Лекция 10. Стохастический аналог конечномерной линейной управляемой системы. Нижняя граница для переходной плотности, метод цепочки (chaining method).

Литература:

- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- J.-M. Coron. Control and nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, 136, AMS, 2007.
- R. Bass. Diffusion processes and Elliptic Operators. Springer. 1997.

Для фиксированного начального значения $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in (R^d)^2$ и функции $\varphi \in L^2\left((0,T); R^d\right)$ рассмотрим линейную детерминированную систему с управлением

$$\dot{\boldsymbol{S}}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{S}_t + B\Sigma_t \varphi_t, \ \ S_0 = x \qquad (1)$$

Решение при заданной φ_t будем обозначать $S_t(\varphi)$. В уравнении (1) предполагается, что $\boldsymbol{L}_t$ – измеримое, $\mathcal{M}_{2d}(R)$ - значное семейство, Σ_t - измеримое, $\mathcal{M}_d(R)$ - значное семейство (напомним, что $\mathcal{M}_k(R)$ - множество $k \times k$ матриц с вещественными коэффициентами). $2d \times 2d$ матрица $\boldsymbol{L}_t$ состоит из четырёх $d \times d$ блоков и имеет вид

$$\boldsymbol{L}_t = \begin{pmatrix} [L_t]_{1,1} & [L_t]_{1,2} \\ \alpha_t^1 & [L_t]_{2,2} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

$(\boldsymbol{A}^{linear})$: Будем предполагать, что элементы $\boldsymbol{L}_t$ ограничены константой κ, а детерминант $d \times d$ матрицы α_t^1 положителен для всех $t \in [0,T]$. Относительно $d \times d$ матрицы Σ_t предположим, что спектр матрицы $A_t = \Sigma_t {\Sigma_t}^*$ содержится в $\left[\Lambda^{-1}, \Lambda\right], \Lambda \geq 1,$ для всех $t \in [0,T]$.

Стохастическим аналогом системы (1) является система

$$d\boldsymbol{G}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{G}_t dt + B\Sigma_t dW_t, t \in [0,T]. \qquad (3)$$

Пусть $\boldsymbol{K}_t$ - ковариационная матрица гауссовского процесса $\boldsymbol{G}_t$.

Предложение 6. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{A}^{linear})$. *Тогда детерминированная система (1) допускает управление (см.*

Определение 15 Лекции 9) и матрица $\boldsymbol{K}_t$ *невырождена. В этом случае гауссовская плотность вектора* $\boldsymbol{G}_T$ *с начальным условием* $\boldsymbol{G}_0 = x$ *и конечным условием* $\boldsymbol{G}_T = y$ *имеет вид*

$$q(0,T,x,y) = (2\pi)^{-d} det^{-1/2}(\boldsymbol{K}_T) exp\left(-\frac{I_{linear}(T,x,y)}{2}\right),$$

где

$$I_{linear}(T,x,y) = \inf\left\{\int_0^T |\varphi_t|^2 dt\right\}: S_0(\varphi) = x, S_T(\varphi) = y\} = \langle \mathcal{R}(T,0)x - y, \boldsymbol{K}_T^{-1}[\mathcal{R}(T,0)x - y]\rangle \qquad (4)$$

(здесь $\mathcal{R}$ *- резольвента линейной системы* $\dot{\boldsymbol{S}}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{S}_t$*).*

Доказательство Предложения 6 содержится в работе F. Delarue и S. Menozzi (2010, Предложение 3.1). Заметим только, что $\boldsymbol{K}_T$ совпадает с матрицей Грама $\mathfrak{C}_T$ системы (1) и равенство (4) является следствием Предложения 5 (формула (17)) и Замечания 5 Лекции 9.

Определение 18. *Скажем, что гауссовский процесс* $(\boldsymbol{G}_t)_{0\le t\le T}$ *удовлетворяет свойству GSP (good scaling property) с параметром* $c \ge 1$, *если для всех* $t \in [0,T]$, *для ковариационной матрицы* $\boldsymbol{K}_t$ *выполнено двойное неравенство*

$$c^{-1}t^{-1}|\mathbb{T}_t x|^2 \le \langle \boldsymbol{K}_t x, x\rangle \le c t^{-1}|\mathbb{T}_t x|^2$$

для всех $x \in R^{2d}$.

