Лекция 9.
Доказательство теоремы об оценках типа Аронсона для переходной плотности.

Литература:

- D. Nualart. The Malliavin calculus and related topics. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 2000.
- V. Konakov, S. Menozzi, S. Molchanov. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes. Annales de l'IHP, 2010, vol. 46, No.4, 908-923.
- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- J.-M. Coron. Control and nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, 136, AMS, 2007.

Мы рассматриваем систему СДУ

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds, \tag{1}$$

которая может быть записана также в виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_t})dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t, \tag{2}$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η). Как было показано выше, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай коэффициентов класса C^∞. В этом случае из Теоремы Хёрмандера (D. Nualart (2000), Теорема 2.3.3) следует, что для любого $t \in (0, T]$ вектор $(X_t^1, X_t^2)^*$ имеет бесконечно дифференцируемую плотность $p(s, t, x, y), x, y \in R^{2d}$. Более того, эта плотность удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова:

$$\partial_s p(s,t,x,y) + \mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} p(s,t,x,y) = 0,$$

где

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i^1 x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\partial_{x_i^2}$$

производящий оператор процесса $X_t = (X_t^1, X_t^2)$. Для получения верхней оценки мы хотим применить метод параметрикса. Успех метода зависит от правильно выбранного семейства «замороженных» гауссовских процессов. Семейство «замороженных» процессов получим, выбирая подходящую детерминированную кривую и линеаризуя уравнение (2) в окрестности этой кривой. В качестве такой кривой выберем решение $\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)$ системы *обыкновенных дифференциальных уравнений*, принимающее значение y в *конечный* момент T:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y) = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right), 0 \le t \le T, \boldsymbol{\theta}_{T,T}(y) = y.$$

Замороженный гауссовский процесс $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ является, таким образом, решением следующей линеаризованной около $\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)$ системы СДУ

$$d\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \left[\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right) + D_x\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}_t - \boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)\right]dt \\ +B\sigma\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)dW_t \qquad (3)$$

Ниже мы покажем, что при наших предположениях процесс $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ имеет гауссовскую переходную плотность, которую мы будем обозначать $\tilde{p}^{T,\boldsymbol{y}}(s,t,x,\cdot)$. В случае, когда точка замораживания и точка, в которой мы вычисляем плотность, совпадают, мы будем опускать верхние индексы, то есть вместо $\tilde{p}^{T,\boldsymbol{y}}(s,t,x,y)$ писать просто $\tilde{p}(s,t,x,y)$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}_{t,\boldsymbol{x}}^{T,\boldsymbol{y}}, 0 \le t \le T$, производящий оператор процесса $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$, определённого в (3). Как и в случае невырожденной диффузии, рассмотрим ядро $H(t,T,x,y)$

$$H(t,T,x,y) = \left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} - \tilde{\mathcal{L}}_{t,\boldsymbol{x}}^{T,\boldsymbol{y}}\right]\tilde{p}(s,t,x,y).$$

Затем, используя уравнения Колмогорова, получим

$$p(0,T,x,y) = \tilde{p}(0,T,x,y) + \int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z)H(t,T,z,y)dtdz. \quad (4)$$

Итерируя последнее равенство, получим, что для любого $N \ge 1$

$$p(0,T,x,y) = \tilde{p}(0,T,x,y) + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T \int_{R^{2d}} \tilde{p}(0,t,x,z) H^{\otimes k}(t,T,z,y)\,dtdz$$

$$+ \int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z) H^{\otimes (N+1)}(t,T,z,y)\,dtdz. \qquad (5)$$

В отличие от случая невырожденной диффузии, когда итерирование можно было продолжать до бесконечности и контролировать слагаемые ряда равномерно по k, в этом случае, при выполнении только условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), такой контроль в общем случае осуществить не удаётся (за исключением некоторых специальных случаев уравнения (1), рассмотренных в статье V. Konakov, S. Menozzi и S. Molchanov (2010). Поэтому используется другой подход. Соотношение (4) мы итерируем N раз, получаем соотношение (5) и затем доказываем, что при достаточно больших N остаточный член

$$\int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z) H^{\otimes (N+1)}(t,T,z,y)\,dtdz.$$

