Лекция 3.
Построение фундаментального решения методом Мак Кина и Зингера.

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.
- McKean, H.P., Singer, I.M.: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry* 1, 43–69, 1967.

Мы возвращаемся к обозначениям первой лекции. Рассмотрим диффузионный процесс $X(t)$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$dX(t) = b\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dW(t), X(0) = x, t \in [0,1],$$

где $W(t) -$ стандартный d – мерный винеровский процесс, $\sigma(z) -$ симметрическая матрица такая, что матрица $a(z) = \sigma(z) \cdot \sigma^*(z)$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности.
Предположим, что функции $b(z)$ и $a(z)$ ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера, кроме того, существуют ограниченные и непрерывные производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial z_j}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial z \partial z_j}, \frac{\partial b_i}{\partial z_i}$, удовлетворяющие условию Гёльдера. Тогда существует переходная плотность $p(t-s,x,y)$, которая является фундаментальным решением прямого и обратного уравнений Колмогорова

$$-\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial s} = L_x p =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p(t-s,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial x_i} \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial t} = L_y^* p =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[a_{ij}(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial[b_i(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i} . \quad (2)$$

Наша ближайшая цель - получить представление переходной плотности $p(t-s,x,y)$ в виде бесконечного ряда, членами которого являются гауссовские плотности, свёрнутые с сингулярным ядром. Опишем соответствующую конструкцию. Для каждого $0 < s < 1$ и $x, y \in R^d$ определим дополнительный диффузионный процесс $\tilde{X} = \tilde{X}_{s,x,y}$. Этот процесс определён на интервале $s \le t \le 1$ и является решением следующего стохастического дифференциального уравнения (СДУ):

$$d\tilde{X}(t) = b(y)dt + \sigma(y)dW(t), \tilde{X}(s) = x, t \in [s,1].$$

Процессы $\tilde{X}_{s,x,y}$ будем называть **замороженными диффузиями** (поскольку коэффициенты СДУ «заморожены» в точке y). Отметим, что «замораживание» коэффициентов СДУ для $\tilde{X}$ производится в *конечной* точке y. Переходная плотность $\tilde{p}^y(t-s,x,y)$ такой диффузии - гауссовская

$$\tilde{p}^y(t-s,x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(t-s)^{-\frac{d}{2}}(\det a(y))^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(t-s)}\{y-x-b(y)(t-s)\}^* a^{-1}(y)\{y-x - b(y)(t-s)\}\right)$$

Важно отметить, что переменная y входит в выражение для плотности **двояко**: как аргумент плотности и как точка, в которой заморожены коэффициенты СДУ.

Введём необходимые для дальнейшего обозначения. Сингулярное ядро $H(t-s,x,y)$ определим следующим образом

$$H(t-s,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_{ij}(x)-a_{ij}(y)\right)\frac{\partial^2\tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_i\left(b_i(x)-b_i(y)\right)\frac{\partial\tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i}$$

Введём также бинарную операцию $\otimes$ типа свёртки

$$(f\otimes g)(s,t,x,y) = \int_s^t d\tau\int_{R^d} f(s,\tau,x,z)g(\tau,t,z,y)dz$$

Лемма 1. *Для* $0 \le s < t \le 1$ *имеет место следующее представление*

$$p(t-s,x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(\tilde{p}\otimes H^{(r)})(t-s,x,y), \tag{3}$$

где, по определению, $\tilde{p}\otimes H^{(0)} = \tilde{p}$, $\tilde{p}\otimes H^{(r)} = \left(\tilde{p}\otimes H^{(r-1)}\right)\otimes H\big)$

Доказательство. Имеет место следующее тождество

$$p(t-s,x,y) - \tilde{p}^y(t-s,x,y) =$$

$$\int_s^t du\frac{\partial}{\partial u}\left[\int_{R^d} p(u-s,x,z)\,\tilde{p}^y(t-u,z,y)dz\right] =$$

$$\int_s^t du\int_{R^d}\frac{\partial}{\partial u}[p(u-s,x,z)]\,\tilde{p}^y(t-u,z,y) +$$

