Лекция 2.
Построение фундаментального решения методом Е.Е. Леви.

Литература:

- А.М.Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи мат. наук, т. XVII, вып. 3 (105), с. 3-146, 1962.
- A. Friedman. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964.

В этой лекции мы опишем основные этапы метода параметрикса в том виде, как он изложен в статье А. М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник (1962). Следует отметить, что обозначения этой статьи и некоторые операторы, введённые в ней, несколько отличаются от тех, которые мы будем использовать в дальнейшем. Различия касаются определения прямого и сопряжённого операторов (они «меняются местами», см. уравнения (1) и (2) ниже) и точки, в которой «замораживаются» коэффициенты. У нас это будет «конечная» точка (t, y), а в статье А.М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник – это «начальная» точка (s, x). Все эти различия не носят принципиального характера, мы сохраняем обозначения статьи для удобства читателя.

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial t} = L_y p = \sum_{i,j} a_{ij}(t,y)\frac{\partial^2 p(s,t,x,y)}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_i b_i(t,y)\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial y_i} \qquad (1)$$

и

$$-\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial s} = L_x^* p = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 [a_{ij}(s,x)p(s,t,x,y)]}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i \frac{\partial [b_i(s,x)p(s,t,x,y)]}{\partial x_i} \qquad (2)$$

Теорема 4. *Пусть все коэффициенты уравнения (1) ограничены и непрерывны в* $\overline{H} = \{0 \le t \le T, y \in R^d\}$ *по совокупности переменных* (t, y) *и удовлетворяют условию Гёльдера по y:*

$$\left|a_{ij}(t, y') - a_{ij}(t, y)\right| \le M|y' - y|^{\alpha},$$

$$|b_i(t, y') - b_i(t, y)| \le M|y' - y|^{\alpha},$$

Пусть, кроме того, коэффициенты a_{ij} *в* $\overline{H}$ *удовлетворяют условию Гёльдера по* t:

$$\left|a_{ij}(t', y) - a_{ij}(t, y)\right| \le M|t' - t|^{\alpha}.$$

Предположим также, что выполнено условие равномерной эллиптичности:

$$\underline{\mu}\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,(t, y)\theta_i\theta_j \le \bar{\mu}\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2.$$

При этих предположениях существует единственное фундаментальное решение $p(s, t, x, y)$ *уравнения (1) в слое* $H = \{0 < t \le T, x \in R^d\}$.

Для $p(s, t, x, y)$ *справедливы оценки:*

$$|p(s, t, x, y)| \le M(t - s)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial p(s, t, x, y)}{\partial x_i}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(s, t, x, y)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+2}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(s, t, x, y)}{\partial t}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+2}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

где M *и* μ_1 *- положительные постоянные. Функция* $p(s, t, x, y)$ *положительна всюду при* $t > s$. *Если в* $\overline{H} = \{0 \le t \le T, x \in R^d\}$ *существуют ограниченные и непрерывные производные* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \frac{\partial b_i}{\partial y}$ *, удовлетворяющие условию Гёльдера по y,*
то $p(s, t, x, y)$ *как функция переменных* s, x *при* $t > s$ *удовлетворяет уравнению (2), сопряжённому к (1).*

Доказательство. Подробное доказательство довольно длинно (стр. 69-83 статьи А.М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник) . Мы укажем только основные этапы доказательства.

Шаг 1. Будем искать фундаментальное решение в виде:

$$p(s,t,x,y) = \tilde{p}(s,t,x,y) + \int_s^t d\tau \int_{R^d} \tilde{p}(\tau,t,z,y)\Phi(s,\tau,x,z)dz \qquad (3)$$

где функция $\tilde{p}(s,t,x,y)$ задана соотношением

$$\tilde{p}(s,\tau,x,z) = [4\pi(\tau-s)]^{-\frac{d}{2}}(\det\|a_{ij}\ (s,x)\ \|)^{-1/2}$$

$$\exp\left(-\frac{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^{-1}(s,x)(z_i-x_i)\left(z_j-x_j\right)}{4(\tau-s)}\right).$$

Отметим ещё раз, что у «замороженной» гауссовской плотности заморозка производится в «начальной» точке (s,x). Ядро $\Phi(s,\tau,x,z)$ подлежит определению. Предполагается, что ядро $\Phi(s,\tau,x,z)$ непрерывно по совокупности переменных при $\tau > s$ и при любых x,z допускает оценку

$$|\Phi(s,\tau,x,z)| < M(\tau-s)^{-\frac{d}{2}-1+\lambda_1}\exp\left(-\frac{\mu_2|z-x|^2}{\tau-s}\right), \qquad (4)$$

