Лекция 4.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова.

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.
- Konakov V. Small time asymptotics in local limit theorems for Markov chains converging to diffusions. Prépublication PMA-1052, février 2006. (http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/93/36/PDF/C0045a.pdf).
- V. Konakov and E. Mammen. Edgeworth type expansions for Euler schemes for stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods Appl.*, 8–3:271–285, 2002.

Сформулируем основные предположения. Рассмотрим семейство плотностей $q_x(\cdot), x \in R^d$, удовлетворяющее следующим условиям:

A1. $\int_{R^d} z q_x(z)dz = 0, \int_{R^d} z_i z_j q_x(z)dz = a_{ij}(x), \forall x \in R^d, a = \sigma\sigma^*$.

A2. Условие равномерной эллиптичности:

$$0 < \underline{C} \le \theta^* a(x)\theta \le \bar{C} < \infty, \forall x \in R^d, \|\theta\| = 1.$$

A3. Существуют натуральное число $S = 2dS' + 4$ и функция $\psi(y), y \in R^d$, такие, что

$$\sup_{y\in R^d}\psi(y) < \infty, \int_{R^d} \|y\|^S \psi(y)dy < \infty,$$

$$\left|D_y^\nu q_x(y)\right| \le \psi(y), \forall (x,y) \in R^{2d}, |\nu| = 0,1,2,3,4.$$

$$|D_x^\nu q_x(y)| \le \psi(y), \forall (x,y) \in R^{2d}, |\nu| = 0,1,2.$$

B1. Функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ вместе с их производными до четвёртого порядка ограничены равномерно по x.

Напомним, что нам нужно оценить близость двух разложений:

$$p(1,x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}(\tilde p\otimes H^{(r)})(1,x,y), \qquad (1)$$

и

$$p_n(1,x,y)=\sum_{r=0}^{n}\tilde p_n\otimes_n H_n^{(r)}\,(1,x,y). \qquad (2)$$

Оценим сначала «хвост» ряда (1). Для этого воспользуемся оценкой (4) Лекции 3:

$$\left|\tilde p\otimes H^{(r)}(1,x,y)\right|\le\frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}p_c(1,x,y), \qquad (3)$$

где

$$p_c(t-s,x,y)=\left(\frac{c}{2\pi(t-s)}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{c|y-x|^2}{t-s}\right).$$

Для ряда (2) справедлив следующий аналог оценки (3), доказанный в статье V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.11):

Лемма 4. *Имеет место следующая оценка*

$$\left|\tilde p_n\otimes_n H_n^{(r)}(1,x,y)\right|\le\frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}\zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \qquad (4)$$

где $\zeta_k(u)=\frac{1}{1+\|u\|^k}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема A. *Пусть выполнены условия **A1-A3** и **B1**. Тогда при* $n\to\infty$ *справедлива следующая оценка*

$$\sup_{x,y\in R^d}\left(1+\|y-x\|^{2S'-2}\right)|p(1,x,y)-p_n(1,x,y)|=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Сформулируем сразу одну задачу. Для решения первой её части достаточно, по-видимому, воспроизвести, с некоторыми уточнениями, доказательство Теоремы А. Решение второй части этой задачи мне неизвестно.

Задача 2*.

1. Пусть семейство плотностей зависит ещё и от шага разбиения: $q_x(\cdot)=q_x^{(n)}(\cdot)$, условия **A2** и **A3** выполнены равномерно по n, а вместо условия **A1** потребуем

$$\int_{R^d} zq_x^{(n)}(z)dz = m^{(n)}(x), \int_{R^d} z_i z_j q_x^{(n)}(z)dz = a_{ij}^{(n)}(x),$$

причём

$$m^{(n)}(x) \to m(x), \qquad a_{ij}^{(n)}(x) \to a_{ij}(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказать, что утверждение сформулированной выше теоремы остаётся верным.

2. Как можно усилить неравномерную оценку скорости сходимости в Теореме А, если дополнительно предположить, что у функции $\psi(y)$ существует конечный экспоненциальный момент:

$$\exists\lambda > 0 \text{ такое, что } \int_{R^d} \exp(\lambda\|y\|)\psi(y)dy < \infty\,?$$

Доказательство теоремы. Доказательство разобьем на шесть этапов (шагов).