допускает гауссовскую оценку. Прежде чем приступить к выводу верхней оценки (3) Лекции 8, отметим одно *свойство подобия* системы (2). Для заданного $T > 0$ определим процесс $\hat{X}_t$ следующим образом:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_t = T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}\boldsymbol{X}_{Tt}\,,$$

где $2d \times 2d$ - матрица $\mathbb{T}_t$ имеет вид

$$\mathbb{T}_t = \begin{pmatrix} tI_d & \boldsymbol{0}_d \\ \boldsymbol{0}_d & t^2 I_d \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$ удовлетворяет СДУ

$$d\widehat{\boldsymbol{X}}_t = T^{3/2}\mathbb{T}_T^{-1}\boldsymbol{F}\big(T^{-1/2}\mathbb{T}_T\widehat{\boldsymbol{X}}_t\big)dt + B\sigma\big(T^{-1/2}\mathbb{T}_T\widehat{\boldsymbol{X}}_t\big)d\widehat{W}_t,$$

где $\widehat{W}_t = T^{-1/2}W_{Tt}$ – новый процесс броуновского движения. Полагая

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(x) = T^{3/2}\mathbb{T}_T^{-1}\boldsymbol{F}\big(T^{-1/2}\mathbb{T}_T x\big), \hat{\sigma}(x) = \sigma\big(T^{-1/2}\mathbb{T}_T x\big),$$

Получим

$$d\widehat{\boldsymbol{X}}_t = \widehat{\boldsymbol{F}}\big(\widehat{\boldsymbol{X}}_t\big)dt + B\hat{\sigma}\big(\widehat{\boldsymbol{X}}_t\big)d\widehat{W}_t \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет тот же вид, что и уравнение (2), причём при $T \le 1$ коэффициенты уравнения (6) снова удовлетворяют условиям $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η) с теми же самыми константами, а при $T > 1$ условия тоже выполнены, но с константами, умноженными на T^2. Выпуклое, замкнутое множество $\mathcal{E}$ в условии (**ND**-η) при этом преобразовании не меняется. При этом переходные плотности процессов $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$ и $\boldsymbol{X_t}$ связаны соотношением

$$\hat{p}(0,1,x,y) = T^{2d}p(0,T,T^{-\frac{1}{2}}\mathbb{T}_T x, T^{-\frac{1}{2}}\mathbb{T}_T y)$$

откуда

$$\forall x,y \in R^{2d}, p(0,T,x,y) = T^{-2d}\hat{p}\big(0,1,T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}x, T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}y\big) \quad (7)$$

Из равенства (7) ясно, как получить оценку для переходной плотности в момент T, если известна оценка в момент $t = 1$. Предположим, что мы получили двусторонние оценки (3) Теоремы B для переходной плотности $\hat{p}(0,1,x,y)$ процесса $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$:

$$C_T^{-1}\exp\Big(-C_T\big|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\big|^2\Big) \le \hat{p}(0,1,x,y)$$
$$\le C_T\exp\Big(-C_T^{-1}\big|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\big|^2\Big) \quad (8)$$

(постоянная C_T может зависеть от T, если исходный интервал наблюдений процесса имел вид $[0,T], T > 1$). Здесь $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t(x) = \big(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\big), 0 \le t \le 1$, - решение системы ОДУ

$$\frac{d\hat{\theta}_t^1}{dt} = \hat{b}\big(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\big)$$
$$\frac{d\hat{\theta}_t^2}{dt} = \hat{F}\big(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\big)$$

с начальным условием $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(x) = (\hat{\theta}_0^1(x), \hat{\theta}_0^2(x)) = x$. Подстановкой легко убедиться, что

