Лекция 5.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова (продолжение).

Литература:

- R.N. Bhattacharya, R. Ranga Rao. Normal Approximation and Asymptotic Expansions. John Wiley & Sons, 1976.
- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.

Шаг 3. Контроль ошибки при переходе от ядра H_n к ядру H.
Введём следующие обозначения

$$\zeta_k(u) = \frac{1}{1+\|u\|^k}, \ \zeta_{\rho,k}(u) = \rho^{-d}\zeta_k\left(\frac{u}{\rho}\right),$$

$$K_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \left(L_x - \tilde{L}_x^y\right)\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

$$M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = 3n^{-1/2}\sum_{|\nu|=3}\sum_{|\mu|=1}\int_{R^d}\int_0^1 D_y^\mu q_y(\theta)(x-y)^\mu \times$$

$$\frac{\theta^\nu}{\nu!}D_x^\nu\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n}, x+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}}, y\right)(1-\delta)^2 d\delta d\theta.$$

Для дальнейшего нам понадобится лемма, которая доказывается применением классической многомерной локальной предельной теоремы (R. Bhattacharya and R.Rao (1976, Теорема 19.3). Доказательство этой леммы для случая $0 \le |\nu| \le 2$ содержится в работе V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.7).
Лемма 5. *Для всех $k > j$, для всех x и y и для всех ν, $0 \le |\nu| \le 4$, справедлива следующая оценка*

$$\left|D_x^\nu\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le C\rho^{-|\nu|}\zeta_{\rho,S-2}(y-x).$$

Здесь $\rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}$.

Лемма 6. *Для* $k > j+1$ *справедлива следующая оценка*

$$\left| H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - K_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) \right|$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \rho^{-1} \zeta_{\rho, S-4}(y-x),$$

где $\rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}, C < \infty$. *Для* $k = j+1$ *положим* $K_n = 0, M_n = H_n$.

Доказательство. Пусть $k > j+1$. Имеем

$$H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = H_n^1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - H_n^2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = n\left[\int_{R^d} p_n\left(\frac{1}{n}, x, z\right)\{\tilde{p}_n^y\,(\frac{k-j-1}{n}, z, y)\right.$$

$$\left. - \tilde{p}_n^y(\frac{k-j-1}{n}, x, y)\} dz\right], \qquad (1)$$

$$H_n^2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = n\left[\int_{R^d} \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, x, z\right)\{\tilde{p}_n^y\,(\frac{k-j-1}{n}, z, y)\right.$$

$$\left. -\tilde{p}_n^y(\frac{k-j-1}{n}, x, y)\} dz\right]. \qquad (2)$$

Произведём в правой части (1) замену переменных

$$\theta = \sqrt{n}(z-x) - \frac{1}{\sqrt{n}} b(x).$$

Обозначим $\lambda(z) = \tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n}, z, y\right)$, $h(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{n}} + \frac{b(x)}{n}$. Тогда (1) перепишем в виде

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=n\int\limits_{R^d} q_x(\theta)[\lambda(x+h(\theta))-\lambda(x)]d\theta. \qquad (3)$$

Разложим $\lambda(x)$ в ряд Тэйлора с остаточным членом

$$\lambda(x+h(\theta))-\lambda(x)=\sum_{1\le|\nu|\le 2}\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3\sum_{|\nu|=3}\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}\int\limits_0^1(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)d\delta.$$

Подставляя это разложение в (3), получим

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=L_x\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n},x,y\right)+\frac{1}{n}\sum_{|\nu|=2}\frac{b(x)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 q_x(\theta)\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)d\delta d\theta.$$

Аналогично получим

$$H_n^2\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=\tilde{L}_x^y\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n},x,y\right)+\frac{1}{n}\sum_{|\nu|=2}\frac{b(y)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 q_x(\theta)\frac{\tilde{h}(\theta)^\nu}{\nu!}(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)d\delta d\theta,$$