Предложение 7. *Пусть выполнено условие* $(\boldsymbol{A}^{linear})$, *и для всех* $t \in [0,T]$, α_t^1 *принадлежит замкнутому выпуклому в пространстве* $GL_d(R)$ *множеству* $\mathcal{E}$. *Тогда найдётся постоянная* $c \ge 1$, *зависящая только от* $\mathcal{E}, \kappa, \Lambda, T$, *такая, что* $(\boldsymbol{G}_t)_{0\le t\le T}$ *удовлетворяет свойству GSP с параметром* c.

Доказательство. Предположим сначала, что $T = 1$. Из представления решения (3) в виде

$$\boldsymbol{G}_t = \mathcal{R}(t,0)\boldsymbol{x} + \int_0^t \mathcal{R}(t,s)B\Sigma_s dW_s$$

получим, что

$$\boldsymbol{K}_t = \int_0^t \mathcal{R}(t,s)BA_sB^*[\mathcal{R}(t,s)]^* ds \qquad (5)$$

и, следовательно, без ограничения общности можно считать, что A_t - единичная матрица для всех $t \in [0,1]$. Определим $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ как множество отображений $t \in [0,1] \to \boldsymbol{L}_t$, где матрица $\boldsymbol{L}_t$ определена в (2) и удовлетворяет условиям Предложения 7. Нетрудно видеть, что для каждого фиксированного t_0, отображение $\boldsymbol{L}: L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R)) \to \mathcal{R}(t_0,\cdot) \in C([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ является непрерывным, если гильбертово пространство $L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ снабдить топологией слабой сходимости, а пространство $C([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ - топологией равномерной сходимости. Из представления (5) следует также (надо рассмотреть композицию двух отображений), что отображение $\boldsymbol{L}: L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R)) \to \boldsymbol{K}_1 \in \mathcal{M}_{2d}(R)$ непрерывно. Согласно Предложению 6, $\det \boldsymbol{K}_1 > 0$ для любого $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$. Если $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ - компактное подмножество $L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$, снабжённого топологией слабой сходимости, то $\exists \gamma \in [0,1]$ такое, что $\inf\{\det(\boldsymbol{K}_1), \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}\} \geq \gamma$ и $\sup\{\|\boldsymbol{K}_1\|, \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}\} \leq \gamma^{-1}$, то есть спектр матрицы $\boldsymbol{K}_1$ ограничен сверху и снизу равномерно по $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$\exists c \geq 1\,, c^{-1}|x|^2 \leq \langle \boldsymbol{K}_1 x, x \rangle \leq c|x|^2 \tag{6}$$

Для всех $x \in R^{2d}$. То, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ является компактом в слабой топологии, следует из того, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ограничено и замкнуто (даже в сильной топологии). Общий случай $\boldsymbol{K}_t, t \in (0,1)$ следует из свойства подобия системы, которое надо применить к случаю линейной системы (3) (мы рассмотрели это свойство выше для общей системы (2) Лекции 9). Следует перейти к гауссовскому процессу $\hat{G}_s^t = t^{1/2}\mathbb{T}_t^{-1} G_{st}, s \in [0,1]$, и применить (6). Подробности оставляем читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим теперь *нелинейную* управляемую систему, соответствующую СДУ (2) Лекции 9 и задачу нахождения оптимального управления

$$I(T_0, x_0, y_0) = inf\left\{\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \colon \varphi_0 = x_0,\ \ \varphi_T = y_0\right\},$$

где

$$\dot{\phi}_t = \boldsymbol{F}(\phi_t) + B\varphi_t, 0 \leq t \leq T, \phi_0 = x_0. \tag{7}$$

В следующих двух предложениях мы докажем, что $I(T, x_0, y_0)$ имеет тот же порядок, что и $T|\mathbb{T}_T^{-1}(\theta_T(x_0) - y_0)|^2$. Сначала мы найдём нижнюю границу для $\big(I(t,\cdot,\cdot)\big)_{0\le t\le T}$.