Шаг 1. Контроль «хвоста» разложения (1).

Воспользуемся известным разложением гамма функции при больших значениях её аргумента

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\big(-x + \mu(x)\big), \mu(x) = \frac{\theta}{12x}, 0 < \theta < 1. \quad (5)$$

Используя оценку (3) и разложение (5), получим, что при достаточно больших n

$$\sum_{r=n}^{\infty}(\tilde{p} \otimes H^{(r)})(1, x, y) = O(\exp(-n))p_c(1, x, y). \quad (6)$$

Следующий шаг состоит в сравнении двух рядов

$$\sum_{r=0}^{n}(\tilde{p} \otimes H^{(r)})(1, x, y)$$

и

$$\sum_{r=0}^{n}(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1, x, y).$$

То есть надо оценить ошибку, возникающую при замене интегралов их римановыми суммами.

Шаг 2. Контроль ошибки при переходе от $\otimes$ к $\otimes_n$.

Имеет место очевидное тождество для $r = 1,2,3,...$

$$\left(\tilde{p} \otimes H^{(r)}\right)\left(\frac{j}{n},x,y\right) - \left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right)\left(\frac{j}{n},x,y\right) =$$

$$[\left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) \otimes H - \left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) \otimes_n H]\left(\frac{j}{n},x,y\right) +$$

$$\left[\left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) - \left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r-1)}\right)\right] \otimes_n H\left(\frac{j}{n},x,y\right).$$

Суммируя эти тождества по r от $r = 1$ до $r = \infty$ и, учитывая линейность операций $\otimes$ и $\otimes_n$, получим

$$(p - p^d)\left(\frac{j}{n},x,y\right) = [(p \otimes H) - (p \otimes_n H)]\left(\frac{j}{n},x,y\right) +$$
$$(p - p^d) \otimes_n H\left(\frac{j}{n},x,y\right), \qquad (7)$$

где

$$p^d\left(\frac{j' - j}{n},x,y\right) = \sum_{r=0}^{\infty}(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})\left(\frac{j' - j}{n},x,y\right).$$

Итерируя равенство (7), получим

$$(p - p^d)\left(\frac{j}{n},x,y\right) = [(p \otimes H) - (p \otimes_n H)]\left(\frac{j}{n},x,y\right) +$$
$$[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)] \otimes_n \Phi\left(\frac{j}{n},x,y\right), \qquad (8)$$

где

$$\Phi\left(\frac{j' - j}{n},x,y\right) = \sum_{r=1}^{\infty} H^{(r)}\left(\frac{j' - j}{n},x,y\right).$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части (8). Обозначим

$$\lambda_u(z) = p(u,x,z)H\left(\frac{j}{n} - u,z,y\right).$$

Тогда, разлагая в ряд Тейлора по u, получим

$$[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)]\left(\frac{j}{n},x,y\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n} du\int_{R^d}\left[\lambda_u(z)-\lambda_{i/n}(z)\right]dz$$
$$=\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)du\int_{R^d}\lambda'_{\frac{i}{n}}(z)dz$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int_0^1(1-\delta)\int_{R^d}\lambda''_s(z)|_{s=s_i}dz\,d\delta du, \tag{9}$$

где $s_i=\frac{i}{n}+\delta\left(u-\frac{i}{n}\right)$. Заметим, что

$$\int_{R^d}\lambda'_{\frac{i}{n}}(z)dz=\int_{R^d}\frac{\partial}{\partial u}\left[p(u,x,z)H\left(\frac{j}{n}-u,z,y\right)\right]_{u=i/n}dz=$$

$$\int_{R^d}\frac{\partial}{\partial u}[p(u,x,z)]_{u=i/n}H\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)$$
$$+p\left(\frac{i}{n},x,z\right)\frac{\partial}{\partial u}\left[H\left(\frac{j}{n}-u,z,y\right)\right]_{u=\frac{i}{n}}dz=$$

$$\int_{R^d}L_z^*p(i/n,x,z)\left(L-\tilde{L}\right)\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)dz$$
$$-\int_{R^d}p(i/n,x,z)\left(L-\tilde{L}\right)\tilde{L}\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)dz=$$

$$\int_{R^d}p\left(\frac{i}{n},x,z\right)\left(L^2-2L\tilde{L}+\tilde{L}^2\right)\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)dz. \tag{10}$$

