции, или преобразования Лапласа, или производящие функции, или производящие функции моментов соответствующего распределения и т.д. Эти функционалы должны обладать еще тем общим свойством, что для них справедливы утверждения типа теоремы Леви для характеристических функций (см. Феллер [13]) о непрерывности соответствия $\rho(v)$ и вероятностных мер, порождающих $\rho(v)$. Для очень сложных моделей иногда от требования

об однозначном соответствии $\rho(v)$ и порождающей функции распределения приходится отказаться. Но требование непрерывности соответствия является существенным для предлагаемой методологии.

Здесь и далее $\theta_0 \in \Theta$ и $\varkappa_0 \in \mathcal{K}$ – значения порождающих параметров при гипотезах Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Предположим, что $\rho(v)$ при справедливости гипотезы Γ_1 имеет форму $\rho_1(v, \theta_0)$, а когда гипотеза Γ_1 не справедлива, т.е. имеет место гипотеза Γ_2 , то СН-функционал $\rho(v)$ принимает вид $\rho_2(v; \varkappa_0)$. Причем и $\rho_1(v, \theta_0)$, и $\rho_2(v; \varkappa_0)$ непрерывны в окрестности θ_0 и \varkappa_0 .

Итак, на основе данных y строятся две состоятельные при $n \rightarrow \infty$ оценки для $\rho(v)$. Одна из них, $\hat{r}_n(v)$, строится, исходя из справедливости гипотезы Γ_1 . Поясним, реально нам не известно, какая гипотеза справедлива, но при построении $\hat{r}_n(v)$ считаем, что данные y порождены вероятностной мерой из Γ_1 . В этом случае при $n \rightarrow \infty$ используется вся аналитика асимптотического анализа, определяемого гипотезой Γ_1 . В частности, если $t_n(y)$ – состоятельная оценка θ_0 при Γ_1 , то, с учетом состоятельности подстановочных оценок, получим

$$\rho_1(v; t_n(y)) = \rho_1(v, \theta_0) + \delta_{1n} \quad (1)$$

Здесь и далее δ_{jn} – бесконечно малая по вероятности случайная величина, т.е. для нее справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\delta_{jn}| > \varepsilon\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{для } \forall \varepsilon > 0.$$

В то же время, если справедлива не Γ_1 , а гипотеза Γ_2 , а кроме того, для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{||t_n(y) - m(\varkappa_0)|| > \varepsilon; \varkappa_0\} = 0, \quad \text{для } \forall \varepsilon > 0, \quad (2)$$

т.е. статистика $t_n(y)$ при Γ_2 является состоятельной оценкой функции $m(\varkappa)$ в точке $\varkappa = \varkappa_0$,

$$\rho_1(v; t_n(y)) = \rho_1(v; m(\varkappa_0)) + \delta_{2n}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$\hat{r}_n(v) = \begin{cases} \rho_1(v) + \delta_{1n}, & \text{когда верна гипотеза } \Gamma_1, \\ \rho_1(v; m(\varkappa_0)) + \delta_{2n}, & \text{когда верна гипотеза } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4)$$

Вторая состоятельная оценка для $\rho(v)$ строится в предположении справедливости объединенной гипотезы $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ или, что часто более удобно, в предположении справедливости "подходящей" гипотезы $\Gamma_3 \supset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Обозначим эту оценку $\hat{R}_n(v)$. При $n \rightarrow \infty$

$$\hat{R}_n(v) = \begin{cases} \rho_1(v; \theta_0) + \delta_{3n}, & \text{когда справедлива гипотеза } \Gamma_1, \\ \rho_2(v; \varkappa_0) + \delta_{4n}, & \text{когда справедлива гипотеза } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5)$$

т.е. $\hat{R}_n(v)$ всегда правильно оценивает $\rho(v)$.

Далее, на плоскости Ror строится график кривой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} R = \hat{R}_n(v), & v \in V, \\ r = \hat{r}_n(v), & v \in V. \end{cases} \quad (6)$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ график (6) превращается в прямую $R = r$, когда верна гипотеза Γ_1 и стремится к кривой

$$\begin{cases} R = \rho_2(v; \varkappa_0), & v \in V, \\ r = \rho_1(v; m(\varkappa_0)), & v \in V, \end{cases} \quad (7)$$

когда справедлива гипотеза Γ_2 .

Предположим, что во втором из равенств (7) переменную v можно однозначно выразить через r . Тогда кривая (7) примет вид

$$R = \rho_2(\rho_1^{-1}(r; m(\boldsymbol{x}_0)); \boldsymbol{x}_0), \quad (8)$$

где ρ_1^{-1} – символ обратной функции ρ_1 . Если такое представление аналитически затруднительно, то будем считать, что кривая (8) построена поточечно на основе равенств (7). Даже при очень сложных функциях $\rho_2(v)$ и $m(v)$ это можно сделать на основе численных методов компьютерной графики.

Итак, из (4) и (5) следует, что при справедливости гипотезы Γ_1 оценочная кривая (6) будет лежать вблизи прямой $R = r$. В этом случае принимаем гипотезу Γ_1 . При справедливости гипотезы Γ_2 оценочная кривая (6) будет лежать вблизи кривой (8). В этом случае принимаем гипотезу Γ_2 . И чем сильнее кривая (8) отличается от биссектрисы $R = r$, тем проще будет различить Γ_1 и Γ_2 .

Таким образом, полезно сформулировать:

Решающее правило графического анализа.

Если кривая (6) лежит вблизи прямой $R = r$, то принимается гипотеза Γ_1 .

Если в кривой (6) прослеживаются систематические отклонения от прямой $R = r$, то следует гипотезу Γ_1 отвергнуть в пользу гипотезы Γ_2 .

Дело осложняется тем, что в случае сложной гипотезы Γ_2 отдельные простые гипотезы, ее составляющие, могут порождать свои предельные кривые вида (8). В связи с этим возникает потребность в составлении каталога кривых вида (8) для набора простых гипотез, образующих Γ_2 . Конфигурация кривой (6), наиболее близко описываемая одним из элементов этого каталога, предопределяет следующую гипотезу, для которой предстоит повторить, и может быть неоднократно, описанную выше процедуру графической проверки гипотезы о типе распределения данных y . Отметим попутно, что специфические геометрические свойства распределений при таком неформальном подходе часто легче выявить, чем при использовании сложных аналитических критериев. Правда, для этого необходим определенный опыт работы с графикой.

Замечание. Иногда информативная сила графика (6) возрастет, если подобрать подходящее преобразование получающейся кривой. Например, вместо кривой (6) можно рассматривать и соответствующим образом интерпретировать кривую

$$\begin{cases} \tilde{R} = \sqrt{n} \left(\hat{R}_n(v) - \hat{r}_n(v) \right), & v \in V, \\ \tilde{r} = \hat{r}_n(v), & v \in V, \end{cases}$$

в плоскости (\tilde{R}, \tilde{r}) . Возможны и другие преобразования графика (6), которые помогут выявить наличие детерминированного отклонения кривой (6) от прямой $R = r$. \square

Если же вернуться к вопросу о построении аналитических критериев, то иногда можно в качестве статистики критерия взять максимум расстояния от кривой (6) до прямой $R = r$. Для ряда статистических моделей наблюдаемые уровни значимости соответствующего критерия успешно рассчитываются. Это верно, например, при проверке гипотез однородности на основе критерия Смирнова.

Перейдем к рассмотрению конкретных СН-вероятностных графиков. Причем, начнем с хорошо известных.

2.2 Графики типа "Р-Р"

2.2.1 Проблема А. Одномерные данные.

Пусть $k = 1$, а $\rho(v) = \mathbf{P}\{y_1 < v\}$ – непрерывная функция распределения, $v \in \mathbf{R}^1$. Предположим, что

$$\begin{cases} \Gamma_1 : \mathbf{P}\{y_1 < v\} = F_1(v; \theta_0), \theta_0 \in \Theta_1, \\ \Gamma_2 : \mathbf{P}\{y_1 < v\} \neq F_1(v; \theta_0), \theta_0 \in \Theta_1, \\ \Gamma'_2 : \mathbf{P}\{y_1 < v\} = F_2(v; \tau_0), \tau_0 \in \Theta_2, \end{cases} \quad (9)$$

где функциональный вид функций распределения F_i полностью определен, Θ_i – параметрические пространства, θ_0 и τ_0 – неизвестные значения параметров, порождающие данные y , соответственно, при гипотезах Γ_1 и Γ'_2 . Если $\hat{\theta}_n$ – состоятельная оценка параметра θ_0 при гипотезе Γ_1 , то кривая (6) в задаче проверки гипотезы Γ_1 против Γ_2 , или гипотезы Γ_1 против Γ'_2 принимает вид

$$\begin{cases} R = \hat{F}_n(v), & v \in \mathbf{R}^1, \\ r = F_1(v, \hat{\theta}_n), & v \in \mathbf{R}^1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\hat{F}_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(y_i < v)$ – эмпирическая функция распределения. Здесь и далее

$$\mathbf{I}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } A \text{ ложно,} \end{cases}$$

– индикатор события A .

Кривая (10) представляет собой кусочно-постоянную неубывающую кривую. Ее называют "Р-Р" графиком, или "Р-Р" вероятностной бумагой. Если она близка к прямой, то принимают Γ_1 . В противном случае, Γ_1 отвергают.