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t(x) = T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}\boldsymbol{\theta}_{Tt}\big(T^{-1/2}\mathbb{T}_T x\big) \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая соотношение (7), получим искомую оценку (3) Теоремы B для $p(0,T,x,y)$. Таким образом, *достаточно доказать Теорему B только для* $t = 1$. Отметим ещё одно следствие соотношения (9). Отображение, задаваемое потоком $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t, 0 \le t \le 1$, является диффеоморфизмом пространства R^{2d} с липшицевым обратным отображением. Отсюда имеем для любых $x, y \in R^{2d}$:

$$C^{-1}\big|x-\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{-1}(y)\big|^2 \le \big|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\big|^2 \le C\big|x-\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{-1}(y)\big|^2.$$

Заменяя x на $T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}x$, y на $T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}y$ в последних неравенствах, учитывая (9) для прямого и обратного потоков, получим

$$C^{-1}|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2 \le |\mathbb{T}_T^{-1}[\boldsymbol{\theta}_T(x)-y]|^2 \le C|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2$$

$$\le C|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2, \qquad (10)$$

где константа C зависит только от пары $(\hat{b},\hat{F})^*$, она не зависит от T для $T \le 1$. Неравенства (10) имеют важное следствие: оценки (3) Теоремы B справедливы как с транспортировкой начального условия x *«потоком вперёд»*, т.е. потоком $\boldsymbol{\theta}_T$, так и с транспортировкой конечного условия y *«потоком назад»,* т.е. потоком $\boldsymbol{\theta}_T^{-1}$.

Приступим к доказательству верхней оценки (3)
в Теореме B. Как мы выяснили, достаточно доказать эту оценку для $T=1$. Запишем равенство (5) для $T=1$

$$p(0,1,x,y)=\tilde{p}(0,1,x,y)+\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\int_{R^{2d}}\tilde{p}(0,t,x,z)H^{\otimes k}(t,1,z,y)dtdz$$

$$+\int_0^1\int_{R^{2d}}p(0,t,x,z)H^{\otimes(N+1)}(t,1,z,y)dtdz. \qquad (11)$$

Для дальнейшего нам понадобится обозначение

$$g_{a,t}(y)=t^{-2d}\exp(-a^{-1}t|\mathbb{T}_t^{-1}y|^2)$$

С точностью до константы, зависящей от a и d, $g_{a,t}$ является гауссовской плотностью в R^{2d}. Для свёрток $g_{a,t}$ справедливы следующие простые оценки

Лемма 10. *Для любого* $a>0$ *существует постоянная* $c(a)$, *зависящая только от* a *и* d, *такая, что для любых* $\varepsilon,\varepsilon'>0$ *и любых* $x,x'\in R^{2d}$

$$c^{-1}(a)g_{\frac{a}{4},\varepsilon+\varepsilon'}(x-x') \le \int_{R^{2d}}g_{a,\varepsilon}(z-x)g_{a,\boldsymbol{\varepsilon}'}(z-x')dz$$

$$\le c(a)g_{a,\varepsilon+\varepsilon'}(x-x').$$

Доказательство. С точностью до константы, зависящей только от a *и* d, под знаком интеграла стоит значение плотности свёртки в нуле двух гауссовских плотностей со средними x и $-x'$ и ковариационными матрицами $[a/2]\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}$ и $[a/2]\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}$ соответственно. Сумма таких векторов – гауссовский вектор со средним $x-x'$ и ковариационной матрицей
$[a/2]\left(\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}+\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}\right)$, где

$$\left(\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}+\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}\right)=\begin{pmatrix}(\varepsilon+\varepsilon')I_d & \mathbf{0}_d\\ \mathbf{0}_d & \left(\varepsilon^3+\left(\varepsilon'\right)^3\right)I_d\end{pmatrix}$$

Имеем

$$\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\right)^{2i-1}\leq\frac{\varepsilon^{2i-1}+\left(\varepsilon'\right)^{2i-1}}{2}\leq\frac{\left(\varepsilon+\varepsilon'\right)^{2i-1}}{2},\qquad i=1,2.$$

откуда следуют неравенства

$$\frac{1}{4}(\varepsilon+\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{2}\leq\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}+\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}\leq(\varepsilon+\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{2},$$

$$-\frac{4}{a}(\varepsilon+\varepsilon')\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{-2}\leq-\frac{1}{a}\left[\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}+\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}\right]^{-1}\leq-\frac{\left(\varepsilon+\varepsilon'\right)}{a}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{-2}.$$

Кроме того

$$2^{-2d}\left(\varepsilon+\varepsilon'\right)^{4d}\leq\det\left[\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon}^{2}+\left(\varepsilon'\right)^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^{2}\right]\leq\left(\varepsilon+\varepsilon'\right)^{4d}.$$

Лемма доказана.