где $\tilde{h}(\theta)=\frac{\theta}{\sqrt{n}}+\frac{b(y)}{n}$. Для завершения доказательства достаточно доказать следующие два неравенства

$$\frac{1}{n}|b(x)^\nu-b(y)^\nu||(D^\nu\lambda)(x)|\le\frac{C}{\rho n}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),\forall\nu,|\nu|=2 \qquad (4)$$

$$\Bigg|3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1[q_x(\theta)\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)-q_y(\theta)\frac{\tilde{h}(\theta)^\nu}{\nu!}$$

$$\times (D^\nu \lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)](1-\delta)^2 d\delta d\theta - M_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\Big|$$

$$\leq \frac{C}{\rho\sqrt{n}}\zeta_{\rho,S-2}(y-x). \qquad (5)$$

Неравенство (4) следует из Леммы 5 и условия **B1**. Для доказательства (5) заметим, что при $|\nu| = 3$

$$\max\{\left|\tilde{h}(\theta)^\nu\right|, |h(\theta)^\nu|\} \leq Cn^{-3/2}(1+\|\theta\|)^3,$$

$$\left|\tilde{h}(\theta)^\nu - h(\theta)^\nu\right| \leq Cn^{-2}(1+\|\theta\|)^2\|x-y\|.$$

Кроме того, заметим, что $M_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)$ содержит члены первого порядка разложения в ряд Тэйлора разности $q_x(\theta) - q_y(\theta)$ под знаком интеграла. Поэтому левая часть (5) не превосходит

$$Cn^{-1}\|y-x\| \sum_{|\nu|=3}\int_{R^d}\int_0^1 \psi(\theta)(1+\|\theta\|)^2$$

$$\times (D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)(1-\delta)^2 d\delta d\theta$$

$$+Cn^{-\frac{1}{2}}\sum_{|\nu|=3}\int_{R^d}\int_0^1 \psi(\theta)(1+\|\theta\|)^3\{(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)$$

$$-(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\}d\delta d\theta + Cn^{-\frac{1}{2}}\|y-x\|^2\sum_{|\nu|=3}\int_{R^d}\int_0^1 \psi(\theta)\times$$

$$(1+\|\theta\|)^2(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)d\delta d\theta. \qquad (6)$$

Воспользуемся следующей грубой оценкой. Предположим, что $\|v\| \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{2^{S/2} \vee (\varepsilon^S+1)}{1+\|u\|^S}. \tag{7}$$

В самом деле,

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \ge \|u\|^2 - 2\varepsilon\|u\| = \|u\|^2\left(1-\frac{2\varepsilon}{\|u\|}\right),$$

поэтому, если $2\varepsilon \le \lambda\|u\|$, где $0<\lambda<1$, то

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{1}{1+\|u\|^S(1-\lambda)^{S/2}} \le \frac{(1-\lambda)^{-S/2}}{1+\|u\|^S}.$$

Если же $2\varepsilon > \lambda\|u\|$, то

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le 1 \le \frac{\lambda^{-S}(2\varepsilon)^S+1}{1+\|u\|^S}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{(1-\lambda)^{-S/2} \vee (\lambda^{-S}(2\varepsilon)^S+1)}{1+\|u\|^S}, \forall\lambda \in (0,1).$$

Полагая $\lambda = 1/2$, получим

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{2^{S/2} \vee (\varepsilon^S+1)}{1+\|u\|^S}.$$

Из наших предположений следует возможность (формального) дифференцирования классического разложения Эджворта для $\tilde{p}_n^y$, что влечёт следующую оценку

$$\left|(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)\right| \le C\rho^{-3}\zeta_{\rho,S}\big(y-x-\delta h(\theta)\big),$$

где $|\nu| = 3$. Аналогично получим

$$\left|(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\right| \le C\rho^{-3}\zeta_{\rho,S}\left(y-x-\delta\tilde{h}(\theta)\right).$$

Применяя (7) с $v = \delta h(\theta)/\rho$ и $\varepsilon = \|\theta\| + \frac{C}{\sqrt{n}}$, получим

$$\max\left\{\left|(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)\right|, \left|(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\right|\right\}$$

$$\le C\rho^{-3}(1+\|\theta\|^S)\zeta_{\rho,S}(y-x). \tag{8}$$

Поскольку

$$\left|\delta h(\theta)+\chi\delta\left(h(\theta)-\tilde h(\theta)\right)\right| \le \frac{C}{n}+\frac{\|\theta\|}{\sqrt{n}},$$

