Лекция 7.
Вырожденные диффузии. Пример А.Н. Колмогорова.

Литература:

- A.N. Kolmogorov. Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung). Annals of Mathematics, 1934, 116-117.
- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- S. Menozzi. Parametrix technique and Martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations, Elect. Comm. In Probab., 16, 2011, 234-250.
- D. Nualart. The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer, 2006.
- V.N. Kolokoltsov. Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equation and stochastic Hamiltonian systems. J. Dynamic Contr. Syst. 2:3, 1996, 299-319.

В 1934 году А.Н. Колмогоров опубликовал статью, в которой рассмотрел следующую двумерную систему СДУ

$$\begin{aligned} X_t^{s,(x,y)} &= x + b(t-s) + (2k)^{1/2}(W_t - W_s) \\ Y_t^{s,(x,y)} &= y + \int_s^t X_u^{s,(x,y)} du \end{aligned} \tag{1}$$

(здесь $b \in R$ и $k \in R_+$ постояные). Нетрудно видеть, что $(X_t^{s,(x,y)}, Y_t^{s,(x,y)})-$ гауссовский процесс, переходная плотность которого даётся формулой:

$$\tilde{p}\left(s,t,(x,y),(x',y')\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi k(t-s)^2} \times$$

$$\exp\left(-\frac{\left|x'-x-b(t-s)\right|^2}{4k(t-s)} - \frac{3\left|y'-y-\frac{x'+x}{2}(t-s)\right|^2}{k(t-s)^3}\right). \quad (2)$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что $\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right)$ является фундаментальным решением обратного уравнения Колмогорова

$$-\frac{\partial\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right)}{\partial s} = \left[k\partial_{xx}^2 + b\partial_x + x\partial_y\right]\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right).$$

Задача 6. Выполнить эту проверку.

Замечание 1. Нетрудно также видеть, что формула (2) остаётся справедливой и в случае: $(X_t^{s,(x,y)},Y_t^{s,(x,y)}) \in R^d \times R^d, d > 1$. В этом случае производящий оператор имеет вид

$$L_x = k\sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}^2 + \sum_{i=1}^d b_i\partial_{x_i} + \sum_{i=1}^d x_i\partial_{y_i}.$$

Отметим некоторые замечательные свойства системы Колмогорова (1). Во-первых, несмотря на вырожденность системы (второе уравнение не содержит броуновской компоненты), переходная плотность существует и даётся формулой (2). Во-вторых, вырожденность системы приводит к тому, что первая и вторая компоненты «живут» в разных временных шкалах: первая компонента «живёт» в характерной для броуновского движения шкале $(t-s)^{1/2}$, а вторая компонента, будучи интегралом от первой компоненты, «живёт» в шкале $(t-s)^{3/2}$. И, наконец, третье важное свойство состоит в том, что из-за неограниченности коэффициента при ∂_y (слагаемое $x\partial_y$ в производящем операторе) происходит перенос начального условия x во вторую компоненту $Y_t^{s,(x,y)}$, то есть

$$EY_t^{s,(x,y)} = y + x(t-s) + b\frac{(t-s)^2}{2}$$

Окончательное выражение для плотности получается с учётом тождества

$$y' - EY_t^{s,(x,y)} = y' - y - \frac{x'+x}{2}(t-s) + \frac{t-s}{2}\left(x' - EX_t^{s,(x,y)}\right).$$