Для доказательства верхней оценки (3) Теоремы B нам понадобятся ещё две леммы. Первая лемма доказывается прямыми оценками гауссовской плотности $\tilde{p}(s,t,x,y)$, и ядра $H(t,T,x,y)$. Её доказательство содержится в статье F. Delarue, S. Menozzi (2010, Предложение 5.1). Важная вторая лемма доказывается сведением исходной задачи к детерминированной задаче управления со случайными коэффициентами. Доказательство её также содержится в статье F. Delarue, S. Menozzi (2010, Предложение 5.2).

Лемма 11. *Существует семейство констант* $C(N), N\geq 0$, *зависящих только от условий* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), *таких, что для всех* $N\geq 1, 0<t<1,$ *и* $x,y,z\in R^{2d}$

$$\tilde{p}(0,t,x,y) \le C(0) g_{C(0),t}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - y),$$
$$\left|H^{\otimes N}(t,1,z,y)\right| \le C(N)(1-t)^{\frac{N\eta}{2}-1} g_{C(N),1-t}\left(z - \boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right).$$

Подчеркнём, что из-за транспортировки начального условия потоком $\boldsymbol{\theta}$, при возрастании N константы $C(N)$ пересчитываются и, вообще говоря, растут с ростом N. Поэтому приходится обрывать ряд параметрикса, ограничиваясь конечным числом его членов. Для контроля остаточного члена в (11) применяется следующая лемма.

Лемма 12. *Пусть* $a > 0$. *Тогда существует постоянная* $C(a) > 0$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND**-η), *такая, что для всех* $t \in [0,1)$ *и* $x, y \in R^{\boldsymbol{2d}}$

$$\int\limits_{R^{2d}} p(0,t,x,z)(1-t)^{2d} g_{a,1-t}\left(z - \boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right) dz$$

$$\le C(a) g_{C(a),1}(\boldsymbol{\theta}_1(x) - y).$$

Докажем теперь верхнюю оценку Теоремы B, используя Леммы 10-12.

Доказательство верхней оценки в Теореме B.

Из свойств подобия системы (2) (см. равенство (5)) следует, что достаточно получить верхнюю оценку для случая $t = 1$. Первое слагаемое правой части (11) оценим с помощью первого неравенства Леммы 11, где следует положить $t = 1$. Последнее слагаемое правой части (11) оценим с помощью второго неравенства Леммы 11 с $N + 1 = \left\lceil \frac{(4d+2)}{\eta} \right\rceil$. При таком выборе N

$$\left\lceil \frac{(4d+2)}{\eta} \right\rceil \frac{\eta}{2} - 1 \ge \frac{4d+2}{2} - 1 = 2d$$

и далее применяем оценку Леммы 12. Чтобы оценить сумму в (11), применим Лемму 10 и Лемму 11. Имеем для $k \ge 1$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{R^{2d}} \tilde{p}(0,t,x,z)\left|H^{\otimes k}(t,1,z,y)\right| dzdt \le C(k) \int\limits_0^1 \int\limits_{R^{2d}} (1-t)^{\frac{k\eta}{2}-1}$$
$$\times g_{C(k),t}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - z) g_{C(k),1-t}\left(z - \boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right) dzdt$$

$$\leq C(k)\int_0^1 (1-t)^{\frac{k\eta}{2}-1}\, g_{C(k),1}\left(\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)dt,$$