Предложение 8. *Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND**-η) *и T такая, что для любого* $0 < t \le T$, *для всех $x, y \in R^{2d}$*

$$I(t, x, y) \ge Ct|\mathbb{T}_t^{-1}(\theta_t(x) - y)|^2.$$

Доказательство. Напомним, что $\boldsymbol{\theta}_t(x)$ является решением системы

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_t), \boldsymbol{\theta}_0 = x.$$

Фиксируем $t \in (0, T]$ и $x \in R^{2d}$, линеаризуем систему и рассмотрим управление $\varphi \in L^2([0, T], R^d)$ вместе с соответствующим этому управлению решением ϕ, $\phi_0 = x$. Имеем

$$\dot{\phi}_s - \dot{\boldsymbol{\theta}}_s(x) = \boldsymbol{L}_s\big(\phi_s - \boldsymbol{\theta}_s(x)\big) + B\varphi_s, 0 \le s \le t, \qquad (8)$$

где

$$\boldsymbol{L}_s = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{D_x F}\Big(\boldsymbol{\theta}_s(x) + \lambda\big(\phi_s - \boldsymbol{\theta}_s(x)\big)\Big)\, d\lambda \in \mathcal{M}_{2d}(R)$$

и $\boldsymbol{D_x F}$ – матрица пространственных производных вектора $\boldsymbol{F} \in R^{2d}$. Матрица $\boldsymbol{D_x F}$ имеет вид (2), где, согласно условиям $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), все элементы блоков ограничены, а блок $\alpha_t^1 \in \mathcal{E}$. Мы можем рассматривать, таким образом, линейную систему (8) как линейную управляемую систему с начальным условием $\mathbf{0}$ и конечным условием $\phi_t - \boldsymbol{\theta}_t(x)$. Из Предложений 6 и 7 (с $\Sigma_t \equiv I_d$ *в* (1)) следует, что

$$\int_0^t |\varphi_s|^2 ds \ \ge Ct|\mathbb{T}_t^{-1}[\phi_t - \boldsymbol{\theta}_t(x)]|^2.$$

Найдём теперь верхнюю границу для $\big(I(t,\cdot,\cdot)\big)_{0\le t\le T}$.

Предложение 9. *Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η) *и T, такая, что для любого* $0 < t \le T$, *для всех $x, y \in R^{2d}$ существует управление* $(\varphi_s)_{0\le s\le t} \in R^d$ *со следующими свойствами:*

1. $\sup_{0\le s\le t}|\varphi_s|^2 \le C|\mathbb{T}_t^{-1}[\boldsymbol{\theta}_t(x) - y]|^2$.

2. *Решение* $(\phi_s)_{0\le s\le t}$, *соответствующее этому управлению* $(\varphi_s)_{0\le s\le t}$, *с начальным условием* $\phi_0 = x$, *достигает* y *в момент t, то есть* $\phi_t = y$.

В частности,

$$I(t,x,y) < Ct|\mathbb{T}_t^{-1}(\theta_t(x) - y)|^2.$$

Доказательство. Фиксируем $t \in (0,T]$ и $x, y \in R^{2d}$. Мы ищем путь $(\phi_s)_{0\le s\le t}$, соответствующий управлению $(\varphi_s)_{0\le s\le t}$, такой, что его супремум не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) $|\mathbb{T}_t^{-1}[\boldsymbol{\theta}_t(x) - y]|^2$, и такой, что $\phi_0 = x, \phi_t = y$

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{F}(\phi_s) + B\varphi_s, 0 \le s \le t.$$

Вычитая путь $\left(\boldsymbol{\theta}_s(x)\right)_{0\le s\le t}$, являющийся решением системы ОДУ

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_s = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_s), \boldsymbol{\theta}_0 = x,$$

мы приходим к эквивалентной задаче нахождения пути из $\mathbf{0}$ в $y - \boldsymbol{\theta}_t(x)$ для *нелинейной* управляемой системы с функцией $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_s(x) + \cdot) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_s(x)\right)$**.** Таким образом, без ограничения общности, мы можем предположить, что $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ является начальной точкой, $y - \boldsymbol{\theta}_t(x)$ – конечной точкой и $\boldsymbol{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогда, линеаризуя нелинейную систему, мы можем написать

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s + B\varphi_s, 0 \le s \le t, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{L}(\phi_s) = \int_0^1 \boldsymbol{D_x F}(\lambda\phi_s)\, d\lambda.$$

