МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том VII

Математика. Механика.

Выпуск 1

К 190-летию П.Л. Чебышева

Издательство Московского университета 2011 год

УДК 519.2, 517, 531
ББК 22
С 56

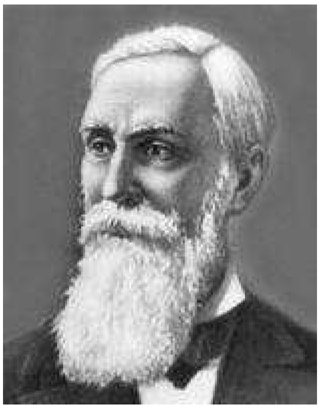
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 1. К 190-летию П.Л. Чебышева / Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова, А.С. Кулешова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 168 с.

ISBN 978—5—211—05652—7

Выпуск посвящается 190-летию академика
ПАФНУТИЯ ЛЬВОВИЧА ЧЕБЫШЕВА

ISBN 978—5—211—05652—7

Предисловие



16 мая 2011 года исполнилось 190 лет со дня рождения великого русского математика и механика, академика Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894).

П.Л.Чебышев родился в селе Окатово Калужской губернии, в дворянской семье, и первоначальное образование получил дома; в 16 лет поступил в Московский университет. В 1841 году за сочинение «Вычисление корней уравнений» награжден серебряной медалью. В том же году окончил Московский университет.

В 1846 году при Московском университете защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 году переехал в Петербург, где в том же году защитил диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» при университете и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 году защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений», удостоенную в том же году Демидовской премии Петербургской АН; в 1850 году стал профессором Петербургского университета. Академик Петербургской АН с 1856 года. Длительное время принимал участие в работе артиллерийского отделения военно-ученого комитета и ученого комитета Министерства народного просвещения. В 1882 году прекратил чтение лекций в Петербургском университете и, выйдя в отставку, целиком занялся научной работой, продолжавшейся до последних дней его жизни. Последний его мемуар «О суммах, зависящих от положительных значений какой-либо функции» (1895), вышел в свет уже после его кончины.

Чебышев был одним из организаторов Московского математического общества и первого в России математического журнала — «Математический сборник».

Чебышев является основателем Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А.Н.Коркин, Е.И.Золотарев, А.А.Марков, Г.Ф.Вороной, А.М.Ляпунов, В.А.Стеклов, Д.А.Граве.

Характерные черты творчества Чебышева — разнообразие областей исследования, умение получить посредством элементарных средств большие научные результаты и неизменный интерес к вопросам практики. Исследования Чебышева относятся к теории приближения функций многочленами, интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и многим другим разделам математики и смежных областей знания. В каждом из упомянутых разделов Чебышев сумел создать ряд основных, общих методов и выдвинул идеи, наметившие ведущие направления в их дальнейшем развитии. Стремление увязать проблемы математики с принципиальными вопросами естествознания и техники в значительной мере определяет его своеобразие как ученого. Многие открытия Чебышева навеяны прикладными задачами. Это неоднократно подчеркивал и он сам, говоря, что в создании новых методов исследования «науки находят себе верного руководителя в практике» и что «сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования».

Чебышев оставил глубокий и яркий след в развитии математики, дал толчок созданию и развитию многих ее разделов как собственными исследованиями, так и постановкой соответствующих вопросов перед молодыми учеными.

Характеристика его ученых заслуг очень хорошо выражена в записке академиков А.А.Маркова и И.Я.Сонина, читанной на первом после смерти Чебышева заседании Академии. В этой записке, в частности, сказано: «Труды Чебышева носят отпечаток гениальности. Он изобрел новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешенными. Вместе с тем он поставил ряд новых вопросов, над разработкой которых трудился до конца своих дней».

Труды Чебышева еще при жизни нашли широкое признание не только в России, но и за границей: он был избран членом Берлинской АН (1871), Болонской АН (1873), Парижской АН (1874); член-корреспондентом (1860) Лондонского королевского общества (1877), Шведской АН (1893) и почетным членом многих других русских и иностранных научных обществ, академий и университетов.

В честь Чебышева АН СССР учредила в 1944 году премию «за лучшие исследования в области математики и теории механизмов и машин», которой были удостоены многие советские математики.

Именем Чебышева названы: математический журнал «Чебышевский Сборник» (издание ТГПУ имени Л.Н.Толстого), суперкомпьютер СКИФ МГУ «ЧЕБЫШЕВ», кратер на Луне, астероид «2010 Чебышев» и др.

Коллектив механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова ценит наследие и чтит память Чебышева как славного выпускника Московского университета, одного из основоположников современной математики и механики, продолжает и развивает заложенные им научные традиции и направления исследований.

В настоящем сборнике представлены работы сотрудников кафедр теории вероятностей, теории функций и функционального анализа, теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ.

РАЗДЕЛ 1

Теория вероятностей

П.Л.Чебышев и теория вероятностей

В год 190-летия со дня рождения Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894) необходимо отметить его фундаментальный вклад в развитие теории вероятностей и становление этой науки в России.

Первой российской диссертацией по теории вероятностей была магистерская диссертация П.Л.Чебышева «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», выполненная по предложению профессора Н.Д.Брашмана на физико-математическом факультете Московского университета в 1845 году и защищенная в 1846 году. С 1860 года Чебышев читал курс теории вероятностей в Петербургском университете.

К теории вероятностей Чебышев обращался несколько раз — в начале, середине и конце своего научного пути («Опыт элементарного анализа теории вероятностей», 1845; «Элементарное доказательство одного общего положения теории вероятностей», 1846; «О средних величинах», 1867; «О двух теоремах относительно вероятностей», 1887). В идейном отношении ему принадлежит заслуга систематического введения в рассмотрение случайных величин и создание нового приема доказательства предельных теорем теории вероятностей — так называемого метода моментов. Например, с помощью знаменитого неравенства Чебышева можно оценить вероятность попадания случайной величины в некоторый промежуток на основе только первых двух моментов, без знания точного закона распределения.

А.Н.Колмогоров, оценивая научные заслуги Чебышева, в частности, писал: «С методологической точки зрения основной переворот, совершенный Чебышевым, заключается не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютно строгого доказательства предельных теорем... но главным образом в том, что Чебышев всюду стремился получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных при хотя бы и большом, но конечном числе испытаний, в виде безусловно правильных при любом числе испытаний неравенств». До Чебышева основной интерес в теории вероятностей был связан с подсчетом вероятностей случайных событий. Им же впервые была ясно осознана и использована вся сила понятий «случайная величина» и «математическое ожидание случайной величины».