Семейство плотностей (2) обладает полугрупповым свойством:

$$\tilde{p}\big(s,v,(x,y),(w,z)\big) = \int\limits_{R^d\times R^d} \tilde{p}(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)) \times$$

$$\tilde{p}\left(t, v, (x', y'), (w, z)\right) dx'dy'.$$

Работа Колмогорова послужила толчком к многочисленным исследованиям, так называемых, уравнений «типа Колмогорова». Наиболее общая модель, которая позволяет оставаться в рамках гауссовских границ для переходной плотности, рассмотрена в работе F. Delarue и S. Menozzi (2010). Она имеет вид:

$$\begin{aligned}
dX_t^1 &= F_1(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dt + \sigma(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dW_t,\\
dX_t^2 &= F_2(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dt,\\
dX_t^3 &= F_3(t, X_t^2, \dots, X_t^n)dt,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
dX_t^n &= F_n(t, X_t^{n-1}, X_t^n)dt
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь W_t - d - мерное броуновское движение, каждый процесс $\left(X_t^i\right)_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq n,$ также принимает значения в R^d. Для упрощения изложения мы ограничимся однородным случаем для $n = 2$, то есть рассмотрим однородную систему

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds. \tag{4}$$

Система (4) может быть записана в стандартном виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_t})dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t, \boldsymbol{X}_0 = x, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F} = (b, F)^* \in R^{2d}, B = \begin{pmatrix} I_d \\ 0_d \end{pmatrix} - 2d \times d$ матрица. Относительно системы (5) сделаем следующие предположения:

$(\boldsymbol{R} - \eta)$: Функции b, F удовлетворяют глобальному условию Липшица, а функция σ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\eta \in (0,1]$ с положительной константой κ.

(UE): Существует $\Lambda \geq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in R^{2d}, \xi \in R^d, \Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle a(\boldsymbol{x})\xi, \xi\rangle \leq \Lambda\, |\xi|^2$, где $a(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma^*(\boldsymbol{x})$.

(**ND**-η): Отображение $x^1 \in R^d \rightsquigarrow F(x^1, x^2) \in R^d$ непрерывно дифференцируемо, его матрица частных производных $x^1 \in R^d \rightsquigarrow D_{x^1}F(x^1, x^2) \in R^d \otimes R^d$ удовлетворяет (поэлементно) условию Гёльдера по переменной x^1 с показателем $\eta \in (0,1]$ и константой κ. Существует *замкнутое выпуклое* множество $\mathcal{E} \subset GL_d(R)$ ($GL_d(R)$ - множество вещественнозначных, *обратимых* $d \times d -$ матриц) такое, что для всех $x^1 \in R^d$ матрица $D_{x^1}F(x^1, x^2)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Например, $\mathcal{E}$ может быть замкнутым шаром в $GL_d(R)$.

Прежде чем обсуждать влекут ли гипотезы ($\boldsymbol{R} - \eta$), **(UE)** и (**ND**-η) существование и единственность решения уравнения (5), напомним несколько определений, необходимых нам для дальнейшего изложения.

Определение 5. *Решение уравнения (5)- это пара* ***а****даптированных процессов* $(\boldsymbol{X_t}, W_t)$, *определённых на вероятностном пространстве с фильтрацией* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ *и таких, что*

(i) $W_t -$ *стандартное* $(\mathcal{F}_t)$ *- броуновское движение;*

(ii) $\boldsymbol{X_t}$ *непрерывен, и для каждого* $t \geq 0$

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{X_0} + \int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_s)ds + \int_0^t B\sigma(\boldsymbol{X_s})dW_s \quad P - п.н.$$

Определение 6. *Решение* $(\boldsymbol{X_t}, W_t)$ *называют* ***сильным*** *решением, если* $\boldsymbol{X_t}$ ***адаптирован к фильтрации*** $\left(\boldsymbol{\overline{\mathcal{F}}_t^W}\right)$, *то есть фильтрации* W, *пополненной относительно* P.