$$p(u-s,x,z)\frac{\partial}{\partial u}[\tilde{p}^y(t-u,z,y)]dz$$

$$= \int_s^t du\int_{R^d}[L_z^* p(u-s,x,z)\,\tilde{p}^y(t-u,z,y) -$$

$$p(u-s,x,z)\tilde{L}_z^y\tilde{p}^y(t-u,z,y)\big]dz =$$

$$\int_s^t du \int_{R^d} p(u-s,x,z)\left(L_z - \tilde{L}_z^y\right)\tilde{p}^y(t-u,z,y)dz$$

$$= (p \otimes H)(t-s,x,y).$$

Первое равенство следует из обычной формулы Ньютона-Лейбница и того, что $p(0,x,y) = \tilde{p}(0,x,y) = \delta(y-x)$. Далее используются прямое и обратное уравнения Колмогорова, определение ядра и операции $\otimes$. Последнее уравнение может быть записано кратко следующим образом: $p = \tilde{p} + p \otimes H$. Итерируя, получим ряд (3). Ряд (3) быстро сходится к функции $p(t-s,x,y)$.

Лемма 2. *Существуют $C < \infty$ и $c > 0$ такие, что при всех $0 \le s < t \le T, x \in R^d, y \in R^d$, справедливы оценки*

$$\tilde{p}^y(t-s,x,y) \le Cp_c(t-s,x,y),$$

$$\left|\tilde{p} \otimes H^{(r)}(t-s,x,y)\right| \le C^{r+1}(t-s)^{\frac{r}{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)} p_c(t-s,x,y), \quad (4)$$

где

$$p_c(t-s,x,y) = \left(\frac{c}{2\pi(t-s)}\right)^{d/2} \exp\left(-c\frac{|y-x|^2}{t-s}\right), 0 < c < \infty.$$

Так как $\Gamma(r\lambda) \ge [r\lambda - 1]!$ для $r\lambda > 2$, то из оценки (4) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (3) при $t > s$, а также справедливость для функции $p(t-s,x,y)$ оценки

$$p(t-s,x,y) \le Cp_c(t-s,x,y)$$

Задача 1. Убедиться прямой выкладкой, что функция $p(t-s,x,y)$, определенная рядом (3), является решением уравнений (1) и (2).

Дискретный аналог метода параметрикса для цепей Маркова.

Пусть на отрезке [0,1] задана последовательность разбиений $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрерывным пространством состояний.

Цепи $X_t^{(n)}$определены на решётке $\varGamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, имеют начальное распределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а динамика этой цепи описывается следующим рекуррентным соотношением

$$X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} = X_{\frac{i}{n}}^{(n)} + \frac{1}{n} b\left(X_{\frac{i}{n}}^{(n)}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}, \tag{5}$$

$0 \le i \le n-1, X_0^{(n)} = x.$

Рассмотрим семейство плотностей $q_x(\cdot)$, параметризованное точками евклидова пространства $x \in R^d$, и удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\int_{R^d} z q_x(z) dz = 0, \forall x \in R^d.$
2. $\int_{R^d} z_i z_j q_x(z) dz = a_{ij}(x).$

Сделаем «марковские» предположения относительно ошибок $\varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}$, а именно: предположим, что условное распределение

$$\mathcal{L}\left(\varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} \mid X_{\frac{i}{n}}^{(n)} = x_i, X_{\frac{i-1}{n}}^{(n)} = x_{i-1}, \dots\right)$$

зависит только от последнего значения x_i и имеет плотность $q_{x_i}(\cdot)$, то есть является элементом семейства $q_x(\cdot)$, соответствующим значению параметра $x = x_i$. В условиях равномерной эллиптичности матрицы $\|a_{ij}\|$ для любого $t > s,\ s \in \varGamma_n,\ t \in \varGamma_n$ существует переходная плотность $p_n(t-s, x, \cdot)$. По аналогии с семейством «замороженных» диффузий, введём семейство **«замороженных» цепей Маркова.** Для каждого $0 < s = \frac{j}{n} < 1$ и $x, y \in R^d$ определим цепь Маркова $\tilde{X}_t^{(n)} = \tilde{X}_{s,x,y}^{(n)}$. Эта цепь определена на решётке $\{\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, \dots, 1\}$ следующим рекуррентным соотношением

$$\tilde{X}_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} = \tilde{X}_{\frac{i}{n}}^{(n)} + \frac{1}{n} b(y) + \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\varepsilon}_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}, \tag{6}$$

$j \le i \le n-1$, $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{j}{n}} = x$, где условное распределение

$$\mathcal{L}\left(\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} \mid \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}} = x_i, \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i-1}{n}} = x_{i-1}, \dots\right)$$