Чебышевым был доказан закон больших чисел в весьма общей форме; при этом его доказательство поражает своей простотой и элементарностью. Исследование условий сходимости функций распределения сумм независимых случайных величин к нормальному закону Чебышев не довел до полного завершения. Однако посредством некоторого дополнения методов Чебышева это удалось сделать его ученику А.А.Маркову. Без строгих выводов Чебышев наметил также возможность уточнений этой предельной теоремы в форме асимптотических разложений функции распределения суммы независимых слагаемых по степеням $n^{-1/2}$, где n — число слагаемых.

Работы Чебышева по теории вероятностей составляют важный этап в ее развитии; кроме того, они явились базой, на которой выросла русская школа теории вероятностей, вначале состоявшая из непосредственных учеников Чебышева.

Эмпирические асимптотически оптимальные политики[1]

Булинская Е.В.[2]

Цель работы – установить оптимальное управление для прикладных стохастических моделей в условиях неполной информации. Для этого предлагается трехступенчатый алгоритм построения так называемых эмпирических асимптотически оптимальных политик. В качестве иллюстрации рассматриваются модели типа вход-выход, возникающие в различных областях прикладной теории вероятностей, таких как страхование, теория запасов, теория очередей.

1 Введение

Для изучения любых реальных процессов или систем прежде всего необходимо выбрать соответствующую математическую модель. Обычно информация о параметрах системы неполная или вовсе отсутствует. Именно поэтому необходимо исследовать чувствительность модели к малым флуктуациям параметров и возмущениям описывающих ее процессов. Только после этого модель может использоваться для принятия решений, касающихся оптимизации функционирования системы в условиях неполной информации.

Ниже для этой цели предлагается следующий алгоритм. Сначала мы считаем, что все параметры модели и распределения описывающих ее процессов известны. Применяя метод динамического программирования, мы получаем вид оптимального управления для любого горизонта планирования. Следующий шаг – нахождение, в тех же условиях, стационарной асимптотически оптимальной политики. Наконец, последний шаг – это оценка неизвестных параметров и распределений на базе предыдущих наблюдений за системой и использование их вместо точных значений. Доказывается, что такая процедура ведет к конструкции асимптотичеки оптимальной политики в условиях неполной информации.

2 Определения

Мы рассматриваем класс моделей типа вход-выход, возникающих в приложениях теории вероятностей. Такие модели описываются путем задания следующего набора $\{T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L}\}$. Здесь T – горизонт планирования ($0 < T \le \infty$), соответственно $Z = \{Z(t), t \in [0,T]\}$ и $Y = \{Y(t), t \in [0,T]\}$ – входящий и выходящий процессы, а $U = \{U(t), t \in [0,T]\}$ – управление. Функционал Ψ задает состояние системы

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 10-01-00266.

[2]Булинская Екатерина Вадимовна, ebulinsk@yandex.ru, профессор кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

$X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, учитывая структуру системы и способ ее функционирования, т.е. $X = \Psi(T, Z, Y, U)$. Процессы Z, Y, U, X могут быть детерминированными или случайными, одномерными или многомерными, причем их размерности могут отличаться. Последний элемент $\mathcal{L}$ – это целевая функция, оценивающая качество функционирования системы. Для упрощения записи мы будем обозначать ее $\mathcal{L}_T(U)$ вместо $\mathcal{L}(T, Z, Y, U, X)$.

Такое описание полезно для классификации моделей. Оно также демонстрирует сходство моделей, возникающих в различных приложениях теории вероятностей таких как теория запасов и водохранилищ, страхование и финансы, теория массового обслуживания и надежности, а также рост популяций и др. (см., например, [7]). Чтобы перейти от одной области к другой необходимо только дать другую интерпретацию процессам Z, Y, X (детали можно найти, например в [5]).

Определение 1. Управление $U_T^* = \{U^*(t), t \in [0,T]\}$ называется оптимальным, если

$$\mathcal{L}_T(U_T^*) = \inf_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T) \quad (\text{или} \quad \mathcal{L}_T(U_T^*) = \sup_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T)), \tag{1}$$

где $\mathcal{U}_T$ – класс всех допустимых управлений. Набор $U^* = \{U_T^*, T \geq 0\}$ называется оптимальной политикой.

Выбор инфимума или супремума в (1) определяется тем, какую задачу мы хотим решить. А именно, если нас интересует минимизация убытков (или вероятности разорения) мы используем первое выражение в (1), в то время как для максимизации доходов (или продолжительности жизни системы) подходит второе выражение.

Определение 2. Политика $\tilde{U} = \{\tilde{U}_T, T \geq 0\}$ стационарна, если для любых $T, S \geq 0$

$$\tilde{U}_T(t) = \tilde{U}_S(t), \quad t \leq \min(T, S).$$

Определение 3. Политика $\widehat{U} = (\widehat{U}_T, T \geq 0)$ *асимптотически оптимальна*, если

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathcal{L}_T(\widehat{U}_T) = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathcal{L}_T(U_T^*).$$

Определение 4. Политика $\breve{U} = \{\breve{U}_T, T \geq 0\}$ называется *эмпирической*, если она базируется на предшествующих наблюдениях за системой.

Изменения, необходимые для моделей с дискретным временем, очевидны.

Для иллюстрации алгоритма построения эмпирической асимптотически оптимальной политики мы рассмотрим обобщение модели функционирования страховой компании (с дискретным временем), введенной в [4] и подробно исследованной в [6].

3 Описание модели

Предполагается, что в начале каждого периода (день, неделя, месяц и т.д.) страховая компания может принимать одно из следующих решений: I. продавать некоторое количество имеющихся активов, II. использовать регулярный банковский заем или III. производить обе указанные операции, решая при этом, каков будет их объем.

Продажа активов происходит немедленно, возникающие издержки составляют долю c_1 от полученной суммы. Заем берется под процентную ставку c_2, при этом наличные получаются немедленно с вероятностью p или в начале следующего периода с вероятностью $q = 1 - p$. (В предыдущих работах автора полагалось $p = 0$.) Мы также учитываем скорость инфляции h и процентную ставку r в случае экстренного займа.

