Лекция 1.
Марковское семейство. Инфинитезимальный оператор, производящий оператор. Обратное и прямое уравнения А.Н.Колмогорова. Фундаментальное решение.

Литература:

- А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Москва, «Наука», 1975.
- А.М.Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи математических наук, т. XVII, вып. 3 (105), с. 3-146, 1962.
- А. В. Скороход. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевского университета, 1961.
- Stroock, D.W., Varadhan, S. R.: Multidimensional diffusion processes. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1979.
- E. E. Levi. Sulle equazioni lineare totalemente ellittiche alle derivati parzili. Rend. Circ. Matem. Palermo 24, 1907, 275-317.
- McKean, H.P., Singer, I.M.: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J. Differential Geometry 1, 43–69, 1967.

Введение. Опишем класс вероятностных задач, которые мы будем рассматривать. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана последовательность разбиений $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}, n = 1,2, \dots,$ и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрерывным пространством состояний. Цепи $X_t^{(n)}$ определены на решётке Γ_n, имеют начальное распределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а вероятность перехода за один шаг имеет плотность

$$P^{(n)}(\frac{1}{n}, x, A) = P\left(X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} \in A \middle| X_{\frac{i}{n}}^{(n)} = x\right) = \int\limits_A p_{\frac{i}{n},x}^{(n)}\left(\frac{1}{n}, x, z\right) dz.$$

При этом условии вероятность перехода за n шагов также абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность $p^{(n)}(1, x_0, z)$. Нас интересуют условия, при которых плотность $p^{(n)}(1, x_0, z)$ можно аппроксимировать плотностью некоторого диффузионного процесса $p(1, x_0, z)$, то есть условия, при которых справедлива локальная предельная теорема. Следует сказать, что имеется значительное число работ, в которых для рассматриваемой схемы изучена **слабая** сходимость мер (переходных вероятностей) $P^{(n)}(1, x_0, A)$ к переходной вероятности $P(1, x_0, A)$ некоторого предельного диффузионного процесса. Первые общие результаты о слабой сходимости были получены А.В. Скороходом (1961). Результаты А.В. Скорохода позволяли рассматривать также процессы и цепи *со скачками*. Для *непрерывной* диффузии наиболее общие результаты о слабой сходимости были получены в монографии D. Stroock and S.Varadhan (1979). Ими был развит подход, основанный на решении так называемой «проблемы мартингалов». Следует сказать, что как А. В. Скороход, так и D. Stroock and S.Varadhan для получения своих результатов использовали **вероятностные методы**. Для получения *локальных предельных теорем* мы будем использовать **аналитический метод**, основанный на специальном варианте метода «параметрикс». Метод параметрикса в его классическом виде, предложенном Е. Е. Леви, известен с 1907 года. Однако для наших целей этот вариант метода параметрикса непригоден. В 1967 году Мак Кин и Зингер предложили вариант метода, который, как оказалось, допускает дискретный аналог, прекрасно приспособленный для изучения аппроксимаций и получения упомянутых выше локальных предельных теорем. Целью настоящего курса является введение слушателей в метод параметрикса, обзор задач, поддающихся решению этим методом, а также формулировка некоторых нерешённых задач.

Напомним некоторые необходимые нам в дальнейшем понятия. Для простоты изложения мы будем рассматривать только однородные марковские процессы, хотя всё изложенное переносится и на неоднородный случай.

Определение 1. Мы говорим, что функция $P(t, x, \Gamma)$, определённая для $t \in [0, T], x \in R^d, \Gamma \in \mathfrak{B}^d$ ($\mathfrak{B}^d - \sigma$ – алгебра борелевских множеств в R^d) является ***переходной функцией марковского процесса*** ξ_t, если:

a) При фиксированных t, x функция $P(t, x, \cdot)$ является вероятностной мерой на $\sigma -$ алгебре $\mathfrak{B}^d$.

b) При фиксированных t, Γ функция $P(t,\cdot,\Gamma)$ измерима относительно $\sigma -$ алгебры $\mathfrak{B}^d$.
c) $P(0,x,\Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.
d) Для любых $s \le t, \Gamma \in \mathfrak{B}^d$ имеет место равенство почти наверное

$$P\{\xi_t \in \Gamma | \xi_s\} = P(t-s, \xi_s, \Gamma).$$

Заметим, что требования a) – c) налагаются только на переходную функцию $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ и не касаются случайного процесса $\xi_t(\omega)$, тогда как требование d) говорит о связи между собой этих двух объектов. В дальнейшем мы используем обозначение

$$\mathcal{F}_T = \sigma\{\xi_t, t \in T\}.$$

Определение 2. Мы говорим, что набор элементов $(\xi_t(\omega), P_{,x})$ является ***однородным марковским семейством с переходной функцией*** $P(t,x,\Gamma)$, если при любых x

