Лекция 8.
Вырожденные диффузии (продолжение). Основная теорема об оценке типа Аронсона для переходной плотности.

Литература:

- D. Stroock, S. Varadhan. Multidimensional diffusion processes. Springer. New York. 1979.
- R. Bass. Diffusion processes and Elliptic Operators. Springer. 1997.
- R. Bass, E. Perkins. A new technique for proving uniqueness for martingale problems. *From Probability to Geometry (I): Volume in Honor of the 60th Birthday of Jean-Michel Bismut*, pages 47-53, 2009.
- S. Menozzi. Parametrix technique and Martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. Elect. Comm. In Probab., 16, 2011, 234-250.
- J. Jacod, A. Shiryaev. Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer, 1987.
- П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. Наука, М., 1977 (пер. с англ.).

Мы рассматриваем систему СДУ

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds, \qquad (1)$$

которая может быть записана также в виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_t})dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t, \;\; \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{x}. \qquad (2)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** и **(ND-**η) Лекции 7. Для формулировки основного результата нам понадобится масштабирующая $2d \times 2d$ - матрица $\mathbb{T}_t$

$$\mathbb{T}_t = \begin{pmatrix} t\boldsymbol{I}_d & \boldsymbol{0}_d \\ \boldsymbol{0}_d & t^2\boldsymbol{I}_d \end{pmatrix}.$$

Наша ближайшая цель – доказать следующий результат.

Теорема B. *Пусть коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND-**η). *Тогда для любого* $t > 0$ *и любого* *начального условия* $x \in R^{2d}$ *закон распределения вектора решений* (X_t^1, X_t^2) *системы (2) при условии* $(X_0^1, X_0^2) = x$ *абсолютно непрерывен относительно меры Лебега в* R^{2d} *с плотностью* $y^{2d} \to p(t,x,y)$. *Более того, для любого T>0 найдётся постоянная* $C_T \geq 1$, *зависящая только от* T, Λ, $\kappa, d, \mathcal{E}$, *такая, что*

$$C_T^{-1} t^{-2d} \exp(-C_T t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - y)|^2)$$

$$\leq p(t,x,y)$$

$$\leq C_T t^{-2d} \exp(-C_T^{-1} t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - y)|^2), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\theta}_t(x) = (\theta_t^1(x), \theta_t^2(x))$ - *значение в* R^{2d} *в момент* t *решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\theta}_t^1 = b(\theta_t^1, \theta_t^2)$$
$$\dot{\theta}_t^2 = F(\theta_t^1, \theta_t^2) \tag{4}$$

с начальным условием $\boldsymbol{\theta}_0(x) = (\theta_0^1(x), \theta_0^2(x)) = x$.

Замечание 2. Для примера А.Н. Колмогорова с $k = 1$ решение системы (4) имеет следующий вид

$$\theta_t^1 = bt + x$$

$$\theta_t^2 = b\frac{t^2}{2} + xt + y,$$

поэтому, согласно (3),

$$C_T^{-1} t^{-2} \exp\left(-C_T\left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - xt - b\frac{t^2}{2}\right|^2}{t^3}\right]\right)$$

$$\leq p\left(t,(x,y),(x',y')\right)$$

$$\leq \quad C_T t^{-2} \exp\left(-C_T^{-1}\left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - xt - b\frac{t^2}{2}\right|^2}{t^3}\right]\right).$$

Воспользуемся тождеством

$$y' - y - xt - b\frac{t^2}{2} = y' - y - \frac{x' + x}{2}t + \frac{1}{2}t\left(x' - x - bt\right)$$

и неравенством Юнга: $2|AB| \le \lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2,\ \forall \lambda \in R.$ Выберем в неравенстве Юнга

$A = \frac{y' - y - \frac{x'+x}{2}t}{t^{3/2}},\ B = \frac{x' - x - bt}{2\sqrt{t}}$, и возьмём $\lambda > 1$ достаточно близким к 1, получим двустороннюю оценку (возможно, с другой константой C_T)

$$C_T^{-1} t^{-2} \exp\left(-C_T\left[\frac{\left|x' - x - bt\right|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - \frac{x + x'}{2}t\right|^2}{t^3}\right]\right)$$

$$\le p\left(t, (x,y), (x', y')\right)$$

$$\le \quad C_T t^{-2} \exp\left(-C_T^{-1}\left[\frac{\left|x' - x - bt\right|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - \frac{x + x'}{2}t\right|^2}{t^3}\right]\right)$$

Напомним, что в этом простейшем случае переходная плотность выписывается точно (формула (2) Лекции 7). Мы видим, что оценка (3) достаточно точна, она не «улавливает» только правильное значение константы C_T.