Пусть ξ_k – это превышение резервов компании размером требований в k-й период. Предположим, что ξ_k, $k \geq 1$, образуют последовательность положительных взаимно независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(\cdot)$, имеющей плотность $\phi(s) > 0$ для $s > 0$ и конечное среднее.

Пусть $f_n(x)$ – минимальные средние дисконтированные издержки за n периодов, связанные с принимаемыми компанией решениями, а x – начальный капитал. Ожидаемые издержки за один период равны

$$L(v) = \mathsf{E}[h(v-\xi_1)^+ + r(\xi_1 - v)^+], \quad \text{с} \quad a^+ = \max(a, 0).$$

Введем также

$$G_n(v,u) = (c_1 - c_2)v + qL(v) + c_2 u + pL(u) + \alpha \mathsf{E} f_{n-1}(u - \xi_1),$$

где α – дисконтирующий множитель.

Согласно принципу оптимальности Беллмана (см., например, [1]) для $n \geq 1$ мы получаем следующие рекуррентные соотношения

$$f_n(x) = -c_1 x + \min_{x \leq v \leq u} G_n(v,u) \quad \text{и} \quad f_0(x) \equiv 0. \tag{2}$$

Параметры v и u, для которых достигается минимум в (2), следующим образом определяют принимаемое компанией решение (в начале n-шагового процесса): необходимо продать активы на сумму $v - x$ и занять в банке $u - v$.

4 Обозначения и предварительные результаты

Существование оптимального управления, обеспечивающего минимум в (2), и его вид будут установлены с использованием метода математической индукции. Для формулировки результатов нам понадобятся следующие обозначения.

$$\Gamma = \{(c_1, c_2) : 0 < c_1 \leq r(1-\alpha)^{-1},\ 0 < c_2 \leq r(1-\alpha)^{-1}(p + \alpha q)\},$$
$$\Gamma^{I} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : c_2 \geq (p + \alpha q)c_1\}, \quad \Gamma^{II} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : c_2 < c_1 - qr\},$$
$$\Gamma^{III} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : (c_1 - qr)^+ \leq c_2 < (p + \alpha q)c_1\},$$
$$\Gamma^{III}_{-} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : c_2 < pc_1\}, \quad \Gamma^{III}_{\pm} = \{(c_1, c_2) \in \Gamma^{III} : c_2 \geq pc_1\}.$$

Кроме того, пусть $\Delta_0 = \{0 \leq c_1 \leq r\}$, $\Delta^0 = \{0 \leq c_2 \leq pr\}$ и для $k \geq 1$

$$\Delta_k = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : r\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i < c_1 \leq r\sum_{i=0}^{k} \alpha^i\}, \quad A_k = \cup_{i \geq k} \Delta_i,$$

$$\Delta^k = \{(c_1, c_2) \in \Gamma : r(p + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^i) < c_1 \leq r(p + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i)\}, \quad A^k = \cup_{i \geq k} \Delta^i,$$

здесь и далее сумма по пустому множеству полагается равной нулю.

Мы также вводим частные производные функции $G_n(v,u)$ по v и u

$$K(v) = c_1 - c_2 + qL'(v), \quad S_n(u) = c_2 + pL'(u) + \alpha \int_0^\infty f'_{n-1}(u-s)\phi(s)\,ds$$

и вспомогательные функции

$$T_n(v) = K(v) + S_n(v), \quad Q(u) = c_2 - \alpha c_1 + pL'(u) + \alpha \int_0^{u-\bar{v}} K(u-s)\phi(s)\,ds,$$

$$R(u) = c_2(1-\alpha) + pL'(u) + \alpha q \int_0^\infty L'(u-s)\phi(s)\,ds, \quad V(v) = c_1(1-\alpha) + L'(v).$$

Будет установлено, что $f'_n(x)$, $n \ge 1$, и все вышеупомянутые функции неубывающие. Критические уровни $\bar{v}$, u_n, v_n, $\bar{u}$, $\hat{u}$ и $\hat{v}$, если они существуют, определяются соответственно как решения уравнений

$$K(\bar{v}) = 0, \quad S_n(u_n) = 0, \quad T_n(v_n) = 0, \quad Q(\bar{u}) = 0, \quad R(\hat{u}) = 0, \quad V(\hat{v}) = 0.$$

В частности, $F(\bar{v}) = (c_2 + qr - c_1)/q(r+h)$, если $c_2 \ge c_1 - qr$, в противном случае мы полагаем $\bar{v} = -\infty$. Это значит, что $K(v) > 0$ для всех v, если $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$. Аналогичные соглашения имеют место и для других критических уровней. Так, $F(v_1) = (r - c_1)/(r+h)$ в Δ_0 и $v_1 = -\infty$ в A_1, в то время как $F(u_1) = (pr - c_2)/p(r+h)$ в Δ^0 и $u_1 = -\infty$ в A^1.

Положим также $\Gamma_n^- = \{(c_1,c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) < 0\}$, $\Gamma_n^+ = \{(c_1,c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) > 0\}$ и $\Gamma_n^0 = \{(c_1,c_2) \in \Gamma^{III} : S_n(\bar{v}) = 0\}$.

Поскольку $K(v) < 0$ при $v < \bar{v}$ и $K(v) > 0$ при $v > \bar{v}$, ясно, что $T_n(v) < S_n(v)$ при $v < \bar{v}$ и $T_n(v) > S_n(v)$ при $v > \bar{v}$. Следовательно, мы получаем следующий результат.

Лемма 1. *Если $(c_1,c_2) \in \Gamma_n^- \cup \Gamma^{II}$, то $\bar{v} < v_n < u_n$, в то время как $\bar{v} > v_n > u_n$ при $(c_1,c_2) \in \Gamma_n^+ \cup \Gamma^I$.*

Теперь перейдем к осуществлению первого шага алгоритма, т.е. установим вид оптимального управления при известном распределении $F(\cdot)$ на выходе системы.

5 Оптимальное управление

Обозначим $v_n(x)$ и $u_n(x)$ соответственно те значения v и u, которые обеспечивают минимум в (2). Сформулируем первый результат.