1. Случайный процесс $\xi_t(\omega), t \in [0,T]$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_{\ge 0}, P_x)$ - марковский, то есть для любых $x, A \in \mathcal{F}_{[0,t]}, B \in \mathcal{F}_{\ge t}$ должно быть
$$P_x(AB|\xi_t) = P_x(A|\xi_t)P_x(B|\xi_t)$$
$P_x -$ почти наверное; это свойство иногда выражают словами как независимость «прошлого» от «будущего» при фиксированном «настоящем».
2. Этот марковский процесс обладает указанной переходной функцией;
3. $P_x\{\xi_0 = x\} = 1$.

Заметим, что п. 2 означает, что для $t \le u$, для любого $x \in R^d$ и Γ из $\mathfrak{B}^d$ $P_x -$ почти наверное справедливо равенство

$$P_x\{\xi_u \in \Gamma | \mathcal{F}_{\le t}\} = P(u-t, \xi_t, \Gamma)$$

(заметим, что выражение в правой части не зависит не только от поведения процесса на отрезке от 0 до t, за исключением последней точки, но также и от x).

В дальнейшем нас будут интересовать специальные классы марковских семейств, а именно, ***диффузионные процессы в*** $\boldsymbol{R^d}$. Напомним сначала определение инфинитезимального оператора. Пусть в банаховом пространстве E задана полугруппа ограниченных линейных операторов $P^t, 0 \le t < \infty, P^0 = I$.

Инфинитезимальный оператор A этой полугруппы – это линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, определённый на некотором линейном подпространстве D_A пространства E. Значение оператора A на элементе $f \in D_A$ есть следующий предел по норме пространства E

$$Af = \lim_{t\to\infty} t^{-1}(P^t f - f)$$

Полугруппа операторов P^t, *соответствующая переходной функции* $P(t,x,\Gamma)$, имеет вид

$$P^t f(x) = \int f(y)P(t,x,dy).$$

Перечислим основные свойства этих операторов:

1. P^t - линейные операторы в соответствующем банаховом пространстве;
2. $P^t 1 = 1$;
3. $P^0 = I$;
4. $P^{t+s} = P^t P^s$ (полугрупповое свойство).

Определение 3. Марковское семейство $(\xi_t(\omega), P_x)$ на фазовом пространстве $(R^d, \mathfrak{B}^d)$ мы будем называть ***диффузионным процессом в*** $\boldsymbol{R^d}$, если

a) его инфинитезимальный оператор определён на всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функциях и существуют непрерывные векторная функция $(b_i(x))$ и матричная функция $\left(a_{ij}(x)\right)$ (причём матрица $\left(a_{ij}(x)\right)$ при любом x должна быть симметрична и неотрицательно определена) такие, что для $f \in C^{(2)}_{фин}$ ($C^{(2)}_{фин}$ - множество дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций)

$$Af(x) = Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

b) все его траектории непрерывны.

Дифференциальный оператор второго порядка L будем называть ***производящим оператором диффузионного процесса.***

Пусть на R^d заданы непрерывные функции $a_{ij}(x), b_i(x), i,j = 1,2,\dots,d$; пусть $L -$ соответствующий им дифференциальный оператор:

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Сформулируем без доказательства две теоремы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства этих теорем содержатся в Главе 11 упомянутой выше книги А.Д. Вентцеля.

Теорема 1. *Пусть* $(\xi_t(\omega), P_x)$ *- марковское семейство на* $(R^d, \mathfrak{B}^d)$ *такое, что при любом* $\varepsilon > 0$ *следующие условия выполнены при* $t \to 0$ *равномерно по* x *в пределах каждого ограниченного множества*

1. $P\big(t, x, U_\varepsilon^c(x)\big) = o(t)$.
2. $\int_{U_\varepsilon(x)} (y_i - x_i) P(t, x, dy) = b_i(x)t + o(t)$.
3. $\int_{U_\varepsilon(x)} (y_i - x_i)\big(y_j - x_j\big) P(t, x, dy) = a_{ij}(x)t + o(t)$.

и для каждого ограниченного множества K *существует ограниченное множество* $K' \supset K$ *такое, что*

$$P(t, x, K) = o(t)$$

при $t \to 0$ *равномерно по* $x \in R^d \setminus K'$. *Тогда инфинитезимальный оператор определён на всех функциях* $f \in C_{фин}^{(2)}$ *и на них он равен* Lf.

