

Программа курса “Экстремальные проблемы теории гиперграфов”

лектор — к.ф.-м.н., ассистент Д. А. Шабанов

полугодовой спецкурс для студентов 2–5 курсов,
весна 2012

1. Основные определения теории гиперграфов. Понятия независимых множеств, циклов и правильных раскрасок в гиперграфах.
2. Теорема Турана. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана $ex(n, G)$ для произвольного графа G . Теорема Эрдеша–Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n, G)$ (б/д).
3. Числа Турана $T(n, k, b)$ для гиперграфов, понятие (n, k, b) -системы. Рекуррентные неравенства для чисел $T(n, k, b)$, простая нижняя оценка $T(n, k, b)$. Турановские плотности $t(k, b)$, рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности $t(k, b)$ (конструкция А. Сидоренко).
4. Теорема Турана для гиперграфов (нижняя оценка Спенсера для $T(n, k, b)$). Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для $t(k, b)$, ее порядок при фиксированном k и растущем b .
5. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи–Комлоша–Семереди для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея $R(3, t)$. Точность оценки в теореме Айтаи–Комлоша–Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и зафиксированной средней степенью вершины).
6. Теорема Айтаи–Комлоша–Пинца–Семереди–Спенсера о нижней оценке числа независимости k -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (б/д). Аналогичная теорема Рёдля–Дьюка–Лэфманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.
7. Экстремальная задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка $m(n, r)$. Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка $m(n, r)$.
8. Теорема Алона об $m(n, r)$. Критерий Плухара r -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r -цепей. Следствие: наилучшая общая нижняя оценка $m(n, r)$.

9. Метод случайной перекраски в задаче Эрдеша–Ловаса. Теорема Радхакришнана–Сринивасана для $m(n, 2)$.
10. Локальная лемма: общий, симметричный и несимметричный варианты. Теорема Эрдеша–Ловаса об оценке максимальной степени вершины в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея.
11. Задача Эрдеша–Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка $m^*(n, r)$. Теорема Косточки–Мубай–Рёдля–Тетали о нижней оценке $m^*(n, r)$.
12. Теорема Косточки–Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.
13. Справедливые раскраски графов. Теорема Хайнала–Семереди о существовании справедливой раскраски (б/д). Понятие H -фактора, величина $\delta(n, H)$. Теорема Алона–Юстера об асимптотическом поведении $\delta(n, H)$ (б/д). Теорема Кюн–Остуса об оценках $\delta(n, H)$ в общем случае (б/д).
14. Простое доказательство Косточки–Киерстеда для теоремы Хайнала–Семереди.

Список литературы

- [1] A. F. Sidorenko, “What we know and what we do not know about Turán numbers”, *Graphs and Combinatorics*, **11** (1995), 179–199.
- [2] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] I. Bárány, “Applications of Graph and Hypergraph Theory in Geometry”, *Combinatorial and Computational Geometry*, **52** (2005), 31–50.
- [4] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, “Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *Успехи математических наук*, **66**:5 (2011), 109–182.
- [5] A. V. Kostochka, “Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey”, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Society Mathematical Studies, **15**, eds. E. Györi, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, 2006, 175–198.
- [6] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [7] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1973, 609–627.
- [8] A. V. Kostochka, V. Rödl, “Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number”, *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.