где постоянная $C(k)$ зависит только от k и условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η). Поток $\boldsymbol{\theta}_{t,1}$ является диффеоморфизмом из R^{2d} *в* R^{2d} с обратным $\boldsymbol{\theta}_{1,t}$. Из полугруппового свойства потока $\boldsymbol{\theta}$ следует $|\boldsymbol{\theta}_1(x)-y| = \left|\boldsymbol{\theta}_{1,t}\left(\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)\right|$. Поскольку $\boldsymbol{\theta}_{1,t}$ - Липшицев диффеоморфизм, имеем: $|\boldsymbol{\theta}_1(x)-y| \leq C\left|\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right|$, где постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η) (C может быть выбрана независимо от t, поскольку константа Липшица может быть выбрана равномерно по $0<t<1$). Доказательство верхней оценки (8) завершается следующим очевидным замечанием:

$$g_{C(k),1}(y) \leq g_{C(k),1}(y') \text{ при } |y| \geq |y'|.$$

Для доказательства нижней оценки плотности нам понадобятся некоторые элементарные факты из теории управления конечномерными линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Конечномерные линейные управляемые системы.

Начнём с необходимых обозначений. Для $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *и* $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ мы будем обозначать через $\mathbb{L}(R^k; R^l)-$ множество линейных отображений из R^k в R^l. Часто мы будем отождествлять $\mathbb{L}(R^k; R^l)$ с множеством $\mathcal{M}_{k,l}(R)$ - множеством $k\times l$ матриц с вещественными коэффициентами. Рассмотрим линейную систему управления с коэффициентами, зависящими от времени

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, t \in [T_0, T_1]. \qquad (12)$$

Здесь $A: (T_0,T_1) \to \mathbb{L}(R^n; R^n)$ - элемент $L^\infty\left((T_0,T_1); \mathbb{L}(R^n;R^n)\right)$ и $B: (T_0,T_1) \to \mathbb{L}(R^m; R^n)$-элемент $L^\infty\left((T_0,T_1); \mathbb{L}(R^m;R^n)\right)$.Состоянием системы является $x(t) \in R^n$, управление $u(t) \in R^m$, $\dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$.
Напомним, что $L^\infty -$ пространство измеримых, существенно ограниченных функций

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0: |f(t)| \leq C \ \text{п.н.}\}.$$

Определение 14. *Пусть* $b \in L^1\left((T_0,T_1); R^n\right)$. *Отображение* $x: [T_0,T_1] \to R^n$ *является решением системы*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), t \in (T_0, T_1),$$

если $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *и удовлетворяет*

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \big(A(t)x(t) + b(t)\big)dt, \ \ \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2.$$

В частности, для $x^0 \in R^n$ *решение* ***задачи Коши***

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), t \in (T_0, T_1), x(T_0) = x^0, \qquad (13)$$

- *это функция* $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *такая, что*

$$x(\tau) = x^0 + \int_{T_0}^{\tau} \big(A(t)x(t) + b(t)\big)dt, \ \ \forall \tau \in [T_0, T_1].$$

Хорошо известно, что для каждой $b \in L^1\big((T_0, T_1); R^n\big)$ и для каждой $x^0 \in R^n$ задача Коши (13) имеет единственное решение.

Определение 15. *Линейная система (12)* ***допускает управление,*** *если для каждой пары* $(x^0, x^1) \in R^n \times R^n$ *найдётся* $u \in L^2\big((T_0, T_1); R^m\big)$ *такая, что решение* $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *задачи Коши (13) удовлетворяет* $x(T_1) = x^1$. *Саму функцию* u *будем называть* ***допустимым управлением****. Таким образом, можно сказать, что линейная система (12) допускает управление, если для каждой пары* $(x^0, x^1) \in R^n \times R^n$ *множество допустимых управлений не пусто.*

Мы хотим сформулировать необходимое и достаточное условие того, что система (12) допускает управление. Условие формулируется в терминах *резольвенты* линейной системы $\dot{x} = A(t)x$.