Теорема 2. *Пусть инфинитезимальный оператор диффузионного процесса определён и совпадает с производящим оператором* L *на всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях* f, *убывающих вместе с производными* $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *на бесконечности не медленнее, чем некоторая функция* $\varphi(x)(\to 0$ *при* $|x| \to \infty)$. *Предположим, что переходные вероятности диффузионного процесса задаются плотностью:* $P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)dy$, *где функция* $p(t, x, y)$, *опеделённая на* $(0, \infty) \times R^d \times R^d$, *непрерывна по всем трём переменным вместе с первой частной производной по* t *и частными производными первых двух порядков по* x_i, x_j. *Пусть, наконец, имеют место оценки*

$$|p|, \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le C(t, y)\varphi(x),$$

где $C(t, y)$ *– непрерывная положительная функция на* $(0, \infty) \times R^d$. *Тогда переходная плотность удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial x_i} \quad (1)$$

или, короче, $\frac{\partial p}{\partial t} = L_x p$.

Нижний индекс x означает, что оператор применяется к плотности при фиксированных t, y как к функции от x. Уравнение (1) называется ***обратным уравнением Колмогорова.***

Введём ограничения на коэффициенты a_{ij}, b_i: пусть функции a_{ij} дважды, а b_i один раз непрерывно дифференцируемы. Тогда для дифференциального оператора L определён сопряжённый оператор L^*:

$$L^* g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[a_{ij}(x)g(x)]}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i \frac{\partial[b_i(x)g(x)]}{\partial x_i}.$$

Теорема 3. *Пусть* $(\xi_t(\omega), P_x)$ *- диффузионный процесс с производящим оператором* L. *Предположим, что плотность вероятностей перехода обладает непрерывными частными производными первого порядка по* t *и первых двух порядклв по* y_i, y_j. *Тогда переходная плотность удовлетворяет уравнению:*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[a_{ij}(y)p(t,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial[b_i(y)p(t,x,y)]}{\partial y_i} \quad (2)$$

или $\frac{\partial p}{\partial t} = L_y^* p$.

Уравнение (2) называется ***прямым уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера-Планка.***

Для неоднородного по времени процесса $(\xi_t, P_{s,x})$ можно доказать аналоги теорем 2 и 3. Уравнения (1) и (2) при этом принимают следующий вид:

$$-\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 p(s,t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s,x)\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial x_i} \qquad (1')$$

$$\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 [a_{ij}(t,y)p(s,t,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial [b_i(t,y)p(s,t,x,y)]}{\partial y_i} \qquad (2')$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений уравнение (1') означает, что плотность вероятностей перехода есть ***фундаментальное решение*** параболического уравнения

$$\frac{\partial u(s,t,x,y)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u(s,t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s,x)\frac{\partial u(s,t,x,y)}{\partial x_i} = 0$$

Определение 4. Фундаментальным решением уравнения (1') назовём функцию $p(s,t,x,y), s < t, x \in R^d, y \in R^d$, со следующими свойствами:

1. Функция $p(s,t,x,y)$ в области $\{0 \le s < t \le T, x \in R^d, y \in R^d\}$ непрерывна по совокупности переменных s,t,x,y вместе с производными $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial p}{\partial t}$ и удовлетворяет уравнению (1') по переменным x,s при фиксированных t,y. При этом функция $p(s,t,x,y)$ ограничена во всякой области $t - s + |y - x| \ge \delta$, где $\delta > 0$.
2. Для любой непрерывной и ограниченной в R^d функции $\varphi(y)$ и для любых $x \epsilon R^d$, $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\lim_{s\to t-0}\int_{R^d} p(s,t,x,y)\varphi(y)dy=\varphi(x),$$

причём стремление к пределу равномерно относительно x во всякой ограниченной области его изменения в пространстве R^d.
Простейший пример фундаментального решения

$$p(s,t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}}.$$

Важность понятия фундаментального решения обусловлена тем, что с его помощью можно представить решение задачи Коши для рассматриваемого параболического уравнения, а именно:

$$u(s,x)=\int p(s,t,x,y)f(y)dy\,,s<t,$$

единственное ограниченное решение задачи Коши для рассматриваемого параболического уравнения с «конечным» условием $u(t_-,x)=f(x)$. Кроме того, найти фундаментальное решение - значит найти переходную плотность соответствующего диффузионного процесса. В этом курсе мы рассмотрим метод нахождения фундаментального решения, предложенный более ста лет назад E.E. Levi (2007, русский перевод: УМН, вып. VIII, 1940, 249-292). Мы рассмотрим сначала классический вариант этого метода в том виде, как его предложил сам Е. Леви, затем рассмотрим модификацию этого метода, предложенную Мак Кином и Зингером (1967). Метод параметрикса в форме Мак Кина и Зингера замечателен тем, что допускает дискретную версию и позволяет развить новый метод получения локальных предельных теорем о сходимости последовательности марковских цепей к диффузионному процессу.