Теорема 1. *Для $(c_1,c_2) \in \Gamma^I$ надо взять $u_n(x) = v_n(x) = \max(x, v_n)$. Последовательность v_n, $n \ge 1$, не убывает и существует $\lim_{n\to\infty} v_n = \hat{v}$, задаваемый соотношением $F(\hat{v}) = (r - c_1(1-\alpha))/(r+h)$. При дополнительном условии $(c_1,c_2) \in \Delta_k$, $k \ge 0$, получаем $v_n = -\infty$ при $n \le k$, в то время как v_{k+1} задается соотношением*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha^i F^{(i+1)*}(v_{k+1}) = \frac{r\sum_{i=0}^{k}\alpha^i - c_1}{r+h}, \tag{3}$$

где F^{i*} – это i-кратная свертка функции F с самой собой.

Доказательство проводится методом математической индукции по k и n, начиная с Δ_0 и $n = 1$. Используя результаты раздела 4, получим $u_1 < v_1 < \hat{v} \leq \bar{v}$ в $\Gamma^I \cap \Delta_0$. Таким образом, $u_1(x) = v_1(x) = \max(x, v_1)$ и

$$f_1'(x) = -c_1 + \begin{cases} 0, & x < v_1, \\ T_1(x), & x \geq v_1. \end{cases} \tag{4}$$

Предположив, что $f_m'(x)$, $m \leq n-1$, имеет вид (4), где индекс 1 заменен на m, мы получаем

$$T_n(v) = V(v) + \alpha \int_0^{v - v_{n-1}} T_{n-1}(v - s)\, ds = T_{n-1}(v) + \alpha H_{n-1}(v), \tag{5}$$

где $H_m(v) = (f_m' - f_{m-1}') * F(v)$ и

$$f_m'(x) - f_{m-1}'(x) = \begin{cases} 0, & x < v_{m-1}, \\ -T_{m-1}(x), & v_{m-1} \leq x < v_m, \\ T_m(x) - T_{m-1}(x), & x \geq v_m. \end{cases}$$

Итак, $T_n(v_{n-1}) = \alpha H(v_{n-1}) < 0$, откуда, в силу (5) и леммы 1, следует $v_{n-1} < v_n$ и $u_n < v_n < \hat{v}$. Более того,

$$|V(v_n)| = \alpha \int_0^{v_n - v_{n-1}} T_{n-1}(v_n - s)\phi(s)\, ds \leq \alpha T_{n-1}(\hat{v}) F(v_n - v_{n-1}).$$

Очевидно, $T_{n-1}(\hat{v}) \leq \alpha^{n-1}(c_1 + h)$, откуда вытекает $|V(v_n)| \to 0$, при $n \to \infty$, даже при $\alpha = 1$. Следовательно, имеем $\hat{v} = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Теперь нетрудно проверить, что $v_k = -\infty$ в A_k, $k \geq 1$. В результате вместо (4) мы получаем $f_1'(x) = L'(x)$ и в (5) интеграл $\int_0^{v - v_{n-1}}$ понимается как $\int_0^{\infty}$, если $v_{n-1} = -\infty$. Таким образом, v_{k+1} задается с помощью (3) в Δ_k. Существование $\lim_{n\to\infty} v_n = \hat{v}$ в Δ_k устанавливается по той же схеме, что и в Δ_0. □

Теорема 2. *Для* $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$ *полагаем* $v_n(x) = x$ *и* $u_n(x) = \max(x, u_n)$. *Последовательность* u_n, $n \geq 1$, *неубывающая и существует* $\lim_{n\to\infty} u_n = \hat{u}$, *задаваемый соотношением* $pF(\hat{u}) + \alpha q F^{2*}(\hat{u}) = [r(p + \alpha q) - c_2(1 - \alpha)]/(r + h)$. *При дополнительном предположении* $(c_1, c_2) \in \Delta^k$, $k \geq 0$, *имеем* $u_n = -\infty$ *при* $n \leq k$, *в то время как* u_{k+1} *задается соотношением*

$$pF(u_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i F^{(i+1)*}(u_{k+1}) = \frac{r(p + \sum_{i=1}^{k} \alpha^i) - c_2}{r + h}.$$

Теорема 3. *Если* $(c_1, c_2) \in \Gamma_{\pm}^{III}$, *то существует такое* $n_0(c_1, c_2)$, *что* $v_n(x) = \max(x, \bar{v})$ *и* $u_n(x) = \max(x, u_n)$ *при* $n \geq n_0$, *в то время как при* $n < n_0$ *надо взять* $u_n(x) = v_n(x) = \max(x, v_n)$. *Если* $(c_1, c_2) \in \Gamma_{-}^{III}$, *то* $n_0 = 1$. *Кроме того, последовательность* u_n, $n \geq n_0$, *неубывающая и* $\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u}$.

Доказательства теорем 2 и 3 опущены из-за недостатка места.

Анализ чувствительности может быть проведен по аналогии с [6] путем использования результатов [3] и [8].

Здесь мы только заметим, что для $(c_1, c_2) \notin \Gamma$ не производится ни продажи активов, ни займов. Если $(c_1, c_2) \in \Gamma^I$, то продаются активы, а для $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$ используется регулярный заем, при этом объемы операций зависят от начального уровня x, горизонта планирования n и процентной ставки по экстренному займу r. Для Γ^{III} существуют две возможности: либо только продаются активы, либо добавляется регулярный заем (для Γ^{III}_{-} при всех $n \geq 1$, а для Γ_k^- при $n \geq k$).

Для того, чтобы исключить зависимость от горизонта планирования, мы обращаемся ко второму шагу алгоритма, а именно, к построению стационарной асимптотически оптимальной политики.

6 Асимптотически оптимальное управление

Положим $\alpha = 1$, тогда область Γ совпадает с первым квадрантом $\{c_1 \geq 0, c_2 \geq 0\}$. Мы продолжаем считать, что все параметры издержек и функция распределения F известны.

Теорема 4. *Положим $v_n(x) = u_n(x) = \max(x, \hat{v})$, если $(c_1, c_2) \in \Gamma^I$. Для $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$ пусть $v_n(x) = x$ и $u_n(x) = \bar{u}$, в то время как для $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}$ берем $v_n(x) = \max(x, \bar{v})$ и $u_n(x) = \max(x, \hat{u})$, при всех n. Тогда получим стационарную асимптотически оптимальную политику.*

Схема доказательства. Пусть $\widehat{f}_n(x)$ обозначает ожидаемые n-шаговые издержки при введенном управлении. Согласно определениям 2 и 3 нам необходимо только установить, что для любого x

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\widehat{f}_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} f_n(x).$$

Далее, пусть $f_n^l(x)$ – это ожидаемые издержки за n периодов, если стационарное управление, основанное на $\hat{v}$ в области Γ^I (соответственно на $\hat{u}$ или $(\bar{v}, \bar{u})$ в Γ^{II} или Γ^{III}), применяется в течение первых l периодов, а в последующие периоды используются критические уровни, соответствующие оптимальному управлению.