Обозначим

$$A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\left(L^2-2L\tilde{L}+\tilde{L}^2\right)\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right).$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{j-1}\int\limits_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)du\int\limits_{R^d}\lambda'_{\frac{i}{n}}(z)dz=\frac{1}{2n}p\otimes_n A_0\left(\frac{j}{n},x,y\right).\qquad(11)$$

Прямой подсчёт даёт следующее выражение для $A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$

$$A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\frac{1}{4}\sum_{p,q,r,l=1}^{d}\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(\sigma_{rl}(z)-\sigma_{rl}(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^4\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p\partial z_q\partial z_r\partial z_l}+\sum_{p,q,r=1}^{d}\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(b_r(z)-b_r(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p\partial z_q\partial z_r}+\sum\nolimits_{p,q,r,l=1}^{d}\frac{\sigma_{pq}}{2}\frac{\partial\sigma_{rl}(z)}{\partial z_p}\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_q\partial z_r\partial z_l}+(\leq 2),$$

$$(12)$$

где через (≤ 2) обозначена сумма членов, содержащих производные $\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ по z не выше второго порядка. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon, 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2n}\left|p\otimes_n A_0\left(\frac{j}{n},x,y\right)\right|\leq C(\varepsilon)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot j^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\cdot p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right).\qquad(13)$$

В самом деле, (13) следует из (12), известных оценок для производных гауссовской плотности $\tilde{p}$, условия **B1** и следующей оценки, справедливой при фиксированных q,r,l

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{n}\left|\int_{R^d}p(\frac{i}{n},x,z)\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)}{\partial z_q\partial z_r\partial z_l}dz\right|\leq$$

$$Cn^{-1/2}j^{-3/2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)+$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n}\left|\int_{R^d}\frac{\partial p(\frac{i}{n},x,z)}{\partial z_q}\frac{\partial^2\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)}{\partial z_r\partial z_l}dz\right|\le$$

$$Cn^{-1/2}j^{-3/2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)+$$

$$Cn^{-(1-\varepsilon)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{i/n}}\times\frac{1}{(\frac{j-i}{n})^{1-\varepsilon}}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)$$

$$\le C(\varepsilon)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot j^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\cdot p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right).$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (9). Запишем выражение для второй производной по s функции $\lambda_s(z)$

$$\lambda''_s(z)=\frac{\partial^2 p(s,x,z)}{\partial s^2}H\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)+2\frac{\partial p(s,x,z)}{\partial s}\frac{\partial H\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial s}$$

$$+p(s,x,z)\frac{\partial^2 H(\frac{j}{n}-s,z,y)}{\partial s^2}. \qquad (14)$$

Используя прямое и обратное уравнение Колмогорова, получим из (14) после несложных вычислений

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int_0^1(1-\delta)\int_{R^d}\lambda''_s(z)|_{s=s_i}dz=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int_0^1(1-\delta)$$

$$\times\int_{R^d}p(s,x,z)A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)|_{s=s_i}dzd\delta du, \qquad (15)$$

где

$$A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\left(L^3-3L^2\tilde{L}+3L\tilde{L}^2-\tilde{L}^3\right)\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right).$$

Очевидно, $A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ является дифференциальным оператором шестого порядка. Несложные, но длинные вычисления приводят к следующей формуле для $A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$

$$A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\frac{1}{8}\sum_{i,j,p,q,l,r=1}^{d}\left(\sigma_{ij}(z)-\sigma_{ij}(y)\right)\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)$$

$$\times\left(\sigma_{lr}(z)-\sigma_{lr}(y)\right)\frac{\partial^6\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l\partial z_r}+$$

$$+\frac{3}{4}\sum_{i,j,p,q,l=1}^{d}\left(\sigma_{ij}(z)-\sigma_{ij}(y)\right)\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(b_l(z)-b_l(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^5\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l}+\frac{3}{4}\sum_{i,j,p,q,l,r=1}^{d}\sigma_{ij}(z)\frac{\partial\sigma_{pq}(z)}{\partial z_i}\left(\sigma_{lr}(z)-\sigma_{lr}(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^5\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l\partial z_r}+\ (\leq 4), \qquad (16)$$