В обзорной статье Фишера [4], посвященной графическим методам непараметрической статистики отмечается, что "Р-Р" графики введены в статистическую практику графического способа проверки типа распределений А.Хазеном в 1914 году. На данный момент в рамках проверки гипотезы Γ_1 против альтернативы Γ_2 эта процедура присутствует практически во всех статистических программных комплексах. Для получения кривой (10) значения для v в основном следует выбирать в интервале $y_{(1)} \leq v \leq y_{(n)}$. Известны рекомендации полагать $\hat{F}_n(y_i)$ одному из следующих значений:

$$\frac{i}{n}, \quad \frac{i}{n+1}, \quad \frac{i+0.5}{n}, \quad \frac{i-0.5}{n}, \quad \frac{i-0.325}{n+0.25}.$$

На предельное поведение кривой (10) эта рекомендация не влияет.

Приведем пример возможности графической проверки гипотезы Γ_1 против альтернативы Γ'_2 .

Пример 1. Графическая проверка гипотезы логнормальности против альтернативы вейбулловости.

Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : F_1(v; \theta_0) &= \Phi\left(\frac{\ln v - \mu_0}{\sigma_0}\right), \quad \theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)^T, \\ &-\infty < \mu_0 < \infty, \quad \sigma_0^2 > 0, \quad v > 0. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$ – функция распределения стандартного нормального распределения. Далее,

$$\Gamma'_2 : F_2(v; \tau_0) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{v}{\beta_0}\right)^{\nu_0}\right\},$$

$$\tau_0 = (\nu_0, \beta_0)^T, \quad \nu_0 > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad v > 0.$$

Кривая "Р-Р" в данном случае будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} R = \hat{F}_n(v), \\ r = \Phi\left(\frac{\ln v - \hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n}\right), \\ \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln y_i, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum (\ln y_i - \hat{\mu}_n)^2, \end{cases} \quad (11)$$

где $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)$ – оценка максимума правдоподобия параметра θ_0 при Γ_1 . Если Γ_1 справедлива, то кривая (11) близка при достаточно больших n к прямой $R = r$. Если же справедлива Γ'_2 , то в силу закона больших чисел

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n &\xrightarrow{p} \mathbf{E}\{\ln y_1; \Gamma'_2\} = \tilde{\mu}, \\ \hat{\sigma}_n^2 &\xrightarrow{p} \mathbf{D}\{\ln y_1; \Gamma'_2\} = \tilde{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Непосредственно вычисляется, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \ln \beta_0 - \frac{\gamma}{\nu_0}, \quad \gamma = -\Gamma'(1) - \text{постоянная Эйлера}, \quad \gamma = 0.57721\dots, \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{\pi^2}{6\nu_0^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при Γ'_2 кривая (10) при больших n будет близка к кривой

$$\begin{cases} R = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{v}{\beta_0}\right)^{\nu_0}\right\}, & v > 0, \\ r = \Phi\left(\frac{\ln v - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right), & v > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Исключая из равенств (12) $\ln v$, получим кривую (12) в явном виде

$$r = \Phi\left(\frac{\ln \ln \frac{1}{1-R} - \gamma}{\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}}\right), \quad 0 < r < 1. \quad (13)$$

Поскольку R – ось ординат, а r – ось абсцисс, то (13) перепишем в следующем эквивалентном, но менее удобном для вычислений виде (см. также рис. 1)

$$R = 1 - \exp\left\{-\exp\left\{\gamma + u_r \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\right\}\right\}, \quad (14)$$

где $u_r = \Phi^{-1}(r)$ – квантиль уровня r стандартного нормального распределения. Характерной особенностью рассматриваемой проблемы является то, что для любой простой

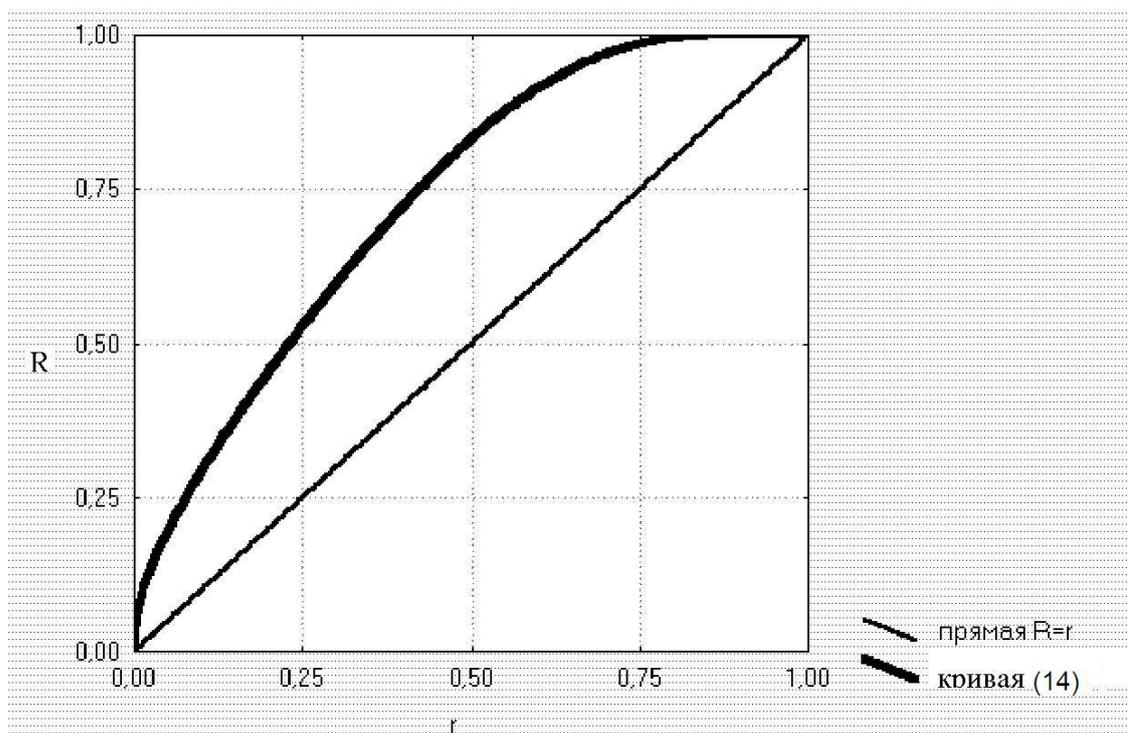


Рис. 1: Предельные кривые "P-P" вероятностных графиков при проверке логнормальности против вейбулловости. Максимальное расстояние между кривыми $D_{max} = 0.234621$ достигается в точке $r = 0.485, R = 0.816$.

гипотезы из Γ'_2 кривая (12) имеет стандартный вид (13). Это значительно облегчает процесс различения гипотез Γ_1 и Γ'_2 в соответствии с процедурой, описанной в разделе 2.1. \square

Ясно, что при решении задачи A_2 необходимо на "P-P" графики нанести все предельные кривые (7), отвечающие гипотезам $\Gamma'_{22}, j = \overline{2, b}$, с последующим применением решающего правила графического анализа для выбора наиболее правдоподобной гипотезы. После принятия решения необходимо решать задачу A_1 для вновь сформированных гипотез.

Каких либо принципиальных препятствий для построения "P-P" графиков при анализе дискретных данных нет. Однако это, как правило, не делается, поскольку в получаемых при этом точечных диаграммах, в силу дискретности данных, не достаточно графической информации для суждения о наличии или отсутствии отклонений построенных "P-P" графиков от точек на биссекторной прямой.

Далее будут приведены более информативные графические процедуры анализа дискретных данных (см. раздел 2.3).

По существу единственным осложнением, которое может воспрепятствовать использованию "P-P" графики, это невозможность вычислить $F_1(v, \hat{\theta}_n)$ при произвольном $v \in \mathbb{R}^1$. В частности, именно с такой ситуацией приходится сталкиваться при аппроксимации данных с помощью устойчивых распределений, функции распределения которых не выражаются в явном виде (см. Мандельброт [3], Фама [1], Ширяев [10], Золотарев [9]).

Выход состоит в том, чтобы использовать для них те СН-характеристики, которые для таких распределений легко вычисляются. В качестве таковых для устойчивых распределений выступают преобразования Лапласа и характеристические функции.

2.2.2 Проблема А. Многомерные данные.

Перейдем теперь к обсуждению ситуации с многомерными данными. Для них, в принципе, также возможно использование "Р-Р" графиков для проверки гипотезы Γ_1 против альтернатив Γ_2 или Γ'_2 при $k > 1$. Единственным осложнением, которое может возникнуть при реализации данной процедуры, это невозможность вычислить $F_1(v, \hat{\theta}_n)$ при произвольном $v \in V \subset \mathbb{R}^k$. Выход из такой ситуации состоит в том, чтобы найти такие СН-характеристики, которые можно было бы эффективно вычислить. Опять же, иногда это преобразования Лапласа, производящие функции моментов, характеристические и другие функции.

Итак, пусть $y_i = (\mathbf{y}_{i1}, \mathbf{y}_{i2}, \dots, \mathbf{y}_{ik})^T$ – н.о.р. k -мерные случайные векторы, $i = \overline{1, n}$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)^T \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$, (собственные) функции распределения $F_1(\mathbf{v}, \theta_0)$ и $F_2(\mathbf{v}, \tau_0)$ являются непрерывными функциями \mathbf{v} и $\theta_0, \tau_0 \in \Theta$.