Определение 7. *Решение* $(\boldsymbol{X}, W)$, *не являющееся сильным решением, называют* ***слабым*** *решением.*

Определение 8. *Говорят, что для уравнения (5) имеет место* ***единственность по распределению (или слабая единственность)****, если для любых двух решений* $(\boldsymbol{X}, W)$ *и* $\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{W}\right)$ *(которые могут быть определены даже на разных вероятностных пространствах с фильтрациями* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ *и* $(\Omega', \mathcal{F}', \left(\mathcal{F}_t^{'}\right), P')$*) с одинаковыми начальными условиями* $\boldsymbol{X_0} = \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}} = x$ ***законы распределения*** $\boldsymbol{X}$ *и* $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ *совпадают.*

Определение 9. *Говорят, что для уравнения (5) имеет место* ***потраекторная единственность (или сильная единственность)****, если для любых двух решений* $(\boldsymbol{X}, W)$ *и* $\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{W}\right)$, *определённых на одном вероятностном пространстве и таких, что* $\boldsymbol{X_0} = \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}} = x$, $\boldsymbol{X}$ *и* $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ *неразличимы (т.е. потраекторно* $P - п.н.$ *совпадают*).

При сформулированных условиях $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** и (**ND**-η) уравнение (5) имеет **единственное слабое решение**. Этот результат был недавно доказан в работе S. Menozzi (2011). Нас будет интересовать вопрос о существовании гладкой переходной плотности у этого решения. В случае, когда коэффициенты уравнения (5) бесконечно дифференцируемы и имеют ограниченные производные всех порядков, ответ даётся теорией Хёрмандера. На коэффициенты уравнения при этом накладываются условия невырожденности Хёрмандера, гарантирующие существование гладкой плотности. Перейти к коэффициентам класса C^∞ можно, например, свернув коэффициенты с функцией $\varphi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d/2}\, exp\left(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}\right)$, то есть, перейдя к сглаженным коэффициентам

$$b_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)b(y)dy, F_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)F(y)dy,$$

$$\sigma_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)\sigma(y)dy,\ x,y\ \in R^{2d}. \qquad (6)$$

Из условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$ и **(UE)** следует, что сглаженные коэффициенты принадлежат классу C^∞ и имеют ограниченные производные всех порядков. Покажем теперь, что система (5) удовлетворяет «слабому» условию Хёрмандера. Напомним сначала определение скобки Пуассона двух векторных полей. Пусть

$$X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\ \ Y = \sum_j b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

пара векторных полей класса C^∞ на R^d. Тогда для гладкой функции f имеем:

$$XYf = X(\sum_j b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y(\sum_j a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Поэтому разность $XYf - YXf$ снова является векторным полем

$$XYf - YXf = \sum_j \left\{\sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\right\}\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (7)$$

Определение 10. Векторное поле $XY - YX$ называется *скобкой Пуассона* векторных полей X и Y и обозначается $[X, Y]$.
Очевидно, поле $[X, Y]$ также класса C^∞. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать сглаженные поля. Чтобы не усложнять обозначения, нижний индекс ε мы будем опускать. Производящий оператор, соответствующий системе (5), может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^1 \partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2},$$

где $x = (x^1, x^2) \in R^d \times R^d$.
Задача 7. Проверить, что этот же оператор можно записать в форме Хёрмандера как «сумму квадратов»:

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} A_j^2 + B,$$

где векторные поля A_j и B определяются следующим образом

$$A_j = \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1},\ \ B = \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\mathrm{Tr}\big(\sigma(x)\nabla\sigma_{j\cdot}(x)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x_j^1},$$

где через $\nabla\sigma_{j\cdot}(x)$ обозначена $d \times d-$ матрица, $i-$ ый столбец которой равен вектору градиента функции $\sigma_{ji}(x^1, x^2)$ по переменным x^1:

$$\nabla\sigma_{j\cdot}(x) = [\nabla_{x^1}\sigma_{j1}(x) \quad \dots \quad \nabla_{x^1}\sigma_{jd}(x)].$$

Рассмотрим вектор - столбцы, соответствующие координатам введённых выше векторных полей A_j и B в базисе пространства R^{2d}, т.е. в базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^1}, \frac{\partial}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^2}\right\}$:

$$A_j(x) = \begin{pmatrix} \sigma_{1j}(x) \\ \vdots \\ \sigma_{dj}(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, \dots, d, \tag{8}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(x)\nabla\sigma_{1\cdot}(x)) \\ \vdots \\ b_d(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(x)\nabla\sigma_{d\cdot}(x)) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$$