где через (≤ 4) обозначена сумма членов, содержащих производные $\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ не выше четвёртого порядка. Из условия **B1** на коэффициенты σ_{ij} и m_i и (16) следует, что оценка сверху для левой части (15) будет, с точностью до константы, такая же, как и для следующей суммы при фиксированных p,q,l,r

$$\left|\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int_0^1(1-\delta)\right.$$

$$\left.\times\int_{R^d}\left[p(s,x,z)\frac{\partial^4\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p\partial z_q\partial z_l\partial z_r}\right]|_{s=s_i}dzd\delta du\right|. \qquad (17)$$

Интегрируя по частям относительно z_p, и, произведя подстановку $\frac{w}{n}=u-\frac{i}{n}$, получим, что сумма в (17) равна

$$\left|\sum_{i=0}^{j-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int_0^1(1-\delta)\right.$$

$$\left.\times\int_{R^d}\left[\frac{\partial p(s,x,z)}{\partial z_p}\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_q\partial z_l\partial z_r}\right]|_{s=s_i}dzd\delta du,\right|$$

$$\leq Cn^{-2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)\int_0^1 w^2\int_0^1(1-\delta)$$

$$\sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left[\frac{i}{n}+\frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}}\times\frac{1}{\left[\frac{j-i}{n}-\frac{\delta w}{n}\right]^{3/2}}d\delta dw$$

$$\leq\frac{C}{n}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\int_0^1 w^{3/2}dw+$$

$$Cn^{-2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)\int_0^1 w^2\int_0^1(1-\delta)\times$$

$$\sum_{i=1}^{j-2}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left[\frac{i}{n}+\frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}}\times\frac{1}{\left[\frac{j-i}{n}-\frac{\delta w}{n}\right]^{3/2}}d\delta dw$$

$$\leq \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \int_0^1 w^2 \int_0^1 (1-\delta)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

$$\sum_{i=1}^{j-2} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left[\frac{i}{n} + \frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}} \times \frac{1}{\left[\frac{j-i}{n} - \frac{\delta w}{n}\right]^{1-\varepsilon}} d\delta dw$$

$$\leq \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \int_0^1 (1-\delta)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} d\delta \int_0^1 w^2 dw$$

$$\times \int_0^{\frac{j}{n}} \frac{t^{-1/2} dt}{\left[\frac{j}{n} - t\right]^{1-\varepsilon}}$$

$$\leq \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-1} B\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \leq \frac{C(\varepsilon)}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right).$$

(18)

Из (9), (13) и (18) следует, что

$$\left|[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)]\left(\frac{j}{n}, x, y\right)\right| \leq Cn^{-1/2} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right).$$

(19)

Далее, для ядра $\Phi\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=1}^{\infty} H^{(r)}\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right)$ в в статье V. Konakov and E. Mammen (2002) получена оценка

$$\left|\Phi\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{\frac{j'-j}{n}}} p_c\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right). \quad (20)$$

Из (8), (19) и (20) получим

$$|[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)] \otimes_n \Phi(1, x, y)| \leq C(\varepsilon) n^{-1/2} p_c(1, x, y),$$

$$\left|(p - p^d)(1, x, y)\right| \leq Cn^{-1/2} p_c(1, x, y). \quad (21)$$

Задача 3. Доказать, что при $r = 0,1,2, \dots n$ справедливы неравенства

$$\left|\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)\right| \leq \frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)} p_c(1,x,y).$$

Вывести отсюда оценки

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)\right| \leq C p_c(1,x,y),$$

$$\left|\sum_{r=n}^{\infty} (\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1,x,y)\right| \leq C\exp(-n)\, p_c(1,x,y).$$

где константа C не зависит от n, x и y.