Для удобства читателя напомним Теорему Радона - Никодима, которая нам понадобится в дальнейшем.

Определение 11. *Пусть заданы две меры* μ *и* ν *на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Говорят, что мера* μ *абсолютно непрерывна относительно меры* ν, *если из того, что* $A \in \mathcal{F}, \nu(A) = 0$ *следует* $\mu(A) = 0$. *Меры* μ *и* ν *эквивалентны, если для* $A \in \mathcal{F}, \nu(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu(A) = 0$.

Определение 12. *Пусть заданы две меры* μ *и* ν *на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Говорят, что мера* μ *имеет плотность* φ *относительно меры* ν, *если для всех* $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \int_A \varphi \, d\nu$$

Часто пишут $\varphi = \frac{d\mu}{d\nu}$ *или* $d\mu = \varphi d\nu$.

Напомним также, что мера m на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется σ- *конечной,* если существует последовательность A_n элементов $\mathcal{F}$ такая, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ и $m(A_n) < \infty$. Очевидно, любая вероятностная мера σ- конечна.

Теорема (Радон-Никодим). *Рассмотрим две* σ- *конечные меры* μ *и* ν *на* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Тогда мера* μ *абсолютно непрерывна относительно меры* ν *тогда и только тогда, когда мера* μ *имеет плотность* φ *относительно меры* ν.

Замечание 3. Предположим, что неравенства (3) доказаны для СДУ (1) со сглаженными коэффициентами (6) (см. Лекцию 7) и с произвольным, но фиксированным $\varepsilon > 0$. Предположим также, что меры, порождённые процессами $X_t^\varepsilon = (X_t^{1\varepsilon}, X_t^{2\varepsilon})$

$$X_t^{1\varepsilon} = x_1 + \int_0^t b_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, dW_s,$$

$$X_t^{2\varepsilon} = x_2 + \int_0^t F_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, ds$$

слабо сходятся (при $\varepsilon \to 0$) в пространстве $C[0,T]$ к распределению процесса $X_t = (X_t^1, X_t^2)$

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds$$

Тогда (П. Биллингсли (1977), Теорема 2.1) для любого $0 \le t \le T$, любого открытого множества $G \in R^{2d}$ и любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$

$$\operatorname{liminf}_{\varepsilon_k \to 0} P_x\left(X_t^{\varepsilon_k} \in G\right) = \operatorname{liminf}_{\varepsilon_k \to 0} \int_G p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy \ge$$

$$P_x(X_t \in G).$$

Но для переходных плотностей $p^{\varepsilon_k}(t,x,y)$ системы (1) со сглаженными коэффициентами $b_{\varepsilon_k}(x), F_{\varepsilon_k}(x)$ и $\sigma_{\varepsilon_k}(x), x=(x_1,x_2)\in R^{2d}$, справедливы двусторонние оценки (3), причём константа C_T и отображение $\boldsymbol{\theta}_t(x_1,x_2)$ не зависят ни от последовательности ε_k, ни от выбора сглаживающей последовательности $\varphi_{\varepsilon_k}(x)$. Пусть $A\subset R^{2d}$ и Лебегова мера A равна нулю, $\lambda(A)=0$. Тогда и $\int_A \ p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy=0, \forall k=1,2,...$В силу регулярности меры Лебега в R^{2d} и оценок (3) получим, что $\forall n$ найдётся открытое множество G_n такое, что $A\subset G_n$ и $\int_{G_n} p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy\le\frac{1}{n}, \forall k=1,2,...$ (поскольку для $p^{\varepsilon_k}(t,x,y)$ предполагаем справедливость верхней оценки (3)). Следовательно

$$P_x(X_t\in A)\le P_x(X_t\in G_n)\le \operatorname{liminf}_{\varepsilon_k}\int\limits_{G_n} p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy\le\frac{1}{n}$$

