Лекция 6.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова (продолжение).

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.

Шаг 5. Контроль ошибки при замене $\tilde{p}_n$ на $\tilde{p}$.
Мы хотим оценить погрешность при замене ряда

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}$$

рядом

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}.$$

Лемма 8. *Для* $0 \le j < k \le n$ *справедлива следующая оценка:*

$$\left| \sum_{r=0}^{n} (\tilde{p} - \tilde{p}_n) \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)} \left(\frac{k-j}{n}, x, y \right) \right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\rho, \frac{S-2d-4}{d}}(y - x).$$

Доказательство. Следующая оценка следует из классической многомерной локальной предельной теоремы, доказательство её содержится в работе V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.8).

$$\left| \tilde{p}\left(\frac{k-j}{n}, x, y \right) - \tilde{p}_n \left(\frac{k-j}{n}, x, y \right) \right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \rho^{-1} \zeta_{\rho, S-4}(y - x).$$

Используя эту оценку и неравенства (11) Лекции 5, надо, фактически, дословно повторить доказательство Леммы 7. Читатель может проделать это в качестве упражнения.

Учитывая все предыдущие оценки, мы видим, что нам осталось сделать последний шаг.

Шаг 6. Контроль погрешности при замене ядра $K_n + M_n$ ядром H.
Мы хотим оценить погрешность, возникающую при переходе от ряда

$$\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\,(1, x, y)$$

к ряду

$$\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1, x, y).$$

Имеем

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\,(1, x, y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1, x, y)\right| \le$$

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1, x, y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)}(1, x, y)\right| +$$

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)}(1, x, y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1, x, y)\right|$$

$$\triangleq T_1 + T_2.$$

Оценим сначала слагаемое T_1. Для $r = 1$ имеем

$$\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right) - \tilde{p} \otimes_n H\left(\frac{k}{n}, x, y\right) = \tilde{p} \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n}, x, y\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{R^d} \tilde{p}(\frac{j}{n}, x, z)\, M_n\left(\frac{k-j}{n}, z, y\right) dz =$$

$$n^{-3/2} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\nu|=3} \sum_{|\mu|=1} a_{\nu,\mu}(j), \qquad (1)$$

где

$$a_{\nu,\mu}(j) = 3\int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 \tilde{p}(\frac{j}{n},x,z)D_y^\mu q_y(\theta)(z-y)^\mu \times$$

$$\frac{\theta^\nu}{\nu!}D_z^\nu \tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n},z+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}},y\right)(1-\delta)^2 d\delta d\theta dz. \qquad (2)$$

Напомним, что $M_n\left(\frac{k-j}{n},z,y\right) = H_n\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)$ при $k = j+1,$ и в этом случае, согласно оценкам (10) и (11) Лекции 5,

$$\frac{1}{n}\left|\int\limits_{R^d}\tilde{p}\left(\frac{k-1}{n},x,z\right)H_n\left(\frac{1}{n},z,y\right)dz\right| \le \frac{C}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x)$$

$$\le \frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \rho = \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только такие индексы j, для которых $k-j > 2$, в этом случае, очевидно, $\frac{1}{2} < \frac{k-j-1}{k-j} < 1$. Рассмотрим в (1) два подмножества индексов: $J_1 = \left\{j: j \le \frac{k}{2}\right\}$ и $J_2 = \left\{j: j > \frac{k}{2}\right\}$. Для $j \in J_1$, с учётом Леммы 5 и оценки (7) Лекции 5, получим следующую границу для $a_{\nu,\mu}(j)$:

$$|a_{\nu,\mu}(j)| \le C\int\limits_{R^d}\tilde{p}\left(\frac{j}{n},x,z\right)\rho_2^{-2}\,\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz \le$$

$$C\rho_2^{-2}\int\limits_{R^d}\zeta_{\rho_1,S-4}(z-x)\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz \le C\rho_2^{-2}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x) \qquad (3)$$

где $\rho_1 = \sqrt{\frac{j}{n}}, \rho_2 = \sqrt{\frac{k-j}{n}}, \rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{k}{n}$. Подставляя оценку (3) в (1), получим

$$n^{-3/2}\left|\sum_{j\in J_1}\sum_{|\nu|=3}\sum_{|\mu|=1}a_{\nu,\mu}(j)\right| \le$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\sum_{j\in J_1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left(\frac{k-j}{n}\right)}\le$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\int\limits_{0}^{k/2n}\frac{du}{\left(\frac{k}{n}-u\right)}=$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\left(\ln\frac{k}{n}-\ln\frac{k}{2n}\right)=$$