Для нахождения решения системы (9) используем теорему о неподвижной точке. Идея состоит в том, чтобы с каждым путём $(z_s)_{0\le s\le t} \in R^{2d}$ связать линейную задачу управления вида (1) (с $\Sigma_t \equiv I_d$ *и с матрицей* $(\boldsymbol{L}_s^{\boldsymbol{z}})_{0\le s\le t} = \int_0^1 \boldsymbol{D_x F}(\lambda z_s)\, d\lambda$) и искать неподвижную точку. Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверить, что для каждого z пара $((\boldsymbol{L}_s^{z})_{0\le s\le t}, I_d)$ удовлетворяет условиям Предложения 7. В частности, спектр K_t^z - ковариационной матрицы в момент t или, что то же самое, матрицы Грама $\mathfrak{C}_t^{\boldsymbol{z}}$, лежит в некотором интервале $[\gamma^{-1}, \gamma]$, где $\gamma > 0$ и не зависит от z. По Теореме 3.40 (Coron (2007)) отсюда следует, что линейная система (9) глобально управляема на $[0, t]$, то есть для каждой пары $x, y \in R^{2d}$ существует управление $(\varphi_s)_{0\le s\le t} \in L^\infty((0,t);R^d)$ такое, что решение задачи Коши

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s + B\varphi_s, \phi_0 = x$$

удовлетворяет конечному условию $\phi_t = y$. Соответствующее управление имеет вид

$$\varphi_s = B^*[\mathcal{R}^\phi(t,s)]^*\left[K_t^\phi\right]^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})), 0 \le s \le t, \qquad (10)$$

где $\mathcal{R}^\phi$ – резольвента линейной системы $\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s$. Пункт 2 Предложения 9, таким образом, доказан. Для доказательства п.1 воспользуемся свойством подобия системы. Рассмотрим гауссовский процесс на $[0,1]$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t = t^{1/2}\mathbb{T}_t^{-1}\boldsymbol{G}_{st}, s \in [0,1]. \qquad (11)$$

Очевидно, он удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t = \widehat{\boldsymbol{L}}_s^t\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t ds + B\widehat{\Sigma}_s^t d\widehat{W}_s^t, \widehat{\boldsymbol{G}}_0^t = t^{1/2}\mathbb{T}_t^{-1}x,$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{L}}_s^t = t\mathbb{T}_t^{-1}L_{st}\mathbb{T}_t, \widehat{\Sigma}_s^t = \Sigma_{\mathrm{st}}, \widehat{W}_s^t = t^{-1/2}W_{st}.$$

При этом резольвенты связаны соотношением

$$\widehat{\mathcal{R}}^t(s_1, s_0) = \mathbb{T}_t^{-1}\mathcal{R}(s_1 t, s_0 t)\mathbb{T}_t. \qquad (12)$$

Полагая $s_1 = 1, s_0 = \frac{s}{t} < 1$, получим из (11), (12)

$$\mathcal{R}^\phi(t,s) = \mathbb{T}_t\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)\mathbb{T}_t^{-1}, \boldsymbol{K}_t^\phi = t^{-1}\mathbb{T}_t\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\mathbb{T}_t.$$

Учитывая, что $B^*t\mathbb{T}_t^{-1} = B^*$, из (10) получим

$$\varphi_s = B^*t\mathbb{T}_t^{-1}[\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)]^*\left[\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\right]^{-1}\mathbb{T}_t^{-1}(y - \boldsymbol{\theta}_t(x)) \qquad (13)$$

Коэффициенты преобразованного на отрезок $[0,1]$ уравнения снова удовлетворяют условиям ($\boldsymbol{R} - \eta$), **(UE)** , (**ND**-η), элементы матриц $\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)$ и $\left[\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\right]^{-1}$ ограничены ко нстантой, зависящей только от этих условий и T. Отсюда сразу следует п. 1 Предложения 9.

Доказательство нижней границы методом цепочки (chaining method).