для ν с $|\nu|=4$ и χ с $|\chi|\le 1$ аналогично получим

$$\left|(D^\nu\lambda)\left(x+\delta h(\theta)+\chi\delta\left(h(\theta)-\tilde h(\theta)\right)\right)\right|$$

$$\le C\rho^{-4}(1+\|\theta\|^S)\zeta_{\rho,S}(y-x).$$

Поэтому разность под знаком интеграла во втором слагаемом в (6) не превосходит

$$\left|\{(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)-(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde h(\theta)\right)\}\right|$$

$$\le C\rho^{-4}n^{-1}\|y-x\|(1+\|\theta\|^S)\zeta_{\rho,S}(y-x). \qquad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (6), получим, что левая часть (5) не превосходит $\frac{C}{\sqrt{n}}\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-2}(y-x)$. Лемма доказана.

Шаг 4. Переход к вспомогательному ядру K_n+M_n.

С помощью Леммы 6 нетрудно оценить близость рядов

$$p_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=\sum_{r=0}^{n}\tilde p_n\otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)$$

и

$$\sum_{r=0}^{n}\tilde p_n\otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right).$$

Для доказательства следующей леммы мы будем пользоваться оценками, доказанными в статье V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.10 и Лемма 3.11):

Положим

$$\eta_\rho^{l,j,k}=\max\{\zeta_{\rho_1,S-4}*\ldots*\zeta_{\rho_l,S-4}\colon \rho_1\ge 0,\ldots\rho_l\ge 0,$$
$$\rho_1^2+\cdots+\rho_l^2=\rho^2\},$$

где " $*$ " $-$ обычная операция свёртки, $\rho^2=\frac{k-j}{n}$, $\zeta_{0,S-4}$ обозначает $\delta-$ функцию. Тогда

$$\eta_{\rho}^{l,j,k}(x) \le C^l \zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(x). \tag{10}$$

Кроме того, имеют место оценки

$$\left|H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),$$
$$\left|K_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),$$
$$\left|M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x).$$
$$(11)$$

Лемма 7. *Для* $0 \le j < k \le n$ *справедливо следующее представление*

$$p_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) + R\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$\left|R\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}.$$

Доказательство. По определению, для $r = 0$

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(0)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(0)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right).$$

Для $r = 1$ из Леммы 6 следует, что

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) + R_1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$\left|R_1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| = \left|\tilde{p}_n \otimes_n (H_n - K_n - M_n)\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=j}^{k-1} \frac{1}{n} \int_{R^d} \tilde{p}_n\left(\frac{i-j}{n}, x, z\right) |H_n - K_n - M_n| \left(\frac{k-i}{n}, z, y\right) dz$$

$$\leq \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{2,j,k}(y-x) \sum_{i=j}^{k-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n}{k-i}}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=j}^{k-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n}{k-i}} \leq \int_{j/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - v\right)^{-1/2} dv = \rho B\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

Поэтому

$$\left| R_1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) \right| \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{2,j,k}(y-x) \rho B\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Аналогичные рассуждения с использованием Леммы 6 и (11) приводят к оценке

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n{}^{(2)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(2)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) +$$

$$R_2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$\left| R_2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) \right| \leq \frac{2C^3}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{3,j,k}(y-x) \rho^2 B\left(1, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Для произвольного r получим при подходящем выборе $C_1 > C$

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n{}^{(r)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) +$$

$$R_r\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$\left| R_r\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) \right| \leq \frac{C_1^{r+1}}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{r+1,j,k}(y-x) \rho^r \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^{\mathrm{r}}}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)}.$$

Применяя оценку (10), получим

$$p_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) + R\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$

где

$$|R| \le \sum_{r=1}^{\infty}|R_r| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x)\sum_{r=1}^{\infty} C_2^{r+1}\rho^r \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\mathrm{r}}}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)} \le \frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x).$$

Лемма доказана.