Предположим, что речь идет о многомерном аналоге задачи (9) и что $F_1(\mathbf{v}, \hat{\theta}_n)$ – состоятельная при Γ_1 оценка для $F_1(\mathbf{v}, \theta_0)$, существует и вычислима для всех $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. От оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ_0 будем требовать ее состоятельность при Γ_1 и сходимость $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta(\boldsymbol{\varkappa}_0)$ при Γ'_2 , где $\theta(\boldsymbol{\varkappa}_0)$ такова, что $F_1(\mathbf{v}, \theta(\boldsymbol{\varkappa}_0))$ определена. Рассмотрим многомерный аналог равенства (10)

$$\begin{cases} R = \hat{F}_n(\mathbf{v}), \\ r = F_1(\mathbf{v}, \hat{\theta}_n), \quad v \in \mathbb{R}^k, \end{cases} \quad (15)$$

где $\hat{F}_n(\mathbf{v})$, как и ранее, эмпирическая функция распределения,

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(\mathbf{v}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(W_i(\mathbf{v})), \\ W_i(\mathbf{v}) &= \{\mathbf{y}_i < \mathbf{v}\} = \{\cap_{j=1}^k \{y_{ij} < v_j\}\}. \end{aligned}$$

Геометрическим образом заданного в параметрическом виде множества (15) является, в отличие от кусочно постоянной неубывающей кривой (10), пучок таких кривых. Это означает также, что функция (15) при некоторых r не является однозначной. Причем, все кривые пучка принимают значение нуль при $r = 0$ и единица при $r = 1$. Действительно, пусть V_c – линия уровня оценки $F_1(\mathbf{v}, \hat{\theta}_n)$, т.е.

$$V_c = \{\mathbf{v} : F_1(\mathbf{v}, \hat{\theta}_n) = c, \quad 0 < c < 1\}.$$

Если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_c$, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, а

$$\mathbf{P}\{W_1(\mathbf{v}_i)/(W_1(\mathbf{v}_1) \cap W_1(\mathbf{v}_2)); \theta_0\} > 0 \quad \text{для } i = 1, 2,$$

то

$$\mathbf{P}\{\hat{F}_n(\mathbf{v}_1) \neq \hat{F}_n(\mathbf{v}_2); \theta_0\} > 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\min_{\mathbf{v} \in V_c} \hat{F}_n(\mathbf{v}) < \max_{\mathbf{v} \in V_c} \hat{F}_n(\mathbf{v}); \theta_0\} > 0. \quad (16)$$

Неравенство (16) означает, что с положительной вероятностью при $r = c$ величина R в (15) примет несколько значений.

Таким образом, при использовании "Р-Р" графиков необходимо обозревать конфигурацию всего пучка кривых (15). При $n \rightarrow \infty$ пучок кривых (15) стягивается к прямой $R = r$ при справедливости Γ_1 и к кривой

$$\begin{cases} R = F_2(v, \tau_0), & v \in \mathbb{R}^k, \\ r = F_1(v, \theta(\tau_0)), & v \in \mathbb{R}^k, \end{cases} \quad (17)$$

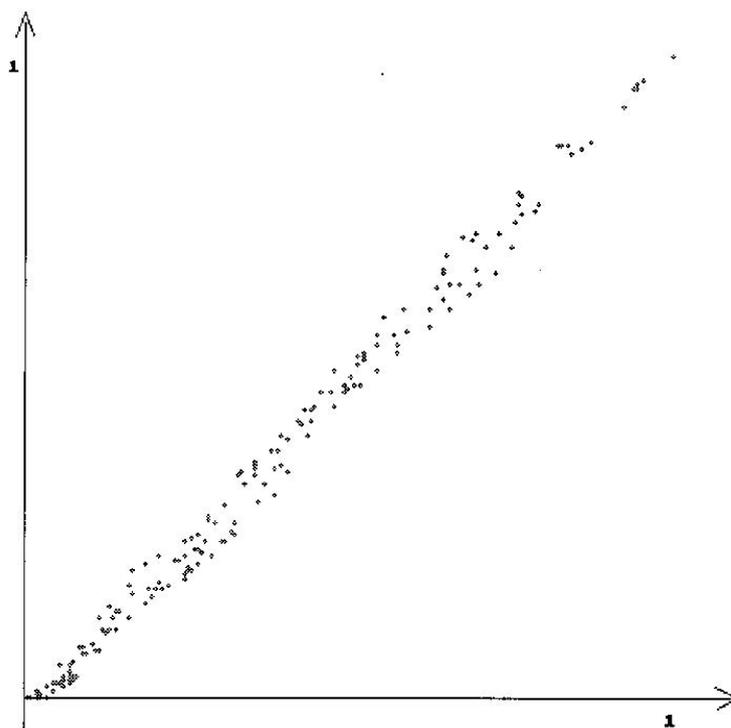


Рис. 2: Облако (18) в задаче проверки двумерной нормальности.

в случае справедливости гипотезы Γ'_2 .

Заметим, что нет необходимости в полном объеме строить пучок кривых (15). Достаточно воспроизвести след этого пучка для точек $v = y_i$, $i = \overline{1, n}$. По полученному облаку "Р-Р" точек (r_i, R_i) ,

$$\begin{cases} R_i = \hat{F}_n(y_i), \\ r_i = F_1(y_i, \hat{\theta}_n), \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (18)$$

представляющему собой следы пучка кривых (15), можно судить о степени адекватности данных проверяемым гипотезам. Точки $v = y_i$ взяты лишь потому, что они лежат в области ненулевых и неединичных значений эмпирической функции распределения и функции распределения $F_1(v, \theta_0)$. Приведенные выше в разделе 2.2.1 рекомендации для вычисления $\hat{F}_n(y_i)$ сохраняются и для многомерных данных.

Приведем пример использования "Р-Р" графиков для анализа многомерных данных.

Пример 2. Проверка гипотезы нормальности выборки.

Была смоделирована выборка н.о.р. случайных векторов объема $n = 200$ из двумерной нормальной совокупности со средним $\mu = (1, 5)^T$ и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

В качестве оценки двумерной нормальной функции распределения бралась оценка, построенная на основе метода достаточного эмпирического усреднения (ДЭУ-метода) с использованием 500 вариантов данных (см. раздел 3). Эта оценка по своим свойствам может быть выбрана сколь угодно близкой к оптимальной несмещенной оценке (см. Чепурин

[11]), а значит она состоятельна. На рис. 2 приводится облако (18), которое свидетельствует о хорошем согласии с гипотезой двумерной нормальности. \square

Ряд статистических проблем графического анализа многомерных гауссовских семейств распределений удобно решать на основе использования аппарата производящих функций моментов.

Для некоторых многомерных распределений, и в частности, для распределения Маршалла-Олкина, являющегося одним из возможных многомерных обобщений одномерного показательного распределения, функция распределения имеет весьма сложный вид. В то же время *функция надежности*, т.е. $\mathbf{P}\{\mathbf{y}_1 > \mathbf{v}; \theta_0\}$, имеет достаточно простой вид. Ясно, что в этом случае целесообразно анализировать "P - P" график, который определяется системой

$$\begin{cases} R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(y_i > v), & v \in \mathbf{R}_+^k, \\ r = \mathbf{P}\{y_1 > v; \hat{\theta}_n\}, & v \in \mathbf{R}_+^k. \end{cases}$$

Явный вид функции надежности распределения Маршалла-Олкина приводится, например, в обзорной статье Чепурина [12].

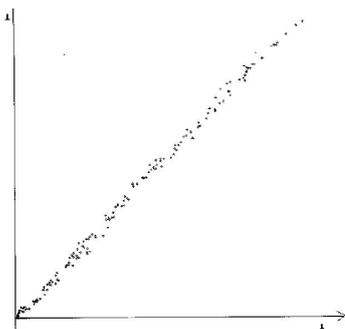
2.2.3 Проблема В. Многомерные данные.

В этом случае "P-P" вероятностный график задается в следующем виде

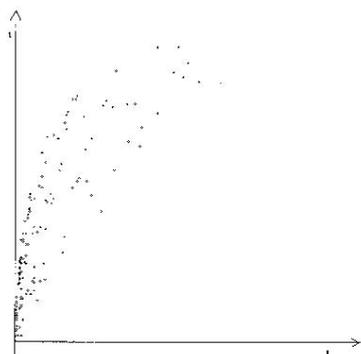
$$\begin{cases} R = \hat{\mathcal{G}}_2(\mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \mathcal{U} \\ r = \hat{\mathcal{G}}_1(\mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \end{cases} \quad (19)$$

где $\hat{\mathcal{G}}_i$ - состоятельные оценки для \mathcal{G}_i , $i = 1, 2$. В случае $k = 1$ множество $\mathcal{U} \equiv \mathbf{R}^1$, при $k > 1$ множество $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_q, q = \overline{1, n+m} : \mathbf{u}_i = \mathbf{y}_i, \text{ для } i = \overline{1, n}, \mathbf{u}_i = \mathbf{w}_j \text{ для } i = \overline{n+1, n+m}, j = \overline{1, m}\}$.

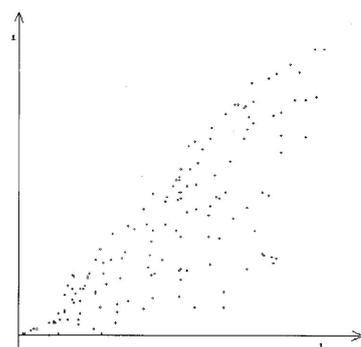
Эффект использования "P - P" вероятностных графиков в решении проблемы проверки гипотезы однородности гауссовских выборок достаточно полно характеризуется приведенными ниже рисунками.