$$C(\ln 2)\,n^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь $a_{\nu,\mu}(j)$, $j\in J_2$. Пусть $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d),\mu=(\mu_1,\dots,\mu_d)$. Поскольку $|\mu|=1$, существует индекс l такой, что $\mu_l=1$. Обозначим его через $l(\mu)$. Рассмотрим сначала случай $\nu_{l(\mu)}<3$. Тогда, поскольку $|\nu|=3$, существует индекс $l^*\ne l(\mu)$ такой, что $\nu_{l^*}\ge 1$. Выполнив интегрирование по частям по переменной z_{l^*}, получим

$$a_{\nu,\mu}(j)=3\int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial z_{l^*}}\tilde p(\frac{j}{n},x,z)D_y^{\mu}q_y(\theta)(z_{l(\mu)}-y_{l(\mu)})$$

$$\frac{\theta^{\nu}}{\nu!}D_z^{\nu^*}\tilde p_n^{y}\left(\frac{k-j-1}{n},z+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}},y\right)(1-\delta)^2d\delta d\theta dz.$$

Здесь мультииндекс ν^* имеет те же компоненты, что и исходный мультииндекс ν, кроме компоненты с номером l^*. По переменной z_{l^*} выполнялось интегрирование по частям, поэтому $\nu^*_{l^*}=\nu_{l^*}-1$ и $|\nu^*|=2$. Отсюда, снова пользуясь оценкой (7) Лекции 5 и **А3**, получаем верхнюю границу

$$\left|a_{\nu,\mu}(j)\right|\le C\int\limits_{R^d}\left|\frac{\partial}{\partial z_{l^*}}\tilde p\left(\frac{j}{n},x,z\right)\right|\rho_2^{-1}\,\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz\le$$

$$C\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{5}$$

Если же $\nu_{l(\mu)} = 3$, то подынтегральное выражение в (2) как функция переменной $z_{l(\mu)}$ имеет вид

$$\int f\left(z_{l(\mu)}\right)\left(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)}\right)g^{(3)}\left(z_{l(\mu)}\right)dz_{l(\mu)}.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия на бесконечности для f и g, получим

$$\int f\left(z_{l(\mu)}\right)\left(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)}\right)g^{(3)}\left(z_{l(\mu)}\right)dz_{l(\mu)} =$$

$$\int f\left(z_{l(\mu)}\right)\left\{\left[\left(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)}\right)g\left(z_{l(\mu)}\right)\right]^{(3)} - 3g^{(2)}\left(z_{l(\mu)}\right)\right\}dz_{l(\mu)} =$$

$$-\int f'\left(z_{l(\mu)}\right)\left[\left(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)}\right)g''\left(z_{l(\mu)}\right) - g'\left(z_{l(\mu)}\right)\right]dz_{l(\mu)}.$$

К последнему интегралу применимы те же оценки, что и при выводе (5), откуда снова получаем

$$\left|a_{\nu,\mu}(j)\right| \le C\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{6}$$

Из (5), (6) следует, что

$$n^{-3/2}\left|\sum_{j\in J_2}\sum_{|\nu|=3}\sum_{|\mu|=1} a_{\nu,\mu}(j)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x)\times$$

$$\sum_{j\in J_2}\frac{1}{n}\rho_1^{-1}\rho_2^{-1} \le \frac{C}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x)\int\limits_0^{k/n} x^{-1/2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^{-1/2}dx$$

$$\le \frac{C}{\sqrt{n}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{7}$$

Из (1), (4) и (7) следует оценка при $r = 1$:

$$\left|\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right) - \tilde{p} \otimes_n H\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{2,0,k}(y - x). \tag{8}$$

Докажем, что для $r > 1$ справедлива оценка

$$\left|\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)}\left(\frac{k}{n}, x, y\right) - \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\right| \leq$$

$$\frac{rC^r \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{r-1}}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \rho^{r-1} \eta_\rho^{r+1,0,k}(y - x) \tag{9}$$

Тогда из оценки (10) Лекции 5 и (9) будет следовать, что

$$T_1 \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y - x). \tag{10}$$

Для доказательства (9) запишем рекуррентное соотношение

$$\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r+1)}\left(\frac{k}{n}, x, y\right) - \tilde{p} \otimes_n H^{(r+1)}\left(\frac{k}{n}, x, y\right) =$$

$$\left[\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)} - \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right] \otimes_n (H + M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right) +$$

$$\left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right) \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n}, x, y\right). \tag{11}$$

Для оценки $\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}$ мы воспользуемся неравенствами, которые мы сформулируем в виде задачи.

Задача 4. При $r \geq 1$ справедливы неравенства

$$\left|\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{j}{n}, x, z\right)\right| \leq \frac{C^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \rho_1^r p_c\left(\frac{j}{n}, x, z\right), \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{j}{n}, x, z\right)\right]\right| \leq \frac{C^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \rho_1^{r-1} p_c\left(\frac{j}{n}, x, z\right),$$

где $\rho_1 = \sqrt{j/n}$.