Дальнейшее доказательство разбивается на две леммы.

Лемма 2. *Для любого x*

$$n^{-1}(\widehat{f}_n(x) - f_n(x)) \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство леммы 2. Очевидно, $f_n^n(x) = \widehat{f}_n(x)$ и $f_n^0(x) = f_n(x)$. Более того,

$$\widehat{f}_n(x) - f_n(x) = \sum_{l=1}^{n} (f_n^l(x) - f_n^{l-1}(x))$$

и

$$\max_x |f_n^l(x) - f_n^{l-1}(x)| \leq \max_x |f_{n-l+1}^1(x) - f_{n-l+1}^0(x)|.$$

Используя тот факт, что параметры v_n (соотв. u_n) сходятся к $\hat{v}$ (соотв. $\bar{u}$ или $\hat{u}$), мы можем для любого $\varepsilon > 0$ выбрать такое $\hat{n}(\varepsilon)$, что, например, $|v_n - \hat{v}| < \varepsilon$, если $n > \hat{n}$. Таким образом, мы получаем

$$\sum_{l=1}^{n-\hat{n}} |f_n^l(x) - f_n^{l-1}(x)| \leq (n - \hat{n}) d\varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_{l=n-\hat{n}+1}^{n} |f_n^l(x) - f_n^{l-1}(x)| \leq \hat{n} b(x),$$

где $d < \infty$ и $b(x) < \infty$. Это и означает, что мы доказали (6).

Лемма 3. *Для любого x существует*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\widehat{f}_n(x) = g_0, \quad \textit{где}$$

$g_0 = c_1\mu + L(\hat{v})$ для $(c_1, c_2) \in \Gamma^I$; $g_0 = c_2\mu + pL(\hat{u}) + q\int_0^\infty L(\hat{u}-s)\varphi(s)\,ds$, если $(c_1, c_2) \in \Gamma^{II}$, в то время как для $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}$ величина g_0 задается соотношением

$$pL(\bar{u}) + \int_0^{\bar{u}-\bar{v}} [c_2 s + qL(\bar{u}-s)]\varphi(s)\,ds + \int_{\bar{u}-\bar{v}}^\infty [c_1 s + (c_2 - c_1)(\bar{u}-\bar{v}) + qL(\bar{v})]\varphi(s)\,ds.$$

Доказательство леммы 3 опирается на тождество Вальда и свойства процессов восстановления.

Теперь все готово для перехода к третьему шагу алгоритма.

7 Решения в условиях неполной информации

Наконец, предположим, что нет никакой априорной информации о функции распределения $F(x)$.

Для изучения зависимости оптимальной политики от распределения процесса на выходе удобно использовать равномерную метрику Колмогорова

$$\rho(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|.$$

Ниже мы рассматриваем лишь наиболее сложный случай $(c_1, c_2) \in \Gamma^{III}$. Обозначим v^k и u^k решения соответственно уравнений $K_k(v) = 0$ и $Q_k(u) = 0$, полученных заменой функции распределения F на F_k в $K(v)$ и $Q(v)$, кроме того, в Q_k мы пишем v^k вместо $\bar{v}$.

Лемма 4. *Пусть $\{F_k,\ k \ge 1\}$ – последовательность непрерывных функций распределения таких, что уравнение $F_k(u) = \delta$ имеет единственное решение для $0 \le \delta < 1$ при $u \ge 0$. Если $\rho(F, F_k) \to 0$, то $v^k \to \bar{v}$ и $u^k \to \bar{u}$ при $k \to \infty$.*

Обозначим $\bar{v}_k$ и $\bar{u}_k$ значения v^k и u^k, соответствующие $F_k(s) = \hat{F}_k(s)$. Здесь $\hat{F}_k(s)$ это непрерывный аналог эмпирической функции распределения, введенный в книге Биллингсли [2].

Используя лемму 4, мы немедленно получаем важное утверждение.

Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения*

$$\mathsf{P}(\rho(F, \hat{F}_k) \to 0, \text{ при } k \to \infty) = 1, \quad \mathsf{P}(\bar{v}_k \to \bar{v}, \bar{u}_k \to \bar{u}, \text{ при } k \to \infty) = 1.$$

Определим эмпирическую политику $\breve{U}$ следующим образом: на первом шаге не принимать никаких решений. Далее, если x_{k-1} это капитал в начале k-го шага, $k \ge 2$, необходимо продать активы на сумму $(\bar{v}_{k-1} - x_{k-1})^+$ и взять заем в размере $(\bar{u}_{k-1} - \max(x_{k-1}, \bar{v}_{k-1}))^+$.

Сначала исследуем поведение x_n при использовании политики $\breve{U}$.

Лемма 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют подмножество Ω_ε и положительное число $n(\varepsilon)$ такие, что $\mathsf{P}(\Omega_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ и $|\bar{u} - \bar{u}_n| < \varepsilon$, $|\bar{v} - \bar{v}_n| < \varepsilon$, $x_n < \bar{u} + \varepsilon$ для всех $n \ge n(\varepsilon)$ и $\omega \in \Omega_\varepsilon$.*

Затем мы рассматриваем средние $\widehat{G}_n(x)$ при использовании политики $\breve{U}$. Обозначив ψ_n издержки, возникающие в течение n-го периода, получаем $\psi_1 = h(x-\xi_1)^+ + r(\xi_1 - x)^+$. Пусть y_n это капитал в начале n-го периода. Тогда $\psi_n = h(y_n-\xi_n)^+ + r(\xi_n - y_n)^+ + c_1(\bar{v}_{n-1} - x_{n-1})^+ + c_2(\bar{u}_{n-1} - \max(x_{n-1}, \bar{v}_{n-1}))^+$ и $\widehat{G}_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k$, где $g_k = \mathsf{E}\psi_k$.