В силу произвольности n заключаем, что $P_x(X_t\in A)=0$. По теореме Радона - Никодима отсюда следует, что существует измеримая функция $p(t,x,y)$ такая, что для любого борелевского множества B

$$P_x(X_t\in B)=\int_B \ p(t,x,y)dy.$$

Из того, что B произвольно, из определения слабой сходимости и того, что неравенства (3) выполнены для $p^{\varepsilon}(t,x,y)$ равномерно по ε следует, что переходная плотность $p(t,x,y)$ также допускает версию, удовлетворяющую неравенствам (3). В самом деле, пусть существует борелевское множество положительной меры Лебега B, $\lambda(B)=\delta>0$, такое, что при $y\in B$ нижняя граница (3) для $p(t,x,y)$ не имеет места, то есть

$$p(t,x,y)<C_T^{-1}t^{-2d}\exp(-C_T t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})|^2),$$

откуда

$$\int\limits_B p(t,x,y)dy<\int\limits_B C_T^{-1}t^{-2d}\exp(-C_T t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})|^2)\,dy\le$$

$$\int\limits_B p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy.$$

В силу регулярности Лебеговой меры в R^{2n} найдётся замкнутое множество $F \subset B, \lambda(F) > \delta/2$, для которого

$$\int_F p(t,x,y)dy < \int_F C_T^{-1} t^{-2d} \exp(-C_T t |\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y})|^2)\, dy \leq$$

$$\int_F p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy.$$

Но тогда

$$\limsup_{\varepsilon_k \to 0} P_x\left(X_t^{\varepsilon_k} \in F\right) > \int_F p(t,x,y)dy = P_x(X_t \in F),$$

что противоречит (П. Биллингсли (1977), Теорема 2.1) слабой сходимости мер $P_{x,t}^{\varepsilon_k}$, $P_{x,t}^{\varepsilon_k}(A) \triangleq P_x\left(X_t^{\varepsilon_k} \in A\right)$, к мере $P_{x,t}$, $P_{x,t}(A) = P_x(X_t \in A)$. Таким образом, нижняя граница для $p(t,x,y)$ имеет место почти всюду по мере Лебега в R^{2n}. Аналогично доказывается справедливость верхней границы в (3). Заметим, что при этом не утверждается, что плотность $p(t,x,y)$ гладкая.

Пусть

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^1 \partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2},$$

$x = (x^1, x^2) \in R^d \times R^d$, производящий оператор, соответствующий системе (1).

Определение 13. *Будем говорить, что проблема мартингалов имеет единственное решение, если для заданной начальной точки* $x \in R^{2d}$ *существует единственная вероятностная мера* $\mathbb{P}$ *на* $C(R^+, R^{2d})$ *такая, что, обозначая через* $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ *канонический процесс, имеем* $\mathbb{P}[X_0 = x] = 1$ *и для любой* $f \in C_c^2(R^{2d}, R)$

$$f(\boldsymbol{X_t}) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}_x f(\boldsymbol{X_s})ds \qquad (5)$$

является $\mathbb{P} -$ *мартингалом.*

Хорошо известно, что одним из условий слабой сходимости последовательности диффузионных процессов является (слабая) единственность решения проблемы мартингалов, соответствующей производящему оператору предельного процесса. Для операторов, удовлетворяющих условию равномерной эллиптичности, вопрос единственности решения проблемы мартингалов исследован достаточно давно и полно (D. Stroock, S. Varadhan (1979), R. Bass (1997)). Для вырожденных диффузий типа Колмогорова эти условия найдены совсем недавно. Сначала R. Bass и E. Perkins предложили новый метод доказательства единственности решения проблемы мартингалов для *равномерно эллиптических операторов* (R. Bass, E. Perkins (2009)). Затем S. Menozzi (2011) перенёс метод Басса и Перкинса на случай уравнений типа Колмогорова. Сформулируем соответствующий результат S. Menozzi.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** *и* (**ND**-η). *Тогда проблема мартингалов (5) для оператора* $\mathcal{L}_x$ *имеет решение и это решение (слабо) единственно.*

Из Предложения 1 и Теоремы 4.8 на стр. 515 монографии Ж. Жакода и А. Ширяева (1987) следует

Предложение 2. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** *и* (**ND**-η). *Тогда меры* P_x^{ε}, *порождённые процессами* $X_t^{\varepsilon}=(X_t^{1\varepsilon},X_t^{2\varepsilon})$, *слабо сходятся (при* $\varepsilon\to 0$*) в пространстве* $C[0,T]$ *к мере* P_x, *соответствующей распределению процесса* $X_t=(X_t^1,X_t^2)$.

Из Замечания 3 и Предложения 2 следует, что для доказательства Теоремы B достаточно доказать неравенства (3) для *сглаженных коэффициентов.*