Мы теперь имеем все необходимые вспомогательные утверждения для того, чтобы доказать нижнюю оценку в неравенствах (3) Теоремы B. Напомним (R. Bass, 1997), что в случае невырожденной диффузии идея получения нижней оценки для переходной плотности $p(s,t,x,y)$ методом цепочки состояла в рассмотрении последовательности «зацепляющихся» шаров, образующих цепочку, центры шаров были расположены на прямой, соединяющей точки x и y**.** В нашем случае следует рассматривать последовательность эллипсоидов с центрами, лежащими на оптимальном пути $(\phi_s)_{0\le s\le T}$, построенном в Предложении 9 (где следует положить $t = T$).

Для фиксированных $x, x' \in R^{2d}, 0 \le s < t \le T$, ($T > 0$ будет выбрано позднее, но оно предполагается достаточно малым) для $N \ge 1$ имеем из оценки (5) Лекции 9

$$p(s,t,x,x') \ge$$

$$\tilde{p}(s,t,x,x') - \sum_{k=1}^{N} \int_s^t \int_{R^{2d}} \tilde{p}(s,u,x,y) \left| H^{\otimes k}(u,t,y,x') \right| dy du$$

$$- \int_s^t \int_{R^{2d}} p(s,u,x,y) \left| H^{\otimes (N+1)}(u,t,y,x') \right| dy du.$$

Из второго неравенства Леммы 11, которое остаётся верным при замене $(t,1)$ на (u,t), имеем

$$p(s,t,x,x') \ge \tilde{p}(s,t,x,x') -$$

$$\sum_{k=1}^{N} C(k) \int_s^t \int_{R^{2d}} \tilde{p}(s,u,x,y) (t-u)^{\frac{k\eta}{2}-1} g_{C(k),t-u}\big(y - \boldsymbol{\theta}_{u,t}(x')\big) dy du$$

$$-C(N+1) \int_s^t \int_{R^{2d}} p(s,u,x,y) (t-u)^{\frac{(N+1)\eta}{2}-1} \times$$

$$g_{C(N+1),t-u}\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta}_{u,t}(x')\big) dy du.$$

Выберем $\lfloor N\eta/2 \rfloor \ge 2d + 1.$ Тогда, в силу Лемм 10 -12 и неравенств (10) Лекции 9

$$p(s,t,x,x') \ge \tilde{p}(s,t,x,x') -$$

$$C \frac{(t-s)^{\eta/2}}{(t-s)^{2d}} \exp\left(-C^{-1}(t-s) \left| \mathbb{T}_{t-s}^{-1} \big(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x) - x' \big) \right|^2 \right) \ge$$

$$\frac{C^{-1}}{(t-s)^{2d}}\exp\left(-C(t-s)\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|^2\right)-$$
$$C\frac{(t-s)^{\eta/2}}{(t-s)^{2d}}\exp\left(-C^{-1}(t-s)\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|^2\right),$$

где нижняя граница для $\tilde{p}(s,t,x,x')$ может быть получена аналогично верхней границе для $\tilde{p}(s,t,x,x')$, приведённой в Лемме 11. Постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND-**η**)**. Обозначим

$$d_{s,t}(x,x') := (t-s)^{\frac{1}{2}}\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|.$$

Если $d_{s,t}(x,x')\le 1$, то

$$p(s,t,x,x')\ge (t-s)^{-2d}\left[C^{-1}\exp(-C)-CT^{\eta/2}\right].$$

Следовательно, для $T\le (2C^2)^{-2/\eta}\exp\left(-\frac{2C}{\eta}\right)$

$$p(s,t,x,x')\ge C_0(t-s)^{-2d}, C_0=\exp(-C)\,(2C)^{-1}. \qquad (14)$$

Итак, для $x,x'\in R^{2d}$, если $d_T(x,x')\triangleq d_{0,T}(x,x')\le 1$, то для достаточно малых T применима оценка (14). Для $d_T(x,x')>1$ необходимо применить метод цепочки (chaining method). Мы собираемся определить множества, чьи центры равномерно распределены относительно множеств уровня энергии $I(T,x,x')$, соответствующей оптимальному пути $(\phi_s)_{0\le s\le T}, \phi_0=x, \phi_T=x'$, построенному в Предложении 9. Напомним, что $(\varphi_s)_{0\le s\le T}\in L^\infty((0,T);R^d)$ - соответствующее оптимальное управление, заданное формулой (10) (где следует положить $t=T$). Определим разбиение отрезка $[0,I(T,x,x')]$

$$t_i=\begin{cases} := \inf\left\{t\in[t_{i-1},T]: \int_{t_{i-1}}^{t}|\varphi_s|^2ds=\frac{I(T,x,x')}{M_0}\right\}\wedge\left(t_{i-1}+\frac{T}{M_0}\right), \\ \qquad \textit{если}\ t_{i-1}<T\left(1-\frac{2}{M_0}\right) \\ := T, \quad \textit{если}\ t_{i-1}\ge T\left(1-\frac{2}{M_0}\right), \end{cases}$$