Лемма 7. *Последовательность g_n сходится при $n \to \infty$ к g_0, определенному в лемме* 3.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 5. *Политика $\breve{U}$ асимптотически оптимальна, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\widehat{G}_n(x) = g_0 \quad \textit{для любого} \quad x.$$

Доказательство вытекает из лемм 3 и 7.

Список литературы

[1] *Беллман Р.*, Динамическое программирование. М: ИЛ, 1960.

[2] *Биллингсли П.*, Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977.

[3] *Borgonovo E., Apostolakis G.E.*, A new importance measure for risk-informed decision-making // Reliability Engineering and System Safety, 2001, v. 72, p. 193–212.

[4] *Bulinskaya E.*, Some aspects of decision making under uncertainty // Journal of Statistical Planning and Inference, 2007, v. 137, p. 2613–2632.

[5] *Bulinskaya E.*, Sensitivity analysis of some applied probability models // Pliska. Studia Mathematica Bulgarica, 2007, v. 18, p. 57–90.

[6] *Bulinskaya E.*, Stochastic Insurance Models, Their Optimality and Stability / Advances in Data Analysis, ed. Christos H. Skiadas, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2010, p. 129–140.

[7] *Прабху Н.*, Методы теории массового обслуживания и управления запасами: Изучение основных случайных процессов. М.: Машиностроение, 1969.

[8] *Соболь И.М.*, Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Математическое моделирование, 1990, т. 2, № 1, с. 112–118.

Простые числа и независимость

Виноградов О.П.[1]

В настоящей работе изучается вопрос о построении дискретных вероятностных пространств, в которых существуют или не существуют независимые события. Для конечных вероятностных пространств в ряде случаев ответ на этот вопрос зависит от того, является ли некоторое число простым или составным.

1 Введение

Понятие независимости является центральным понятием теории вероятностей, а простое число — теории чисел. Интересно, что существует связь между этими понятиями. В настоящей работе изучается вопрос о построении дискретных вероятностных пространств, в которых существуют или не существуют независимые события. Для конечных вероятностных пространства в ряде случаев ответ на этот вопрос зависит от того является ли некоторое число простым или составным. Имеется несколько работ по аналогичной тематике [1]–[8].

2 Некоторые вспомогательные результаты

Пусть задано дискретное вероятностное пространство $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Везде в дальнейшем предполагается, что вероятность каждого элементарного события отлична от нуля.

Определение 1. События A и B называются независимыми, если выполнено равенство

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \tag{1}$$

Из элементарных свойств вероятности легко следует

Теорема 1. *События A и B независимы тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{P}(AB)\mathbf{P}(\overline{A+B}) = \mathbf{P}(\overline{A}B)\mathbf{P}(A\overline{B}) \tag{2}$$

Обратим внимание, что события AB, $\overline{A+B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ образуют полную группу событий, т.е. они несовместны (не пересекаются) и их объединение совпадает со всем пространством элементарных событий.

[1]Виноградов Олег Павлович, ovinogradov@mail.ru, профессор кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Замечание 1. Далее везде мы исключаем из рассмотрения тот случай, когда одно из событий A или B совпадает со всем пространством элементарных событий или невозможным событием, т.к. в этом случае равенство (1) всегда выполнено.

Введем следующие определения:

Определение 2. Вероятностное пространство называется зависимым, если в этом пространстве не существует независимых событий.

Определение 3. Вероятностное пространство называется независимым, если в этом пространстве существуют хотя бы два независимых события.

Нетрудно показать, что в любом дискретном вероятностном пространстве всегда существуют хотя бы два зависимых события.

Нас будет интересовать задача построения зависимых и независимых вероятностных пространств.

Замечание 2. Иногда при решении этой задачи равенство (2) предпочтительней равенства (1). Поясним это более подробно. Рассмотрим дискретное пространство элементарных событий $\Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Каждому элементарному событию ω_k поставим в соответствие положительное число x_k, причем ряд из этих чисел сходится и пусть $s = \sum_{k\geq 1} x_k$ — сумма этого ряда. Если $s = 1$, то тем самым задана вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ в этом пространстве элементарных событий. Если же $s \neq 1$, то будем говорить, что задана ненормированная мера $\mu\,(\cdot, s)$. Ненормированная мера $\mu\,(A, s)$ любого события A пространства Ω определяется как

$$\mu\,(A, s) = \sum_{k:\{\omega_k \in A\}} x_k,$$

причем она «порождает» вероятностную меру $\mathbf{P}\,(\cdot) = \mu\,(\cdot, s)\,/s$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть на пространстве элементарных событий Ω задана ненормированная мера $\mu\,(\cdot, s)$. Тогда Ω будет независимым вероятностным пространством с вероятностной мерой $\mathbf{P}\,(\cdot) = \mu(\cdot, s)/s$ тогда и только тогда, когда Ω можно представить в виде $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$, где $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ и имеет место равенство $\mu\,(\Omega_1, s)\,\mu\,(\Omega_2, s) = \mu\,(\Omega_3, s)\,\mu\,(\Omega_4, s)$. Если такое представление имеет место, то события $A = \Omega_1 + \Omega_4$, $B = \Omega_1 + \Omega_3$ будут независимы.*

3 Конечное вероятностное пространство с рациональными вероятностями

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 1. *Пусть a, b, c, d некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство $ab = cd$. Тогда число $S = a + b + c + d$ является составным.*

Доказательство. Легко проверить, что условие леммы эквивалентно равенству $aS = (a + c)(a + d)$. Из этого равенства следует, что произведение $(a + c)(a + d)$ делится на S. Используем теорему 19 из [9]: произведение нескольких чисел делится на простое число p

тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из сомножителей делится на p. Поэтому, если предположить, что S является простым числом, то хотя бы один из множителей $(a+c)$ и $(a+d)$ должен делится на S. Это невозможно, т.к.каждый из этих множителей меньше S. Лемма доказана. □

В этом пункте будем предполагать, что $p_k = \mathbf{P}(\omega_k) = a_k/b_k$, где a_k, b_k — натуральные числа и a_k/b_k — правильные несократимые дроби $(1 \le k \le N)$. Везде в дальнейшем дроби a_k/b_k будем записывать в виде n_k/n, где n — наименьший общий знаменатель этих дробей, т.е. наименьшее общее кратное знаменателей, а n_k — некоторые натуральные числа.