где $\lambda_1 > 0, \mu_2 > 0$. Предполагается также, что при $|y'-y|^2 < a(t-\tau)$, где $a > 0$, справедлива оценка

$$|\Phi(\tau,t,z,y') - \Phi(\tau,t,z,y)| \le M|y'-y|^{\lambda_2}(t-\tau)^{-\frac{d}{2}-1+\lambda_3}$$
$$\times\exp\left(-\frac{\mu_3|y-z|^2}{t-\tau}\right), \qquad (5)$$

где $\lambda_i > 0, \mu_3 > 0,\ i = 2,3$. В предположениях (4) и (5) доказывается, что функция $V(s,t,x,y)$, задающая несобственный интеграл в (3)

$$V(s,t,x,y) = \int_s^t d\tau \int_{R^d} \tilde{p}(\tau,t,z,y)\Phi(s,\tau,x,z)dz$$

непрерывна по совокупности аргументов и обладает непрерывными частными производными

$\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y}$, $i, j = 1,2, \dots, d,$ при $t > s$. Для всех упомянутых частных производных получены явные выражения.

Шаг 2. Для того, чтобы $\left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) p = 0$ необходимо, чтобы искомая функция Ф удовлетворяла следующему интегральному уравнению

$$\Phi(s,t,x,y) = \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(s,t,x,y) + \int_s^t d\tau \int_{R^d} \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(\tau,t,z,y) \Phi(s,\tau,x,z) dz \tag{6}$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\Phi(s,t,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(s,t,x,y), \tag{7}$$

где

$$\Phi_1(s,t,x,y) = \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(s,t,x,y),$$

$$\Phi_{m+1}(s,t,x,y) = \int_s^t d\tau \int_{R^d} \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(\tau,t,z,y) \Phi_m(s,\tau,x,z) dz.$$

Заметим, что $\Phi_1(s,t,x,y) = \sum_{i,j=1}^{d} \left[a_{ij}(t,y) - a_{ij}(s,x)\right] \frac{\partial^2 \tilde{p}(s,t,x,y)}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,y) \frac{\partial \tilde{p}(s,t,x,y)}{\partial y_i}$.

Шаг 3. Индукцией по m нетрудно доказать, что ряд (7) быстро сходится к решению интегрального уравнения (6), причём сходимость равномерна в любой области вида $\{t - s \geq \delta, x \in R^d, y \in R^d, \delta > 0\}$. Более того, имеет место оценка

$$|\Phi_m(s,t,x,y)| \leq M^m \frac{\Gamma^m(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} (t-s)^{m\alpha - \frac{d}{2} - 1} \exp\left(-\frac{\mu_4 |y-x|^2}{t-s}\right), \tag{8}$$

m=1,2,… Далее, используя свойства гёльдеровости коэффициентов a_{ij} u b_i можно показать, что сумма ряда $\Phi(s,t,x,y)$ действительно удовлетворяет неравенствам (4) и (5) и, таким образом, функция $p(s,t,x,y)$ в (3) при $t > s$ непрерывна по совокупности аргументов вместе с первыми и вторыми производными по x и

$$\left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) p(s,t,x,y) = 0.$$

Остальные свойства фундаментального решения для построенной функции $p(s,t,x,y)$ следуют из представления (3) и того, что они выполнены для функции $\tilde{p}(s,t,x,y)$. Гауссовские оценки для $p(s,t,x,y)$ и её производных следуют из соответствующих оценок для $\tilde{p}(s,t,x,y)$ и неравенств (8).

Шаг 4. Положительность и единственность $p(s,t,x,y)$ следует из свойств решений задачи Коши. Здесь используется то, что функция

$$u(s,x) = \int_{R^d} p(s,t,x,y)\varphi(y)dy$$

является ограниченным решением задачи Коши для уравнения

$$\left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0$$

в слое $H_s = \{0 \le s < t \le T, x \in R^d\}$ с «конечным» условием $u(t_-,x) = \varphi(x)$, где $\varphi(x) -$ произвольная непрерывная финитная функция. Наконец, то, что $p(s,t,x,y)$ по переменным s,x удовлетворяет сопряжённому уравнению (2), доказывается также как и в работе А. М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник, стр. 82-83. Мы видим, что доказательство теоремы довольно сложно и длинно, и неясно, как получить дискретный аналог, адаптированный к задаче аппроксимации цепей Маркова.