Условия (**UE**) и (**ND**-η) влекут «слабое» (то есть не содержащее скобок Пуассона вида $[A_i, A_j]$) условие Хёрмандера:

($\mathbf{H}_w$): $\forall x \in R^{2d}$

Span $\{A_1(x), \dots, A_d(x), [A_1(x), B(x)], \dots, [A_d(x), B(x)]\} = R^{2d}$,

где $[A_i(x), B(x)]$, $i = 1, \dots, d$, - скобки Пуассона векторных полей $A_i(x)$ *и* $B(x)$.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия* (**UE**) и (**ND**-η). *Тогда выполнено «слабое» условие Хёрмандера* ($\mathbf{H_w}$)**.**

Доказательство. Применяя формулу (7) для вычисления скобки $[A_j(x), B(x)]$, получим, что координаты векторного поля $[A_j(x), B(x)]$ в базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^2}\right\}$ имеют вид

$$\left[A_j(x), B(x)\right] = \left(\left(D_{x_1^1} \overset{*}{F}(x)\right) \sigma_{\cdot j} \right), j = 1, \dots, d. \tag{9}$$

Здесь знаком $*$ обозначен вектор первых d координат, точное выражение нетрудно выписать, но оно нам не понадобится, а $\sigma_{\cdot j}$ – j –ый столбец матрицы $\sigma(x)$. Утверждение леммы теперь легко следует из условий **(UE),** **(ND**-η), (8) и (9).

Существование и гладкость переходной плотности решения системы (4) со сглаженными коэффициентами (6) следует теперь из Леммы 9 и следующей теоремы:

Теорема (D. Nualart, 2006, Теорема 2.3.3, стр. 133).

Предположим, что $X_t = (X_t^1, X_t^2), t \geq 0$*, решение системы (4) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, имеющими ограниченные производные всех порядков. Пусть выполнено условие Хёрмандера* $(\mathbf{H_w})$. *Тогда для любого* $t > 0$ *случайный вектор* (X_t^1, X_t^2) *имеет бесконечно дифференцируемую плотность.*

Следствие. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** *и* **(ND**-η). *Тогда решение* (X_t^1, X_t^2) *системы (4) со сглаженными коэффициентами (6) имеет бесконечно дифференцируемую переходную плотность.*

Важный частный случай системы (4) – это случай $F(X_s^1) = X_s^1$:

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds. \tag{10}$$

Приведём несколько примеров, в которых возникают системы вида (10). В финансовой математике, когда рассматривают опционы Азиатского типа, то есть опционы, цена исполнения которых определяется средней стоимостью активов на период его действия, X_t^1 представляет собой динамику базовых активов (underlying assets), а интеграл от них, X_t^2 , входит в функцию выплат. К системам вида (10) относятся также обобщения Гамильтоновых систем – так называемые *стохастические Гамильтоновы системы* (V. Kolokoltsov, 1996). Для функции Гамильтона $H(x, y)$ вида $H(x, y) = V(y) + \frac{|x|^2}{2}$, где V- потенциал, а $\frac{|x|^2}{2}$ −кинетическая энергия частицы с единичной массой, соответствующая стохастическая Гамильтонова система имеет вид

$$dX_t^1 = -\frac{\partial H}{\partial y}(X_t^2) - c(X_t^2)dW_t$$

$$dX_t^2 = \frac{\partial H(X_t^1)}{\partial x}dt,$$

то есть является частным случаем системы (10) с

$$b(X_s^1, X_s^2) = -\partial_y V(X_s^2),\ \sigma(X_s^1, X_s^2) = -c(X_s^2),\ \frac{\partial H(X_s^1)}{\partial x} = X_s^1.$$

Системы вида (10) возникают также при описании стохастических кинематических моделей, где компонента X_t^1 соответствует скорости частицы, а компонента $X_t^2 -$ её положению.