имеет плотность $q_y(\cdot)$, не зависящую от условия. Нетрудно видеть, что при этих предположениях приращения $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}}$ независимы при разных i и полное приращение $\tilde{X}^{(n)}_1 - \tilde{X}^{(n)}_0$ на отрезке $[0,1]$ является суммой n независимых, одинаково распределённых случайных векторов $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}}, i = 0,1,\dots,n-1$. Обозначим через $\tilde{p}^y_n(t-s,x,\cdot)$ переходную плотность этой цепи. Введём необходимые для дальнейшего обозначения. Сначала определим дискретный аналог H_n ядра H, где

$$H(t-u,z,y) = \left(L_z - \tilde{L}^y_z\right)\tilde{p}^y(t-u,z,y).$$

Пусть $\varphi \in C^\infty_0(R^d)$, рассмотрим инфинитезимальные операторы цепей (5) и (6)

$$L^n\varphi(x) = \frac{E\left(\varphi\left(X^{(n)}_{\frac{1}{n}}\right)\middle| X^{(n)}_0 = x\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}},$$

$$\tilde{L}^{n,y}\varphi(x) = \frac{E\left(\varphi\left(\tilde{X}^{(n)}_{\frac{1}{n}}\right)\middle| \tilde{X}^{(n)}_0 = x\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Для $j' > j$ рассмотрим

$$H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, z, y\right) = \left(L^n - \tilde{L}^{n,y}\right)\tilde{p}^y_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j+1}{n}, z, y\right) \tag{7}$$

Введём дискретный аналог $\otimes_n$ бинарной операции $\otimes$

$$(f \otimes_n g)\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{i=j}^{j'-1} \frac{1}{n}\int_{R^d} f\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right) g\left(\frac{j'}{n} - \frac{i}{n}, z, y\right) dz.$$

В этом определении мы принимаем следующее соглашение: все суммы вида $\sum_{i=j}^{j'-1}$ ..., где $j' \leq j$ мы полагаем равными нулю. Таким образом, ряды вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(r)}(1,x,y) \text{ и } \sum_{r=0}^{\infty} (\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1,x,y),$$

которые мы будем рассматривать в дальнейшем, на самом деле содержат только конечно число членов, отличных от нуля: при $r > n$ соответствующие слагаемые равны нулю.

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы 1.

Лемма 3. Для $0 \leq j < j' \leq n$ имеет место следующее разложение

$$p_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=0}^{j'-j} \tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) \tag{8}$$

Доказательство. По определению

$$H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, z, y\right) =$$
$$n\left[\iint \left\{p_n\left(\frac{1}{n}, z, v\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, z, v\right)\right\} \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{j+1}{n}, v, y\right) dv\right]$$

Используя марковское свойство, получим следующие тождества

$$p_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{i=j}^{j'-1} \frac{1}{n} \int p_n\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right)$$
$$\times n\left[\iint \left\{p_n\left(\frac{1}{n}, z, v\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, z, v\right)\right\} \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{i+1}{n}, v, y\right) dv dz\right]$$
$$= \sum_{i=j}^{j'-1} \frac{1}{n} \int p_n\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right) H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{i}{n}, z, y\right) dz$$
$$= p_n \otimes_n H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right)$$

Итерируя последнее тождество, получим (8).

Итак, мы получили два представления. Для переходной плотности диффузии - бесконечный ряд

$$p(t-s,x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}(\tilde{p}\otimes H^{(r)})(t-s,x,y), \tag{9}$$

а для переходной плотности цепи Маркова – конечный ряд

$$p_n\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right)=\sum_{r=0}^{j'-j}\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right). \tag{10}$$

Мы хотим оценить близость $p(1,x,y)$ и $p_n(1,x,y)$, для этого достаточно сравнить правые части разложений в ряд этих плотностей. Для оценки близости правых частей нужно научиться контролировать следующие величины:

1. «Хвосты» рядов (9) и (10), т.е. суммы слагаемых при $r\geq N$.
2. Контролировать ошибку, возникающую при замене операции $\otimes$ её дискретным аналогом $\otimes_n$.
3. Контролировать ошибку в классической многомерной локальной предельной теореме для плотностей (ошибка замены $\tilde{p}$ на $\tilde{p}_n$).
4. Оценить ошибку, возникающую от замены непрерывного ядра H дискретным ядром H_n.