Определение 16. ***Резольвента*** $\mathcal{R}$ *линейной системы* $\dot{x} = A(t)x$ *- это отображение* $\mathcal{R}: [T_0, T_1]^2 \to \mathbb{L}(R^n; R^n)$ *такое, что для каждого фиксированного* $t_2 \in [T_0, T_1]$, *отображение*

$$\mathcal{R}(\cdot, t_2): [T_0, T_1] \to \mathbb{L}(R^n; R^n), t_1 \to \mathcal{R}(t_1, t_2),$$

является решением задачи Коши

$$\dot{\mathcal{M}} = A(t)\mathcal{M}, \mathcal{M}(t_2) = Id_n,$$

где Id_n *обозначает единичную* $n \times n$ *матрицу.*

Доказательства следующих трёх Предложений и Теоремы содержатся в книге J. Coron (2007).

Предложение 3.

1. $\mathcal{R} \in C^0\big([T_0, T_1]^2; \mathbb{L}(R^n; R^n)\big)$,
2. $\mathcal{R}(t_1, t_1) = Id_n, \forall t_1 \in [T_0, T_1]$,
3. $\mathcal{R}(t_1, t_2)\mathcal{R}(t_2, t_3) = \mathcal{R}(t_1, t_3), \forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3$.

В частности, $\mathcal{R}(t_1, t_2)\mathcal{R}(t_2, t_1) = Id_n, , \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2$.

4. Если $A \in C^0\big([T_0, T_1]; \mathbb{L}(R^n; R^n)\big)$, то $\mathcal{R} \in C^1\big([T_0, T_1]^2; \mathbb{L}(R^n; R^n)\big)$ и

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}(t, \tau) = A(t)\mathcal{R}(t, \tau), \forall (t, \tau) \in [T_0, T_1]^2, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}(t, \tau) = -\mathcal{R}(t, \tau)A(\tau), \forall (t, \tau) \in [T_0, T_1]^2. \tag{15}$$

Замечание 4. Равенство (14) следует из определения резольвенты. Равенство (15) может быть получено из (14) дифференцированием тождества $\mathcal{R}(t_2, t_1)\mathcal{R}(t_1, t_2) = Id_n$ по t_2.

Главное свойство резольвенты состоит в том, что с её помощью можно явно выписать решение задачи Коши (13).

Предложение 4. (Принцип Дюамеля). *Решение задачи Коши (13) имеет вид*

$$x(t_1) = \mathcal{R}(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{R}(t_1, \tau)b(\tau)d\tau, \ \ \forall (t_0, t_1) \in [T_0, T_1]^2.$$

В частности,

$$x(t) = \mathcal{R}(t, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{t} \mathcal{R}(t, \tau)b(\tau)d\tau, \ \ \forall t \in [T_0, T_1].$$

То, что $x(t_1)$ является решением задачи Коши (13), проверяется прямым дифференцированием по t_1.

Определение 17. *Матрицей Грама системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \, , t \in [T_0, T_1].$$

называется симметричная $n \times n$ *матрица*

$$\mathfrak{C} \triangleq \int_{T_0}^{T_1} \mathcal{R}(T_1, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\mathcal{R}^*(T_1, \tau)d\tau. \tag{16}$$

Теорема (Калман-Хо-Нарендра). *Линейная система* $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ *допускает управление тогда и только тогда когда её матрица Грама обратима.*

Предложение 5. *Если линейная система (12) допускает управление, то*

$$I([T_0, T_1], x^0, x^1) \triangleq \inf\left\{\int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 dt\right\} : x(T_0) = x^0, x(T_1) = x^1\}$$

достигается на единственном (п.н.) элементе $\bar{u}(t)$, *где*

$$\bar{u}(t) = B^*(t)\mathcal{R}^*(T_1, t)\mathfrak{C}^{-1}(x^1 - \mathcal{R}(T_1, T_0)x^0), t \in (T_0, T_1). \qquad (17)$$

Замечание 5. Для любого $x \in R^n$

$$x^*\mathfrak{C}x = \int_{T_0}^{T_1} |B^*(\tau)\mathcal{R}^*(T_1, \tau)x|^2\, d\tau.$$