где число $M_0 := \lceil K d_T^2\rceil \ge 3$ *для* $K\ge 3$, число K будет выбрано позднее. Положим $\varepsilon_i := t_{i+1}-t_i, i\ge 1$.

Лемма 13 (контроль шага по времени). *Существует постоянная* $C_1\le 1$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND-**η**)**, *и целое* $M_1\in[\frac{M_0}{2},\frac{M_0}{C_1}]$ *такие, что* $t_{M_1}=T$ *и*

$$\forall i \in \{0,1,\dots,< M_1 - 1\}, C_1 \frac{T}{M_0} \le \varepsilon_i \le 2\frac{T}{M_0}. \qquad (15)$$

Доказательство. Положим $M_1 = \inf\{k \ge 1: t_k = T\}$. Очевидно, множество M_1 не пусто. Верхняя граница в (15) следует из определения семейства $(t_i)_{i\ge1}$. Предположим теперь, что $t_i < T\left(1-\frac{2}{M_0}\right)$ для $0 \le i \le M_1 - 1$. Предположим также, что $t_{i+1} - t_i < \frac{T}{M_0}$ (в противном случае $\varepsilon_i = \frac{T}{M_0}$). Тогда, по построению семейства $(t_i)_{i\ge1}$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds = \frac{I(T,x,x')}{M_0}.$$

Согласно Предложению 9

$$\sup_{0\le s\le T}|\varphi_s| \le C|\mathbb{T}_T^{-1}(\boldsymbol{\theta}_T(x) - x')| = CT^{-1/2}d_T,$$

где постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η). Следовательно,

$$\frac{I(T,x,x')}{M_0} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds \le C^2\varepsilon_i T^{-1} d_T^2.$$

Из оценок Предложений 8 и 9 следует, что, модифицируя, если потребуется, константу C, получим

$$\frac{d_T^2}{M_0} \le C^2\varepsilon_i T^{-1} d_T^2,$$

откуда следует нижняя оценка (15). Интервал значений для M_1 сразу следует из полученных оценок для ε_i.

Положим теперь для всех $i \in \{0,1,\dots,M_1\}$ $y_i = \phi_{t_i}$ (здесь $(t_i)_{i\ge1}$ те же, что и в Лемме 13, а $(\phi_s)_{0\le s\le T}$ - путь из x в x', соответствующий оптимальному управлению Предложения 9). В частности, $y_0 = x$, $y_{M_1} = x'$. Введём следующие множества

$$B_i := \Big\{z \in R^{2d}: K^{1/2}\rho\Big(\Big|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1}) - z)\Big| + \Big|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(z - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\Big|\Big) \le K^{-1/2}\Big\},$$

где $\rho = \frac{T^{\frac{1}{2}} d_T}{M_0}$. Имеем очевидную оценку снизу (с $x_0 = x$ и $x_{M_1} = x'$)
$p(0, T, x, x')$

$$\geq \int_{\prod_{i=1}^{M_1-1} B_i} \prod_{i=0}^{M_1-1} p(t_i, t_{i+1}, x_i, x_{i+1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{M_1-1}. \quad (16)$$

Следующая лемма, доказательство которой мы приведём ниже, позволяет завершить получение нижней границы в Теореме B, а вместе с этим и завершить доказательство Теоремы B.