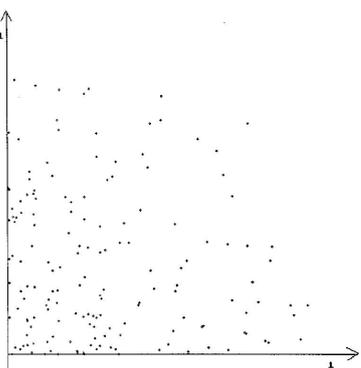
"P-P" вероятностный график для проверки гипотезы однородности двух независимых двумерных нормальных выборок объемов $n = 200$, средними $\mu_1 = \mu_2 = (1, 5)^T$, и ковариационными матрицами $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.



”Р-Р” вероятностный график для проверки гипотезы однородности двух независимых двумерных нормальных выборок объемов $n = 200$, средними $\mu_1 = (1, 5)^T$, $\mu_2 = (6, 9)^T$, и ковариационными матрицами $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.



”Р-Р” вероятностный график для проверки гипотезы однородности двух независимых двумерных нормальных выборок объемов $n = 200$, средними $\mu_1 = (1, 5)^T$, $\mu_2 = (-2, -4)^T$, и ковариационными матрицами $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.



”Р-Р” вероятностный график для проверки гипотезы однородности двух независимых двумерных нормальных выборок объемов $n = 200$, средними $\mu_1 = (1, 5)^T$, $\mu_2 = (3, 7)^T$, и ковариационными матрицами $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

2.3 Графики типа ”П - П”.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i \in \mathbf{N}_+^k$, т.е. $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ik})$, $y_{ij} \geq 0$, y_{ij} – целые числа, $j = \overline{1, k}$, y_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$, $z = (z_1, \dots, z_k)$, z_j – комплексные числа, $|z_j| \leq 1$, $j = \overline{1, k}$,

$$\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{F}_0(\mathbf{u}; \theta_0), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{N}_+^k,$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = f_0(\mathbf{u}; \theta_0) \quad \mathbf{u} \in \mathbf{N}_+^k.$$

Производящая функция распределения случайной величины y_1 определяется как

$$\Pi(z; \theta_0) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^k z_j^{y_{1j}}; \theta_0 \right) \quad (20)$$

или, что эквивалентно,

$$\Pi(z; \theta_0) = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_+^k} \left(\prod_{j=1}^k z_j^{m_j} \right) f_0((m_1, \dots, m_k); \theta_0). \quad (21)$$

О свойствах производящих функций см. [13], раздел "Производящие функции". При графическом представлении $\Pi(z; \theta_0)$ будем считать, что $z = (z_1, \dots, z_k)$ таково, что z_j – действительны и $0 \leq z_j \leq 1$ для $j = \overline{1, k}$.

Непараметрическая эмпирическая оценка производящей функции

$$\hat{\Pi}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k z_j^{y_{ij}} \quad (22)$$

является состоятельной оценкой для $\Pi(z; \theta_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, если $\hat{\theta}_n$ – состоятельная при $n \rightarrow \infty$ оценка для θ_0 , то $\Pi(z; \hat{\theta}_n)$ состоятельная оценка для $\Pi(z; \theta_0)$.

2.3.1 Проблема А.

Пусть $y_1 \in \mathbb{N}_+^k$. Для решения задачи A_1 в проблеме А исследуется "П - П" вероятностный график вида

$$\begin{cases} R = \hat{\Pi}(z), & z = (z_1, \dots, z_k), \quad 0 \leq z_j \leq 1, \quad j = \overline{1, k}, \\ r = \Pi(z; \hat{\theta}_n^{(1)}), & z = (z_1, \dots, z_k), \quad 0 \leq z_j \leq 1, \quad j = \overline{1, k}, \end{cases} \quad (23)$$

где $\hat{\theta}_n^{(1)}$ – состоятельная оценка для θ_0 при гипотезе Γ_1 . Далее действуем в соответствии с "Решающим правилом графического анализа" пункта 2.1.

Замечание. "Различающая сила" "П-П" графиков увеличится, если их изображать следующим образом

$$\begin{cases} \tilde{R} = \sqrt{n} \{ \hat{\Pi}(z) - \Pi(z; \theta_n^{(1)}) \}, & 0 \leq z \leq 1, \\ \tilde{r} = \Pi(z; \theta_n^{(1)}), & 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

Возможные и другие преобразования кривой (23), на которых возможные отклонения от гипотезы Γ_1 будут проявляться более явно. Опять же, весьма полезным окажется нанесение на соответствующие графики альтернативных "П-П" предельных кривых. \square

Для решения задачи A_2 в проблеме А предварительно строятся оценки $\hat{\theta}_n^{(q)}$ – состоятельные при справедливости гипотезы $\Gamma_2^{(q)}$, а затем, кроме графика (23), строятся графики вида

$$\begin{cases} R = \Pi(z), \\ r = \Pi(z; \hat{\theta}_n^{(q)}) \end{cases} \quad (25)$$

для $q = \overline{2, b}$. Для дальнейшего более тонкого анализа выбираются те гипотезы, для которых соответствующие им "П - П" вероятностные графики наиболее близки биссектрисе первого координатного угла. В определенном смысле, предстоит вновь решать задачу A_1 для отобранных гипотез.

Пример 3. Проверка гипотезы пуассоновости против отрицательной биномиальности.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, y_i – н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$.

1. Предположим, что справедлива гипотеза

$$\Gamma_1 : y_1 \stackrel{d}{=} POIS(\theta_0), \quad \theta_0 > 0, \quad \mathcal{L}'(y_i) = \frac{\theta_0^k e^{-\theta_0}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$\Pi(z; POIS(\theta_0)) = \exp(\theta_0(z - 1)) \quad (27)$$

$$\check{a}_1(POIS(\check{\theta})) = \bar{y}_n = \theta_0 + o_p(1) \quad (28)$$

$$\begin{cases} R = \hat{\Pi}_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{y_i} = E\{z^{y_i}; POIS(\theta_0)\} + o_p(1) = \exp(\theta_0(z - 1)) + o_p(1) \\ r = \check{\Pi}(z; POIS(\check{\theta})) = \exp\{\bar{y}_n(z - 1)\} = \exp(\theta_0(z - 1)) + o_p(1) \end{cases} \quad (29)$$

$$R = r + o_p(1) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Итак, при справедливости гипотезы Γ_1 в первом квадранте плоскости (r, R) будет наблюдаться график кривой в окрестности биссектрисы единичного квадрата.

2. Возникает вопрос, что будет наблюдаться в единичном квадрате плоскости (r, R) , если справедлива гипотеза

$$\Gamma_2 : y_1 \stackrel{d}{=} NBIN(\nu_0, \tau_0); \quad \nu_0 > 0, \quad 0 < \tau_0 < 1, \quad (31)$$

$$\mathcal{L}'(y_1) = \frac{\Gamma(\nu_0 + k)}{\Gamma(\nu_0)k!} \tau_0^{\nu_0} (1 - \tau_0)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Pi(z; NBIN(\nu_0, \tau_0)) &= \left(\frac{\tau_0}{1 - (1 - \tau_0)z} \right)^{\nu_0} = \\ &= \left(\frac{\tau_0}{\tau_0 - (1 - \tau_0)(z - 1)} \right)^{\nu_0}, \quad |z| < \frac{1}{1 - \tau_0}. \end{aligned} \quad (33)$$

Ордината "П – П" графика R в случае справедливости гипотезы Γ_2 принимает вид

$$\begin{aligned} R = \hat{\Pi}_n(z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{y_i} = E\{z^{y_i}; NBIN(\nu_0, \tau_0)\} + o_p(1) = \\ &= \left(\frac{\tau_0}{\tau_0 - (1 - \tau_0)(z - 1)} \right)^{\nu_0} + o_p(1), \end{aligned} \quad (34)$$

$$a_1(NBIN(\nu_0, \tau_0)) = \nu_0 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0}, \quad (35)$$

$$\hat{a}_1(NBIN(\nu_0, \tau_0)) = \bar{y}_n = \nu_0 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0} + o_p(1). \quad (36)$$

А абсцисса "П – П" графика задается соотношением

$$r = \hat{\Pi}(z; POIS(\hat{a}_1(NBIN(\nu_0, \tau_0)))) = \exp\left(\nu_0 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0} (z - 1)\right) + o_p(1), \quad (37)$$

откуда получаем неравенство

$$\exp\left\{-\nu_0 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0}\right\} \leq r \leq 1. \quad (38)$$

Из соотношения (37) подстановка

$$(1 - \tau_0)(z - 1) = \frac{\tau_0 \ln r}{\nu_0} + o_p(1) \quad (39)$$

в соотношение (34) приводит к представлению

$$R = \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln r}{\nu_0}}\right)^{\nu_0} + o_p(1), \quad \exp\left(-\nu_0 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0}\right) \leq r \leq 1. \quad (40)$$

Итак, при справедливости гипотезы Γ_2 в первом квадранте плоскости (r, R) будет наблюдаться график кривой в окрестности одной из кривых каталога кривых, определяемого главной частью соотношения (40), см. рисунок 3.