Теорема 3. *Если Ω является независимым вероятностным пространством, то n — составное число.*

Доказательство. Для произвольного события A положим $p_A = \mathbf{P}(A) = n_A/n$. Если найдется пара независимых событий A и B, то в силу (2) условие их независимости эквивалентно равенству

$$n_{AB}n_{\overline{A+B}} = n_{\overline{A}B}n_{A\overline{B}} \tag{3}$$

Т.к. $n_{AB}+n_{\overline{A+B}}+n_{\overline{A}B}+n_{A\overline{B}} = n$, то из леммы 1 следует, что n — составное число. Теорема 3 доказана. □

Замечание 3. Обратное утверждение теоремы 3 неверно. Покажем, что если n —- составное число, то пространство может быть как зависимым, так и независимым. Действительно, из теоремы 6, доказанной далее, следует, что если n — составное число, то в случае равновозможного пространства оно будет независимо. Нетрудно также проверить, что если $p_1 = p_2 = p_3 = 1/6$, $p_4 = 1/2$, то соответствующее вероятностное пространство будет зависимо.

Теорема 4. *Пусть n — простое число. Тогда Ω является зависимым вероятностным пространством.*

Доказательство. Если предположить, что Ω — независимое пространство, то найдется два независимых события A и B. В силу определения независимости выполнялось бы равенство (3). А из леммы 2 следует, что n — число составное, что противоречит условию теоремы. Теорема 4 доказана. □

Замечание 4. Как следует из примера в замечании 3, обратное утверждение теоремы 4 неверно.

Рассмотрим случай равновозможного вероятностного пространства, т.е. $p_k = 1/n$ $(1 \le k \le N)$. В этом случае $N = n$.

Теорема 5. *Пусть Ω — равновозможное вероятностное пространство. Если это пространство зависимо, то n — простое число.*

Доказательство. (От противного.) Пусть n — составное число, т.е. $n = pq$ $(p > 1,\ q > 1)$. Очевидно, что в силу равновозможности вероятностного пространства можно выбрать события A и B так, чтобы выполнялись равенства $\mathbf{P}(A) = p/n$, $\mathbf{P}(B) = q/n$, $\mathbf{P}(AB) = 1/n$. Из равенства (1) вытекает, что события A и B независимы, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана. □

Из теорем 4 и 5 вытекает

Теорема 6. *Равновозможное вероятностное пространство будет зависимым тогда и только тогда, когда n — простое число.*

Доказательство этой теоремы также содержится в [1].

4 Построение зависимых и независимых вероятностных пространств

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, которое состоит из N элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N$, причем $p_k = \mathbf{P}(\omega_k) > 0$ $(1 \le k \le N)$. Нетрудно показать, что в случае $N = 3$ не существует независимых событий ни при каких p_1, p_2, p_3. Это следует из того, что равенство $p_1 = (p_1 + p_2)(p_1 + p_3)$ невозможно, т.к. оно эквивалентно равенству $p_1 = (p_1 + p_2)(1 - p_2)$, из которого следует, что $p_1 + p_2 = 1$, что противоречит тому, что все вероятности элементарных событий строго положительны. Поэтому везде в дальнейшем предполагаем, что $N \ge 4$. Применим теорему 2 для построения зависимых вероятностных пространств. Приведем несколько примеров такого построения.

Пример 1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ — - произвольные рациональные числа и пусть β — произвольное иррациональное число. Обозначим через s сумму всех этих чисел. Тогда вероятностное пространство с вероятностями $p_k = \mathrm{P}(\omega_k) = \alpha_k/s$ $(1 \le k \le N-1)$, $p_N = \beta/s$ является зависимым.

Доказательство. Сумма (произведение) иррационального числа и рационального числа является иррациональным числом. Поэтому если бы это пространство было независимым, то из теоремы 2 следует, что иррациональное число равно рациональному. Что невозможно. □

Замечание 5. Используя аналогичные соображения, можно предложить много различных вариантов построения зависимых вероятностных пространств.

Пример 2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$, β — произвольные рациональные числа и пусть

$$s = \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m + \beta.$$

Тогда вероятностное пространство с вероятностями

$$p_k = \mathbf{P}(\omega_k) = \frac{\alpha_k \sqrt{2}}{s}, \quad 1 \le k \le N-1; \quad p_N = \frac{\beta \sqrt[3]{3}}{s}$$

является зависимым.

Пример 3. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{N-2} = 1$, $\alpha_{N-1} = \alpha_N = \sqrt[3]{2}$. Тогда вероятностное пространство с вероятностями

$$p_k = \mathrm{P}(\omega_k) = \frac{1}{s}, \quad 1 \le k \le N-2; \quad p_{N-1} = p_N = \frac{\sqrt[3]{2}}{s}$$

является независимым, если N — четное число и зависимым, если N — нечетное число, где $s = N - 2 + 2\sqrt[3]{2}$.

Доказательство. Все множество Ω разобьем на четыре несовместных события $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$.

Пусть N — четное число. Укажем два независимых события A и B. Пусть каждое из событий Ω_1 и Ω_3 состоит из одного элемента: Ω_1 — из α_{N-1}, а Ω_3 — из α_N. Событие Ω_2

— из элементов $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\frac{N-2}{2}}$, а Ω_4 из элементов $\alpha_{N/2} = \alpha_2 = \dots = \alpha_{N-2}$. Легко проверить справедливость равенства

$$\mu\left(\Omega_1, s\right) \mu\left(\Omega_2, s\right) = \mu\left(\Omega_3, s\right) \mu\left(\Omega_4, s\right) \tag{4}$$

Поэтому из теоремы 2 следует независимость.