Неравенства (12) позволяют дословно повторить вывод оценки для $\tilde{p} \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n}, x, y\right)$ (неравенство (7)), заменяя в рассуждениях $\tilde{p}$ на менее сингулярную функцию $\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}$, и получить неравенство

$$\left|\left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right) \otimes_n M_n\right)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\Big| \leq \frac{C^{r+1}}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \rho^r \eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \qquad (13)$$

Используя последовательно соотношения (11), нетрудно получить оценку (9). Покажем, как это сделать для $r = 2$, для $r > 2$ вычисления аналогичны. Из (13) при $r = 1$ получим

$$\left|\left(\tilde{p} \otimes_n H\right) \otimes_n M_n\right)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\Big| \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \rho \eta_\rho^{2,0,k}(y-x), \qquad (14)$$

а из полученной выше оценки (8) и неравенств (10) и (11) Лекции 5

$$\left|[\tilde{p} \otimes_n (H + M_n) - \tilde{p} \otimes_n H] \otimes_n (H + M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\right| \leq$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_{\rho_1}^{2,0,j}(z-x)\rho_2^{-1}\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{3,0,k}(y-x) \times$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - \frac{j}{n}}} \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{3,0,k}(y-x)\rho \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \qquad (15)$$

Складывая (14) и (15), и учитывая, что $\eta_\rho^{2,0,k}(y-x) \leq \eta_\rho^{3,0,k}(y-x)$, получим (9) при $r = 2$. Продолжая итерации, получим (9) для любого $r \geq 1$.

Оценим теперь T_2.

$$T_2 = \left|\sum_{r=0}^{n} [\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)} - \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}](1, x, y)\right|.$$

Заметим, что

$$(H-K_n)\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)=\left(L_z-\tilde{L}_z^y\right)\left[\tilde{p}-\tilde{p}_n^y\right]\left(\frac{k-j}{n},z,y\right).$$

Условия **А1-А3** и **В1** позволяют (формально) дифференцировать два раза классическое разложение Эджворта для разности $\left[\tilde{p}-\tilde{p}_n^y\right]\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)$, что приводит к оценке

$$\left|(H-K_n)\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)\right|\le\frac{C}{\sqrt{n}}\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-2}(y-z). \tag{16}$$

Отсюда для $r=1$

$$\left|[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)](\frac{k}{n},x,y)\right|=$$

$$\left|\tilde{p}\otimes_n(H-K_n)(\frac{k}{n},x,y)\right|\le\frac{C^2}{\sqrt{n}}\rho B\left(1,\frac{1}{2}\right)\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{17}$$

Запишем рекуррентное соотношение, аналогичное (11)

$$\left[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)^{(r+1)}-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r+1)}\right]\left(\frac{k}{n},x,y\right)=$$

$$\left[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)^{(r)}-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\right]\otimes_n(H+M_n)\left(\frac{k}{n},x,y\right)$$

$$+\left[\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\right]\otimes_n(H-K_n)\left(\frac{k}{n},x,y\right). \tag{18}$$

Задача 5. Используя неравенства (11) Лекции 5, показать, что

$$\left|\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k}{n},x,y\right)\right|\le C^{r+1}\rho^r\eta_\rho^{r+1,0,k}(y-x)\times$$

$$B\left(\frac{1}{2},1\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\times\ldots\times B\left(\frac{1}{2},\frac{r+1}{2}\right)=$$

$$C^{r+1}\rho^r\eta_\rho^{r+1,0,k}(y-x)\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^r}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}. \tag{19}$$

Из (16) – (19), аналогично оценке для T_1, получим оценку для T_2

$$T_2\le\frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x). \tag{20}$$

Из (10) и (20) получаем

$$\left|\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}\right| \le$$

$$\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x).$$

Запишем теперь всю цепочку полученных аппроксимаций. Внизу, под стрелкой, мы будем указывать оценку погрешности, возникающую при этом переходе, а также где была получена эта оценка. Положим $S' = \frac{S-2d-4}{d}$.

$$p(1,x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes H^{(r)}(1,x,y) \underbrace{\rightarrow}_{\frac{C}{\sqrt{n}} p_C(1,x,y);\ \text{Шаг } 2}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y) \underbrace{\rightarrow}_{C \exp(-n) p_C(1,x,y);\ \text{Шаг } 1} \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \text{Шаг } 6} \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y) \underbrace{\rightarrow}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \text{Лемма } 8}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y) \underbrace{\rightarrow}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \text{Лемма } 7}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n {H_n}^{(r)}(1,x,y) = p_n(1,x,y).$$

Теорема А полностью доказана.