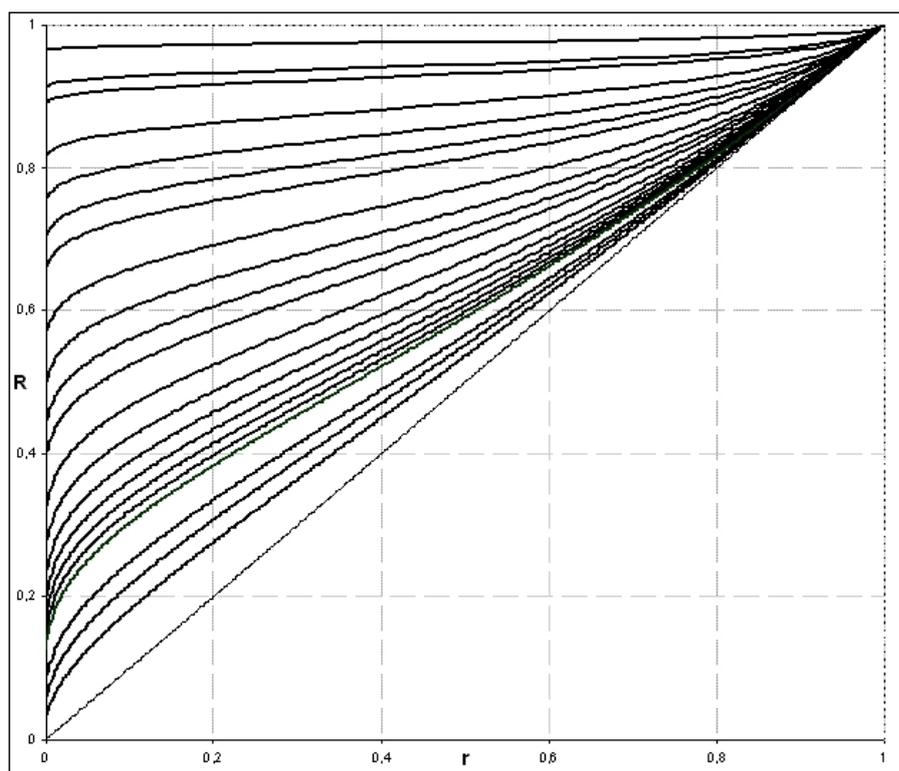


Рис. 3: Графический каталог предельных "П – П" графиков в задаче проверки гипотезы пуассоновости выборки против ее отрицательной биномиальности.

Далее предположим, что поведение "П – П" графика данных y реализуется согласно модели формулы (40).

В соответствии с ”решающим правилом графического анализа” (см. 2.2) кривую типа (40) с помощью преобразования (41)

$$\begin{cases} \tilde{R} = \exp\{\nu_0(1 - R^{-\frac{1}{\nu_0}})\} \\ \tilde{r} = r \end{cases} \quad (41)$$

распрявим, превратив в биссектрису первого координатного угла. Если при $n \rightarrow \infty$ и при подстановке в соотношение (41) вместо ν_0 и τ_0 их состоятельных оценок $\hat{\nu}_n$ и $\hat{\tau}_n$ преобразованный ”П – П” график данных y будет лежать в окрестности биссектрисы, это будет свидетельствовать в пользу справедливости гипотезы Γ_2 . \square

Список литературы

- [1] *Fama E.F.* , The Behavior of Stock-Market Prices // Journal of Business, XXXVIII, (January, 1965), p. 34–105.
- [2] *Anscombe F.J.* , Graphs in statistical analysis // American Statistician, 1973, v. 27, p. 17–21.
- [3] *Mandelbrot B.*, The Variation of Certain Speculative Prices // Journal of of Business, XXXVI, 1963, p. 394–419.
- [4] *Fisher N.I.*, Graphical methods in nonparametric statistics: A review and annotated bibliography // Int. Statist. R., 1983, v. 51, p. 25–58.
- [5] *Cleveland W.S.*, Research in Statistical Graphics // J.A.S.A, 1987, v. 82, № 398, p. 419–423.
- [6] *Huber P.J.*, Experiences with Three-Dimensional Scatterplots // J.A.S.A, 1987, v. 82, № 398, p. 448–453.
- [7] *du Toit S.H.C., Steyn A.G.W., Stumpt R.H.*, Graphical Exploratory Data Analysis. Springer-Verlag, 1987.
- [8] *Боровиков В.П.*, STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере. Серия “Для профессионалов”. С.-Петербург, Изд. дом. Питер., 2001, с. 220.
- [9] *Золотарев В.М.*, Одномерные устойчивые распределения. М., Наука, 1983.
- [10] *Ширяев А.Н.*, Основы стохастической финансовой математики. В двух томах. М., Фазис, 1998.
- [11] *Чепурин Е.В.*, Статистический анализ гауссовских данных на основе метода достаточного эмпирического усреднения // Вестник РУДН, сер. Прикладная матем. и информ., 1995, т. 1, с. 112–125.
- [12] *Чепурин Е.В.*, Статистические методы в теории надежности // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. “Вероятность и статистика”, 1994, т. 1, № 2, 279–330.
- [13] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., Мир, 1984, Т. 1.

О планировании объемов контрольных испытаний по биномиальному плану с остановкой

Чистякова Н.В.¹

В [1] введен план испытаний технических систем на надежность. План подобен известному биномиальному плану (БП) проведения испытаний. План назван биномиальным планом с остановкой (БПО). При испытаниях по БП проводится фиксированное число испытаний N . По БПО проводится не более фиксированного числа испытаний, и при появлении первого отказа испытания завершаются. Целесообразность введения такого плана объяснялась желанием понизить число испытаний, необходимых для подтверждения заданных требований по безотказности. В настоящей работе проводится анализ возможности практического использования БПО для подтверждения заданных требований по надежности технической системы в случае безотказных результатов таких испытаний.

Введение. Хорошо известно понятие биномиальных испытаний. В i -м испытании возможно возникновение двух исходов A_i и \bar{A}_i , где событие \bar{A}_i — противоположно событию A_i , события A_i , $i = 1, 2, \dots$ независимы и имеют одинаковые вероятности $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \dots$. Биномиальный план (БП) испытаний технической системы предполагает испытание N идентичных образцов такой системы. В качестве A_i рассматривается случайное событие, состоящее в безотказной работе на интервале $[0, t_0]$ i -го образца системы, $i = 1, 2, \dots, N$. Из идентичности образцов и независимости проведения испытаний следует, что события A_i можно считать независимыми и равновероятными. Обозначим $R = \mathbf{P}(A_1) = \dots = \mathbf{P}(A_i) = \dots$ — вероятность безотказной работы (ВБР) системы на $[0, t_0]$. Назовем t_0 плановым временем работы системы.

План биномиальных испытаний является широко распространенным ввиду того, что статистические оценки, как точечные, так и интервальные, получаемые для ВБР системы при таком плане испытаний, всесторонне исследованы (см. например [2, п. 21.2, 21.5], а также приведенную в этом справочнике библиографию).

Мы не будем здесь рассматривать организацию и обработку результатов так называемых форсированных испытаний. При биномиальных испытаниях в обычном режиме продолжительность испытаний T и плановое время t_0 работы системы совпадают. Число испытаний N заранее задано (фиксировано). Регистрируется число отказавших и не отказавших за время $T = t_0$ образцов среди N испытываемых.

В своей книге [1] Р.С. Судаков отмечает, что “необходимость задания объема N испытаний до их проведения может быть весьма стесняющим условием”. Также стесняющим (т.е. не всегда выполненным на практике) считает Р.С. Судаков и условие независимости и одинаковой распределенности событий A_i , $i = 1, 2, \dots$, в биномиальном плане. Далее в [1] введены (п. 1.2.2) и исследуются (п. 2.3) так называемые биномиальные планы с

¹Чистякова Наталья Владимировна, nchist60@yandex.ru, старший научный сотрудник, лаборатория теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

остановкой (БПО). По мнению автора, вводя БПО, мы сможем избежать указанных выше затруднений, возникающих при использовании БП.

Далее показано, что план БПО не обладает объявленными в [1] преимуществами перед обычным биномиальным планом в смысле существенного уменьшения объема необходимых испытаний для подтверждения заданного уровня надежности по безотказным испытаниям.

1. Следуя Р.С. Судакову [1, п. 1.22, с. 40], введем БПО. Рассмотрим сначала бесконечные последовательности биномиальных испытаний с одинаковой вероятностью $R = \mathbf{P}(A_i)$, где событие A_i состоит в успешном исходе i -го испытания, $i = 1, 2, \dots$. Максимально сохраняя обозначения автора, введем случайную величину \widetilde{N}' , равную числу испытаний до возникновения первого отказа. Тогда

$$\mathbf{P}(\widetilde{N}' = j) = R^j(1 - R), \quad \mathbf{P}(\widetilde{N}' \leq k) = \sum_{j=0}^k \mathbf{P}(\widetilde{N}' = j) = 1 - R^{k+1}, \quad (1)$$

то есть, случайная величина \widetilde{N}' имеет геометрическое распределение.

Далее в [1] введена случайная величина N' , которая (цитируем автора) “удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $N' \leq N$, где N — фиксированное число,
- 2) $N' = \widetilde{N}'$, если в N испытаниях число отказов $l(N) \neq 0$,
- 3) $N' = N$, если $l(N) = 0$.”

По нашему мнению, такая случайная величина может быть выражена формулой

$$N' = \min(N, \widetilde{N}'), \quad (2)$$

где N — фиксированное число, \widetilde{N}' — число биномиальных испытаний до первого отказа.