Лемма 14. *Существует постоянная* K_0, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , $(\mathbf{ND}\text{-}\eta)$, *такая, что при* $K \geq K_0$

$$\forall i \in \{0,1, \dots, < M_1 - 2\}, \forall (x_i, x_{i+1}) \in B_i \times B_{i+1},$$
$$\varepsilon_i^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{t_{i+1}, t_i}(x_i) - x_{i+1} \right) \right| \leq 1, \quad (17)$$
$$\forall x_1 \in B_1, \qquad \varepsilon_0^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_0}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{t_1, 0}(x) - x_1 \right) \right| \leq 1,$$
$$\forall x_{M_1-1} \in B_{M_1-1}, \quad \varepsilon_{M_1-1}^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{T, t_{M_1-1}}(x_{M_1-1}) - x' \right) \right| \leq 1.$$

Более того, для $K \geq K_0$ *и для того же* C_1, *что и в Лемме 13, получим*

$$\forall i \in \{0,1, \dots, < M_1 - 1\}, \qquad |B_i| \geq C_1 \rho^{4d}, \quad (18)$$

где $|B_i|$ *—мера Лебега множества* B_i.

Закончим доказательство Теоремы B в предположении, что Лемма 14 доказана. Лемму 14 докажем ниже.

Пусть $K \geq K_0$. Из (14), (16), (17) получим

$$p(0, T, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq \frac{C_0}{\varepsilon_0^{2d}} \prod_{i=1}^{M_1-1} \frac{C_0}{\varepsilon_i^{2d}} |B_i|, \quad (19)$$

Подставляя нижнюю границу из (18) и верхнюю границу из (15) в (19), при $\rho = T^{1/2} d_T / M_0$, получим

$$p(0, T, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq \left(\frac{C_0 C_1}{2^{2d}} \right)^{M_1} \left(\frac{M_0}{T} \right)^{2d} \left(\frac{d_T^2}{M_0} \right)^{(M_1 - 1)2d}.$$

Далее, по определению M_0 , $M_0 - 1 \leq K d_T^2$ (напомним, что $d_T(x, x') > 1$), поэтому $\frac{d_T^2}{M_0} \geq \frac{1}{K+1}$. Полагая

$$C_2 := \frac{C_0 C_1}{(2(K+1))^{2d}} < 1,$$

(для K достаточно большого), получим

$$p(0,T,x,x') \geq C_2^{M_1}(K+1)^{2M_1 d}\left(\frac{M_0}{T}\right)^{2d}(K+1)^{-2(M_1-1)d} =$$

$$T^{-2d}(K+1)^{2d}(M_0)^{2d}C_2^{M_1} \geq T^{-2d}C_2^{M_1} = T^{-2d}\exp\left(-M_1\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right).$$

По Лемме 13 $M_1 \leq \frac{M_0}{C_1}$, поэтому

$$p(0,T,x,x') \geq T^{-2d}\exp\left(-\frac{M_0}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right) =$$

$$T^{-2d}\exp\left(-\frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right)\exp\left(-\frac{M_0-1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right) \geq$$

$$T^{-2d}\exp\left(-\frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right)\exp\left(-\frac{Kd_T^2}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right). \qquad (20)$$

Напомним, что $K > K_0$ выбрана так, чтобы $\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)$ был положителен. При таком выборе все параметры зависят только от условий ($\boldsymbol{R}-\eta$), **(UE)** , (**ND**-η). Оценка (20) даёт желаемую нижнюю грань для коротких времён T. Для произвольного интервала $[0,T]$ его следует разбить на конечное число коротких интервалов, применить марковское свойство и Лемму 10 для оценки снизу свёрток.

Доказательство Леммы 14. Начнём с доказательства неравенств (17). Зафиксируем $(x_i, x_{i+1}) \in B_i \times B_{i+1}$, $i = \{1,2,\dots,M_1-2\}$. Согласно неравенствам (10) Лекции 9, найдётся постоянная C_3, зависящая только от условий ($\boldsymbol{R}-\eta$), **(UE)** , (**ND**-η), такая, что

$$Q_i := \varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_{i+1},t_i}(x_i) - x_{i+1}\right)\right| \leq$$

$$C_3\varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(x_{i+1})\right)\right| \leq C_3\varepsilon_i^{1/2}\left\{\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)\right| +\right.$$

$$\left.\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1}) - y_i\right)\right| + \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(y_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(x_{i+1})\right)\right|\right\} := Q_i^1 + Q_i^2 + Q_i^3.$$

Имеем

$$Q_i^1 \leq C_3\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_i^{\frac{1}{2}-j}\left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right| =$$

$$C_3 \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}-j} (K\rho^2)^{\frac{1}{2}-j} \left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right|.$$

Из (15) и определений ρ и M_0 следует оценка

$$\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2} \geq C_1 \frac{M_0}{K d_T^2} \geq C_1.$$

Таким образом, для $j = 1,2$

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}-j} \leq (C_1)^{\frac{1}{2}-j} \leq C_1^{-2}$$

и

$$Q_i^1 \leq C_3 C_1^{-2} \sum_{j=1}^{2} (K\rho^2)^{\frac{1}{2}-j} \left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right| =$$

$$C_3 C_1^{-2} K^{1/2} \rho \left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)\right| \leq C_3 C_1^{-2} K^{-1/2},$$

где в последнем неравенстве мы использовали то, что $x_i \in B_i$. Слагаемое Q_i^3 оценивается аналогично, откуда $Q_i^1 + Q_i^3 \leq 2C_3 C_1^{-2} K^{-1/2}$. Из Предложений 8 и 9 и из выбора узлов разбиения $(t_i)_{i\geq 1}$ следует, что найдётся постоянная C_4, зависящая только от условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), такая, что

$$Q_i^2 \leq C_4 I(t_{i-1}, t_i, y_{i-1}, y_i) \leq C_4 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds \leq C_4 \frac{I(T, x, x')}{M_0} \leq$$

$$C_4^2 \frac{d_T^2}{M_0} \leq \frac{C_4^2}{K}.$$

Таким образом, $\forall i \in \{0,1, \dots, < M_2 - 1\}$ $Q_i \leq 1$, если выбрать K достаточно большим (относительно величин, являющихся функциями только параметров условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η)).

Для $x_1 \in B_1$ *и* $x_{M_1-1} \in B_{M_1-1}$слагаемые

$$Q_0 := \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_0}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_1,0}(x) - x_1\right)\right|$$

и

$$Q_{M_1-1} := \varepsilon_{M_1-1}^{1/2} \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{T,t_{M_1-1}}(x_{M_1-1}) - x'\right)\right| \leq$$

$$C_3\varepsilon_{M_1-1}^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1}\left(x_{M_1-1}-\boldsymbol{\theta}_{t_{M_1-1},T}(x')\right)\right|$$

могут быть оценены аналогично Q_i^1, $i\in\{0,1,\dots,<M_2-1\}$. Таким образом, неравенства (17) доказаны. Остаётся оценить снизу Лебеговы меры множеств $(B_i)_{i\in\{1,2,\dots,M_1-1\}}$. Рассмотрим для $i\in\{0,1,\dots,<M_1-1\}$ эллипсоиды $E_i:=\left\{z\in R^{2d}: K^{1/2}\rho\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-z)\right|\le\frac{1}{3}K^{-1/2}\right\}$. Имеем

$$|E_i|=C_5 3^{-2d}K^{-d}(K\rho^2)^{2d},$$

где постоянная C_5 зависит только от d. Модифицируя константу C_5, если необходимо, получим, что $|E_i|\ge C_5\rho^{4d}$ для $K\ge 1$. Покажем, что $E_i\subset B_i$. Пусть $z\in E_i$. Оценим сверху R_i

$$R_i:=K^{1/2}\rho\left(\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-z)\right|+\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(z-\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\right|\right)\le K^{1/2}\rho\left(\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i)\right|+2\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-z)\right|+\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\right|\right):=R_i^1+R_i^2+R_i^3.$$

По определению множества E_i слагаемое R_i^2 не превосходит $\frac{2}{3}K^{-1/2}$. Имеем также

$$R_i^1\le C_6\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{j-\frac{1}{2}}\varepsilon_i^{\frac{1}{2}-j}\left|\left(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i\right)_j\right|\le$$

$$C_6\left(\frac{2M_0}{Kd_T^2}\right)^2\varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i)\right|\le\frac{C_6^2}{K}\left(\frac{2(Kd_T^2+1)}{Kd_T^2}\right)^2\le$$

$$\frac{16C_6^2}{K}.$$

Слагаемое R_i^3 может быть оценено аналогично. Отсюда следует, что $R_i\le K^{-1/2}$, если K выбрать достаточно большим. Теорема B тем самым полностью доказана.