Найдем распределение случайной величины N' .

$$G(k) = \mathbf{P}(N' \leq k) = \mathbf{P}(\min(N, \widetilde{N}') \leq k) = \begin{cases} 1 - R^{k+1} & \text{при } k < N \\ 1 & \text{при } k \geq N \end{cases}. \quad (3)$$

По-другому подходит Р.С.Судаков к отысканию распределения величины N' . Он верно замечает, что можно вычислить условную вероятность

$$F(k) = \mathbf{P}(\widetilde{N}' \leq k | \widetilde{N}' \leq N) = \frac{\mathbf{P}(\widetilde{N}' \leq k)}{\mathbf{P}(\widetilde{N}' \leq N)} = \frac{1 - R^{k+1}}{1 - R^{N+1}}. \quad (4)$$

Заметим, что указанная формула верна при $k \leq N$, а при $k > N$ эта условная вероятность равна 1.

Самой существенной ошибкой в выводах Судакова является утверждение, что найденная функция $F(k)$ является функцией распределения случайной величины N' .

Мы уделили такое внимание величине N' , поскольку N' фигурирует в [1] как число испытаний, проводимых по плану БПО. Приведем определение БПО (определение 1.9, данное в [1, с. 41]): “Будем говорить, что система испытывается по биномиальному плану с остановкой (по БПО), если выполняются следующие условия:

А. Наибольший объем испытаний заранее назначен до их проведения и является фиксированным числом. В каждом i -ом испытании возможен один из двух исходов: успешная работа (событие A_i) или отказ (событие \overline{A}_i).

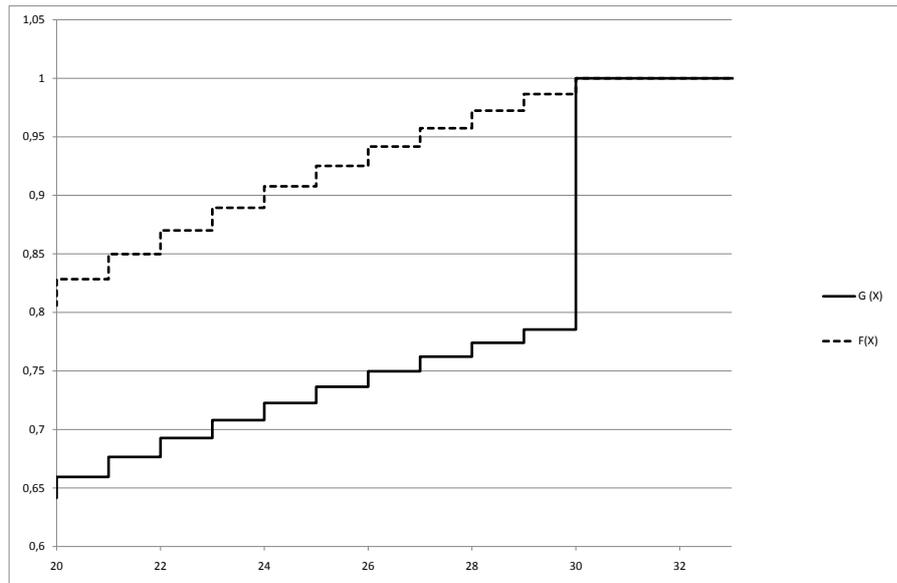


Рис. 1: функции распределения $F(k)$ и $G(k)$.

Б. Испытания проводятся последовательно друг за другом и заканчиваются в двух случаях: 1) после возникновения первого отказа, если $l(N) \neq 0$; 2) после исчерпания назначенного объема N испытаний, если $l(N) = 0$. Исходом испытаний считается значение случайной величины N' , которая равна числу испытаний до возникновения первого отказа, если $l(N) \neq 0$ и $N' = N$ при $l(N) = 0$.

В. Если $N' \sim N'(R)$, т.е. если события A_i при $i = 1, 2, \dots$ независимы и имеют равную вероятность $R = \mathbf{P}(A_i)$, то будем говорить, что система испытывается по нейтральной биномиальной схеме с остановкой. Здесь N' имеет функцию распределения F из выражения (1.81). ...”

Мы не приводим здесь пункт “Г” определения. Этот пункт рассматривает случай зависимых A_i , $i = 1, 2, \dots$, и вводит понятие БПО с накоплением повреждений и БПО с восстановлением, которые не будут здесь рассматриваться. Испытания, удовлетворяющие условиям А, Б и В, названы в [1] нейтральной схемой БПО. Только такие испытания и рассматриваются в настоящей работе.

Упомянутое выше выражение (1.81) из [1] соответствует нашему (4). Последнее предложение пункта В является ошибочным. Выражение (1.81) это:

$$\mathbf{P}(\widetilde{N}' \geq k) = 1 - \frac{1 - R^{k+1}}{1 - R^{N+1}},$$

из которого:

$$\mathbf{P}(\widetilde{N}' \leq k) = \frac{1 - R^{k+1}}{1 - R^{N+1}} = F(k),$$

что, как мы уже говорили, не верно для случайной величины N' , имеющей в действительности функцию распределения (3).

Функции $F(k)$ и $G(k)$ задают существенно различные распределения. Наглядно различие функций распределения видно на рис. 1, где $F(k)$ и $G(k)$ построены при $R = 0,95$

и $N = 30$. Для других значений R и N качественно картина остается той же.

Назовем $N'_{\text{усл}}$ случайную величину, обладающую функцией распределения (4). Эта случайная величина определена не для всех цепочек биномиальных испытаний, а лишь для тех, у которых $\widetilde{N}' \leq N$, т.е. первый отказ наступает не позднее $(N + 1)$ -го испытания.

Вывод 1. Рассмотрены две случайные величины N' и $N'_{\text{усл}}$. Величина N' является числом испытаний по введенной в [1] нейтральной схеме БПО. В книге [1] случайной величине N' приписана функция распределения величины $N'_{\text{усл}}$. Истинная функция распределения случайной величины N' в [1] вообще не получена и не исследовалась.

2. Посмотрим, какие именно результаты Р.С.Судаков считает полученными для БПО, но доказывает их не для БПО (т.е. не для случайной величины N'), а для случайной величины $N'_{\text{усл}}$ с функцией распределения (4).

В [1, п. 2.3, с. 98] рассматривается оценка ВБР системы при испытаниях по БПО.

С использованием аналитических свойств выражения (1.81) в [1] получены Теоремы 2.17 и 2.18. Воспроизведем формулировки и доказательства этих теорем. Не будем, однако, повторять ошибку автора [1] и напишем везде и в формулировке, и в его доказательстве $N'_{\text{усл}}$ вместо N' , т.е. напишем ту случайную величину, которая действительно обладает распределением (4), соответствующим соотношению (1.81).

Далее из соотношений (1.81) в [1] получена следующая теорема.

Теорема 2.17. Пусть проводятся испытания по нейтральной схеме БПО. Тогда корень \underline{R}' уравнения

$$\gamma = \frac{1 - x^{N'_{\text{усл}}}}{1 - x^{N+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_0(x), \quad \gamma \geq \gamma_0 = 1 - \frac{1}{N+1}, \quad (5)$$

разрешаемого при данных $\gamma = \gamma_0$, N , $N'_{\text{усл}}$ относительно $x \in [0, 1]$, является нижней γ -доверительной границей для ВБР с $R > 0$ в одном испытании. Здесь при $N'_{\text{усл}} = 0$ полагаем $\underline{R}' = 0$.

Доказательство. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма. [1, утв. 7, с. 50, п. 1.3. Краткие сведения из математической статистики]. Пусть $F(x) = \mathbf{P}(L \leq x)$ — функция распределения дискретной величины L . Если случайная величина $\varepsilon \in [0, 1]$, а величины L и ε независимы, то

$$u = \varepsilon F(L) + (1 - \varepsilon)F(L - 1)$$

имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

Применим лемму для $L = N'_{\text{усл}}$. Получим, что величина

$$u = u(N'_{\text{усл}}, \varepsilon) = \varepsilon \frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}+1}}{1 - R^{N+1}} + (1 - \varepsilon) \frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}}}{1 - R^{N+1}}$$

имеет по лемме распределение равномерное на $[0, 1]$. Тогда $\mathbf{P}(u < \gamma) = \mathbf{P}(u \leq \gamma) = \gamma$. Заметим, что при любом фиксированном ε

$$u \in \left[\frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}}}{1 - R^{N+1}}; \frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}+1}}{1 - R^{N+1}} \right].$$

Следовательно, из того, что $u < \gamma$, следует, что $\frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}}}{1 - R^{N+1}} < \gamma$. Тогда имеем

$$\gamma = \mathbf{P}(u < \gamma) \leq \mathbf{P}\left(\gamma > \frac{1 - R^{N'_{\text{усл}}}}{1 - R^{N+1}}\right) = \mathbf{P}(\phi_0(R) < \gamma).$$

Функция $\phi_0(x)$, определенная в (5), непрерывна и убывает по $x \in [0, 1]$, если при $x = 1$ ее доопределить по непрерывности, полагая

$$\phi_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{N'_{\text{усл}}}}{1 - x^{N+1}} = \frac{N'_{\text{усл}}}{N+1}.$$

Так как $N'_{\text{усл}} \leq N$, то $\phi_0(1) \leq \frac{N}{N+1}$, и для $\gamma \geq \frac{N}{N+1}$ уравнение $\phi_0(R) = \gamma$ имеет единственное решение, которое обозначаем \underline{R}' .

Тогда \underline{R}' является нижней γ -доверительной границей для R при $\gamma \geq \frac{N}{N+1}$. Действительно, при таких γ получаем

$$\gamma \leq \mathbf{P}(\phi_0(R) < \gamma) = \mathbf{P}(R > \phi_0^{-1}(\gamma)) = \mathbf{P}(R > \underline{R}').$$

□

Теорема 2.17 доказана, но не для N' , а для $N'_{\text{усл}}$.

Далее в [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.18. *В условиях теоремы 2.17, но без ограничения на $\gamma \in [0, 1]$ наряду с \underline{R}' в качестве нижней γ -доверительной границы для R может быть использована статистика*

$$\underline{R}'' = (1 - \gamma)^{(1/N'_{\text{усл}})},$$

где при $N'_{\text{усл}} = 0$ полагаем $\underline{R}'' = 0$. Выполняется неравенство $\underline{R}'' \leq \underline{R}'$.

Доказательство. При $N'_{\text{усл}} = 0$ имеем $\underline{R}'' = 0$ по определению. Пусть теперь $N'_{\text{усл}} > 0$. Так как

$$\gamma = 1 - (\underline{R}'')^{N'_{\text{усл}}} \tag{6}$$

по определению \underline{R}'' и

$$\gamma = \phi_0(\underline{R}')$$

по определению \underline{R}' , то

$$\gamma \equiv 1 - (\underline{R}'')^{N'_{\text{усл}}} \equiv \phi_0(\underline{R}') \geq 1 - (\underline{R}')^{N'_{\text{усл}}},$$

что влечет выполнение $\underline{R}'' \leq \underline{R}'$. Тогда с учетом теоремы 2.17 получаем:

$$\gamma \leq \mathbf{P}(R > \underline{R}') \leq \mathbf{P}(R > \underline{R}'').$$

Доказательство Теоремы 2.18 завершено. □

В книге [1] составлена сравнительная таблица границ \underline{R}' (из Теоремы 2.17) и \underline{R}'' (из Теоремы 2.18), иллюстрирующая преимущества \underline{R}' перед \underline{R}'' . Приведем здесь эту таблицу. Таблица построена для $N = 9$ и $\gamma = \gamma_0 = 1 - 1/(N + 1) = 0,9$.

	N'	0	3	5	7	8	9
1	\underline{R}''	0	0,46	0,63	0,72	0,75	0,77
2	\underline{R}'	0	0,48	0,65	0,78	0,86	1

Как видим, результат строки 2 приведенной выше Таблицы настолько оптимистичен, что при $N = 9$ и $N' = 9$ (т.е. при девяти безотказных испытаниях) дает единичную нижнюю γ -доверительную границу для надежности при уровне доверия $\gamma = 0,9$. Результатов подобного рода не было ранее получено ни для одной схемы испытаний на надежность, пусть даже все эти испытания окончились безотказно.

Возникает два вопроса при рассмотрении строки 2 Таблицы. Первый вопрос: возможно ли получить результат аналогичный результату Теоремы 2.17 действительно для БПО, т.е. для N' ? Второй вопрос: если результаты Теоремы 2.17 не возможно получить для N' , то возможно ли спланировать испытания с достижением заданного $N'_{\text{усл}}$, сохранить при этом условие ограниченности числа испытываемых образцов и получить результаты, приведенные в строке 2 Таблицы?

Для ответа на первый вопрос применим лемму для $L = N'$, т.е. для случайной величины имеющей функцию распределения, заданную формулой (3). Получим, что величина

$$u = u(N', \varepsilon) = \varepsilon(1 - R^{N'+1}) + (1 - \varepsilon)(1 - R^{N'})$$

имеет равномерное распределение. Тогда в уравнении $\gamma = \phi_0(R)$ следует взять в этом случае $\phi_0(R) = 1 - R^{N'}$. Откуда решение $\underline{R}'(N')$ последнего уравнения есть $\underline{R}'(N') = (1 - \gamma)^{(1/N')}$ и совпадает с $\underline{R}''(N')$.

Вывод 2. Результаты, полученные в Теореме 2.17, не верны для величины N' , имеющей функцию распределения, заданную формулой (3), а значит, не верны для нейтральной схемы БПО. Для БПО верны лишь результаты Теоремы 2.18 с нижней доверительной границей $\underline{R}'' = (1 - \gamma)^{(1/N')}$, которой соответствует строка 1 Таблицы. Результаты строки 2 Таблицы не верны для БПО.

Для ответа на второй вопрос заметим, что в нашей формулировке Теорема 2.17 также не верна, хотя нами проведено, следуя Судакову, доказательство обеих теорем для функции распределения (4), задающей на самом деле функцию распределения случайной величины $N'_{\text{усл}}$. В нашей формулировке не верно, что в условиях проведения БПО случайная величина $N'_{\text{усл}}$ является наблюдаемой и значение ее может быть определено для решения уравнения (5). Действительно, если все N испытаний закончились без отказа, то $N' = N$, а $N'_{\text{усл}}$ не определено. Таким образом для того, чтобы получить $N'_{\text{усл}} = N$, необходимо провести такое число серий испытаний по $N + 1$ образцу, чтобы дожидаться серии в которой будет N безотказных испытаний и далее отказ ровно на $(N + 1)$ -м испытании.

Вывод 3. Испытания с $N'_{\text{усл}} = N$ для получения результатов, подобных результатам, приведенным в строке 2 Таблицы, просто нельзя спланировать при ограниченном количестве испытываемых образцов изделий.

Заключение. Проведенный анализ показывает, что в [1] неправильно определена функция распределения случайной величины, равной числу испытаний по биномиальному плану с остановкой (БПО). Истинная функция распределения величины такова, что для нее не может быть получено результатов, подобных доказываемых в [1]. План БПО не обладает теми преимуществами перед обычным биномиальным планом в смысле существенного уменьшения объема необходимых испытаний, которые объявлены в [1].

Список литературы

- [1] Судаков Р.С., Испытания технических систем. Выбор объемов и продолжительностей. М.: Машиностроение, 1988.
- [2] Надежность технических систем. Справочник. М.: Радио и связь, 1985.

Четырнадцатая Колмогоровская студенческая олимпиада по теории вероятностей

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись “н.о.р.” означает “независимые одинаково распределенные”.

Задача 1. Петя бросает монету до тех пор, пока не выпадут два герба подряд, а Федя независимо от него — до тех пор, пока не выпадет пара “герб, решка” (в таком порядке). Кому из них в среднем придется ждать меньше?

Задача 2. Пусть A и B — две симметричные вещественные матрицы порядка n , причем $\operatorname{tr} A > 0$ и $\operatorname{tr} B < 0$. Доказать, что существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, что $(Ax, x) > 0$ и $(Bx, x) < 0$.

Задача 3. Пусть случайный вектор (X_1^n, \dots, X_n^n) имеет равномерное распределение на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{nX_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет предел по распределению при $n \rightarrow \infty$, и найти его.

Задача 4. Рассматривается случайное блуждание $S_0 = 0$, и $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — н.о.р. случайные величины, $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) = p > 1/2$. Найти математическое ожидание числа нулей последовательности $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Задача 5. Имеется круглая поверхность стола (без ножек). Плотник случайным образом приделывает к ней $n > 3$ ножек (каждая прикрепляется в равномерно распределенной точке на границе круга, перпендикулярно его плоскости, независимо от расположения предыдущих ножек; все ножки одинаковой длины). Найти вероятность, что после этого стол можно будет поставить на пол.

Задача 6. Многоугольник в трехмерном пространстве проецируется на случайно выбранную плоскость (т.е. единичная нормаль к плоскости равномерно распределена на сфере). Найти математическое ожидание площади проекции, если S — площадь многоугольника.

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен на единичной сфере в \mathbb{R}^n , а случайная величина ξ — это его первая координата. Найти а) $E\xi^2$; б) $E\xi^4$.

Задача 8 (3-5). Назовем случайную величину X хорошей, если она имеет плотность p и эта плотность пропорциональна ее характеристической функции φ , т.е. существует $C > 0$ такое, что $p \equiv C\varphi$ (пример: $X \sim N(0, 1)$). Привести пример хорошей негауссовской случайной величины.

Задача 9. Пусть н.о.р. случайные величины X и Y симметричны и имеют конечную дисперсию, причем для любого $t > 0$ выполняется неравенство $P(|X + Y|/\sqrt{2} \geq t) \geq P(|X| \geq t)$. Доказать, что а) на самом деле неравенство всегда обращается в равенство; б) (3-5) эти случайные величины гауссовские.

Abstracts

Location of positive eigenvalues in the spectrum of the evolutionary operator for a branching random walk

Antonenko E.A., Ph.D. student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: eka.antonenko@gmail.com

Yarovaya E.B., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

We consider a continuous-time branching random walk with finite variance of jumps on a multidimensional lattice with a finite set of the particle generation sources. The structure of the positive discrete spectrum of the evolutionary operator for a branching random walk with finite variance of jumps is investigated.

Queueing systems with regenerative input flow

Afanasyeva L.G., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: afanas@mech.math.msu.su

The aim of this article is to demonstrate possibilities of the renewal theory techniques for asymptotic analysis of queueing models. The article is of the survey character. We begin by definition of regenerative flow and discussion of its properties. Then equivalence of the stability and stochastic boundedness for the broad class of processes describing queueing systems with regenerative flows is considered. Basing on the results obtained the ergodicity conditions for multichannel queueing system with heterogeneous servers are given. The next two problems under consideration are convergence rate in total variation to limit distribution and estimates for large deviations probabilities. Some examples are also given.

Asymptotic behaviour of some stochastic storage systems

Bulinskaya E.V., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: ebulinsk@yandex.ru

Sokolova A.I., student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: alun@mail.ru

The aim of the paper is investigation of a system with seasonal demand and/or replenishment of the stored product. It is supposed that the system is described by a generalized renewal process. We study several types of generalization of the simple renewal process widely used in various applications of probability theory. The strong law of large numbers and central limit theorem are proved for the processes under consideration as well as the analog of the elementary renewal theorem with estimation of convergence rate. The results are used for optimization of storage system performance.

Conditional bounds of risk measures in financial mathematics

Grigorieva M.A., student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: 011235813@inbox.ru

We found the bounds of risk measures VaR, CVaR and MINVaR for standardized random losses under some additional conditions.

Exponential utility maximization in a Lévy model

Ivanov M.Yu., researcher, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: m_y_ivanov@mail.ru

We consider the exponential utility maximization problem in an exponential Lévy model. Under certain restrictions on the set of wealth processes it is possible to apply to the main problem the same methods which were applied in logarithmic and power cases, and also avoid additional restrictions on the asset price process. We find the solution which belongs to the class of admissible strategies, and is not only approximated by a sequence of wealth processes like in many well-known papers. At the end of our work the dual problem is considered.

Intermittency and product of random matrices

Illarionov E.A., PhD student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: illarionov.ea@gmail.com

Sokoloff D.D., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: sokoloff.dd@gmail.com

Tutubalin V.N., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: vntutubalin@yandex.rum

Systematic elaboration of a phenomenon of intermittency, i.e. a progressive growth of higher statistical moments of a vector field in a random medium, has been initiated by Ya.B. Zeldovich in the context of astrophysical and magnetohydrodynamic problems. At that time the mathematical aspects underlying the physical description were still under development and connection between different problems was rather unclear. Contemporary results from the theory of the product of independent random matrices (the Furstenberg theory) give a new way of tackling of the phenomenon of intermittency. We consider several examples and discuss the approach to investigation of multiplicative random variables.

Optimization and limit distribution in a discrete insurance model

Karapetyan N.V., e-mail: karanar@mail.ru

Discrete time model of insurance company is considered. It is supposed that the company applies a dividend barrier strategy. The limit distribution for the time of ruin normalized by its expected value is found. We assume that shareholders cover the deficit at the time of ruin and investigate barrier strategies maximizing shareholders' dividends and profit accumulated until ruin. In case the additional capital is injected right after the ruin to enable infinite performance of the company, existence of optimal strategies is proved both for expected discounted dividends and net profit.

Extremes of dependent scores of particles in branching processes

Lebedev A.V., associate professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: avlebed@yandex.ru

We consider branching processes in which each particle has some random score with a given distribution. It is supposed that scores of particles are dependent and this dependence is associated with their kinship distance. We are interested in the asymptotic behavior of scores extremes in generations. The nondegenerate limit laws for maxima are established under linear normalizations.

Archimedean operations and copulas with applications to branching processes with interaction of particles

Lebedev A.V., associate professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: avlebed@yandex.ru

Generalized summation operations (commutative and associative binary operations) which are isomorphic to the addition are considered in this paper. We establish the correspondence between operations and strictly Archimedean copulas and their properties. The possibility of application to branching processes with competition-like interaction of particles is also investigated. We discuss the “Archimedeanity” concept applied to operations and copulas, as well as its possible extension to stochastic operations.

New models of transport flows dynamics

Lykov A.A., Ph.D., Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: alekslyk@yandex.ru

Malyshev V.A., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: 2malyshev@mail.ru

Melikian M.V., student, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: magaarm@list.ru

We find stability conditions of the one-dimensional car flow where motion of each car is determined only by the motion of the previous one.

On the two results of J. Uspensky and one result of C.-G. Esseen

Senatov V.V., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: v.senatov@yandex.ru

We discuss the J. Uspensky’s results obtained in 1937 that give asymptotic expansions with explicit estimates of residuals for binomial distributions. A simple consequence of one of them is the lower bound, obtained by Esseen in 1956, for the constant in the Berry–Esseen theorem. The Uspensky’s results are generalized to arbitrary lattice distribution and improved at the same time. It is shown how to change the statement of the problem of approximation accuracy in the CLT for lattice distributions to obtain estimates that are many times more accurate than that given by the Berry–Esseen theorem.

Graphical methods of exploratory data analysis

Chepurin E.V., associate professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: echepurin@mail.ru

Nifontova T.A., engineer, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU,
e-mail: ni.ta@bk.ru

This report is devoted to visual analysis methods of hypotheses testing about a distributional type for one-dimensional and multivariate data, both continuous and discrete. The testing is based on a CH-probability plots. A departure quantity of an estimated plot from the standard plot defined by a null hypothesis is considered as a test statistic.

On planning the scope of the control tests based on stopped binomial failure test scheme

Chistyakova N.V.,
senior scientific researcher, The Laboratory of Probability Theory,
Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU;
e-mail: nchist60@yandex.ru

In monograph “Technical Systems Testing. Evaluation Values and Durations” by R.S. Sudakov the Stopped Binomial Scheme (SBS) of failure test is determined. According to SBS no more than N identical prototypes are tested, but the trials are stopped after the first failure. The advisability (expediency) of such a scheme is substantiated by the possibility of sizeable reduction of the number of trials required for adjusting of prescribed level of reliability in comparison with the number of such trials required by BS. We investigate the possibility of using SBS to confirm the requirements on reliability of technical systems in case of failure-free tests.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
<i>Антоненко Е.А., Яровая Е.Б.</i> , Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании	9
<i>Афанасьева Л.Г.</i> , Системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком	23
<i>Булинская Е.В., Соколова А.И.</i> , Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения	37
<i>Григорьева М.А.</i> , Условные границы мер риска в финансовой математике	63
<i>Иванов М.Ю.</i> , Максимизация экспоненциальной полезности в модели Леви	83
<i>Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.</i> , Перемежаемость и произведение случайных матриц	94
<i>Карапетян Н.В.</i> , Оптимизация и предельное распределение в дискретной модели страхования	101
<i>Лебедев А.В.</i> , Экстремумы зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах ...	121
<i>Лебедев А.В.</i> , Архимедовы операции и копулы с приложениями к ветвящимся процессам со взаимодействием частиц	136
<i>Лыков А.А., Малышев В.А., Меликян М.В.</i> , Новые модели динамики транспортных потоков	148
<i>Сенатов В.В.</i> , О двух результатах Я. В. Успенского и одном результате К.-Г. Эссеена	158
<i>Чепурин Е.В., Нифонтова Т.А.</i> , Графические методы разведочного статистического анализа данных	178
<i>Чистякова Н.В.</i> , О планировании объемов контрольных испытаний по биномиальному плану с остановкой	194
Четырнадцатая Колмогоровская студенческая олимпиада по теории вероятностей ..	200
Abstracts	201

**Предыдущие выпуски серии
«Современные проблемы математики и механики»¹**

Том I. Прикладные исследования

Выпуск 1. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Выпуск 2. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Том II. Механика

Выпуск 1. Под редакцией Г.Г. Черного, В.П. Карликова.

Выпуск 2. Под редакцией Б.Е. Победри, Е.В. Ломакина.

Том III. Математика

Выпуск 1. Под редакцией Т.П. Лукашенко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. Геометрия и топология. Под редакцией А.Т. Фоменко.

Выпуск 3. Дискретная математика. Под редакцией О.М. Касим-Заде.

Том IV. Математика

Выпуск 1. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева.

Выпуск 2. Динамические системы. Под редакцией А.Т. Фоменко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. Алгебра и теория чисел. Под редакцией В.А. Артамонова, В.Н. Латышева, Ю.В. Нестеренко.

Том V. Математика

Выпуск 1. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.Н. Сергеева, А.С. Шамаева.

Выпуск 2. Прикладная математика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева, Г.М. Кобелькова.

Выпуск 3. Математическая кибернетика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева.

Том VI. Математика

Выпуск 1. К 105-летию С.М. Никольского. Под редакцией М.К. Потапова, И.Н. Сергеева, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

¹Сайт издания: <http://www.math.msu.su/sb80>

Том VII. Математика. Механика

Выпуск 1. К 190-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова, А.С. Кулешова.

Выпуск 2. Научные достижения кафедр к 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Под редакцией Е.И. Кугушева, Т.В. Поповой.

Том VIII. Математика

Выпуск 1. К 80-летию А.Г. Костюченко. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. В.В. Власов, Д.А. Медведев, Н.А. Раутиан.

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, к 130-летию Н.Н. Лузина, к 85-летию П.Л. Ульянова. Под редакцией А.Н. Бахвалова.

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева

Том IX. Математика

Выпуск 1. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Маломерная топология и комбинаторика в оригинальных задачах. Д.П. Ильютко, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Исследования по математическому анализу. Под редакцией Т.П. Лукашенко, Т.В. Родионова

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.В. Астаховой и И.Н. Сергеева

Том X. Математика

Выпуск 1. К 60-летию семинара «Тригонометрические и ортогональные ряды». Под редакцией В.М. Федорова

Выпуск 2. К 100-летию Лузинского семинара по теории функций. Под редакцией М.И. Дьяченко

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том X. Математика

Выпуск 3

Теория вероятностей и математическая статистика

К 80-летию кафедры теории вероятностей механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева

Подготовка оригинал-макета: А.В. Лебедев

Подписано в печать 15.05.2015

Формат 60 x 90/16. Печ. л. 13. Зак. № ИМ-34.

Отпечатано в ООО «Ленанд».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

Тираж 100 экз.