Пусть N — нечетное число. Покажем, что при любом выборе подмножеств Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 равенство (3) невозможно. Очевидно, что если оба элемента α_{N-1} и α_N входят либо в $\Omega_1 + \Omega_2$ либо в $\Omega_3 + \Omega_4$, то равенство (4) невозможно, т.к. иррациональное число не равно рациональному. Без ограничения общности будем считать, что α_{N-1} входит в Ω_1, а α_N входит в Ω_3. Равенство (4) в этом случае можно записать в виде

$$(\sqrt[3]{2} + a)b = (\sqrt[3]{2} + c)d, \tag{5}$$

где a, b, c, d — целые числа, удовлетворяющие условию $a \geq 0$, $c \geq 0$, $b > 0$, $d > 0$, $a + b + c + d = N - 2$. Из (5) следует равенство $(b - d)\sqrt[3]{2} = cd - ab$. Если $b \neq d$, то получаем, что число $\sqrt[3]{2}$ является рациональным. Что неверно. Если же $b = d$, то из (5) получаем, что $a = c$. Поэтому $N - 2 = a + b + c + d = 2(a + b)$, что противоречит нечетности числа N. $\square$

Другой способ построения зависимых и независимых пространств продемонстрируем на следующем примере. Пусть $\Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ —- дискретное вероятностное пространство и пусть $p_k = \mathbf{P}(\omega_k) > 0$ $(1 \leq k \leq N)$. На этом пространстве элементарных событий зададим другую вероятностную меру следующим образом:

$$\mathbf{P}(\omega_1) = p_1(x) = \frac{x}{x+q}, \quad \mathbf{P}(\omega_k) = p_k(x) = \frac{p_k}{x+q}, \quad (2 \leq k \leq N),$$

где x — некоторое неотрицательное число и $q = p_2 + \dots + p_N$. Будем обозначать это вероятностное пространство через Ω_x. Очевидно, что $\Omega_{p_1} = \Omega$. Поставим следующий вопрос: при каких значениях x пространство Ω_x будет независимым и при каких зависимым? Чтобы применить теорему 2, разобьем Ω_x на четыре непересекающихся подмножества $\Omega_x = \Omega_x^1 + \Omega_x^2 + \Omega_x^3 + \Omega_x^4$, например, следующим образом: $\Omega_x^1 = \Omega_x^1(\omega_1)$, $\Omega_x^2 = \Omega_x^2(\omega_2)$, $\Omega_x^3 = \Omega_x^3(\omega_3)$, $\Omega_x^4 = \Omega_x^4(\omega_4, \dots, \omega_N)$. Подберем x так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{P}(\Omega_x^1)\mathbf{P}(\Omega_x^2) = \mathbf{P}(\Omega_x^3)\mathbf{P}(\Omega_x^4) \tag{6}$$

Равенство (6) эквивалентно равенству $xp_2 = p_3 r$, где $r = p_4 + ... + p_N$. Поэтому, если выбрать $x = p_3 r / p_2$, то в силу теоремы 2, Ω_x будет независимым, причем

$$\mathbf{P}(\omega_1) = \frac{p_3 r}{p_2 q + p_3 r}, \quad \mathbf{P}(\omega_k) = \frac{p_2 p_k}{p_2 q + p_3 r}, \quad 2 \leq k \leq N.$$

Заметим, что т.к. пространство элементарных событий является конечным множеством, то существует лишь конечное число разбиений его на четыре непересекающихся подмножества. Запишем для каждого из таких разбиений равенство (6). Каждое из этих равенств имеет вид

$$a(x + b) = c,$$

причем числа a, b, c зависят от разбиения.

Рассмотрим эти равенства как уравнения относительно x. Нас будут интересовать только те корни этих уравнений, для которых выполнено неравенство $x > 0$, чтобы вероятность события ω_1 в Ω_x была положительна. Обозначим множество корней через X. Как показано выше, X непусто и конечно. Тогда пространство Ω_x будет независимым, если $x \in X$ и зависимым, если $x \notin X$.

Интересно отметить, что множество независимых пространств Ω_x конечно, а множество зависимых пространств Ω_x имеет мощность континуума.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Потапову М.К. за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Shiflett R. C. and Shultz H. S.*, An approach to independent sets // Mathematical Spectrum, 1979/80, v. 12, p. 11–16.

[2] *Eisenberg B. and Ghosh B. K.*, Independent events in a discrete uniform probability space // Amer. Statistician, 1987, v. 41, № 1, p. 52–56.

[3] *Baryshnikov Y. M. and Eisenberg B.*, Independent events and independent experiments // Proc. Amer. Math. Soc., 1993, v. 118, № 2, p. 615–617.

[4] *Chen Z., Rubin H. and Vitale R. A.*, Independence and determination of probabilities // Proc. Amer. Math. Soc., 1997, v. 125, № 12, p. 3721–3723.

[5] *Chen Z., Rubin H. and Vitale R. A.*, Addendum to «Independence and determination of probabilities» // Proc. Amer. Math. Soc. 2001, v. 129, № 9, p. 2817.

[6] *Skekely G. J. and Mori T. F.*, Independence and atoms // Proc. Amer. Math. Soc., 2001, v. 130, № 1, p. 213–216.

[7] *Edwards W., Shiflett R. and Shultz H.*, Dependent probability spaces // Collega Mathematics Journal, 2008, v. 39, № 3, p. 221–226.

[8] *Ionascu E. J. and Stancu A. A.*, On independent sets in purely atomic probability spaces with geometric distribution // Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 2010, v. 79, № 1, p. 31–38.

[9] *Сушкевич А.К.*, Теория чисел. Харьков: Изд-во ХГУ, 1956.

Исследование индексов рекуррентных случайных последовательностей с помощью процессов с непрерывным временем[1]

Голдаева А.А.[2]

В работе предлагается новый подход, связанный с рассмотрением стохастических разностных последовательностей как последовательностей наблюдений (в детерминированные или случайные моменты времени) процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. Основными результатами являются вывод явной формулы индекса хвоста и оценка сверху экстремального индекса.

1 Введение

Рассмотрим процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому разностному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \tag{1}$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые, одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Известно, что стационарные процессы вида (1) при довольно общих условиях обладают двумя важными свойствами, относящимися к поведению их экстремумов: стационарное распределение имеет степенной хвост, а максимум $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ при $n \to \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением.

Процессы (1) изучаются, начиная с работы [1]. В работе [2], которая посвящена исследованию двух числовых характеристик — индекса хвоста κ и экстремального индекса θ, найдены общие формулы для них, но они не дают ответа в явном виде и результат может быть получен только численно.

Исследования в данной области ведутся давно, но многие вопросы остаются открытыми. Аналитические результаты получены только в некоторых частных случаях. Так, в работе [3] найдены индексы κ и θ для логлапласовского случая (см. далее пример 2). Поэтому представляет интерес поиск других случаев, когда индексы могут быть выписаны в явном виде, и разработка подходов, позволяющих исследовать их аналитически.

Целью данной работы является отыскание явной формулы индекса хвоста κ и оценка экстремального индекса θ процесса Y_n. Для этого предлагается новый подход, состоящий

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Голдаева Анна Алексеевна, gold_ann@list.ru, ассистент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

в рассмотрении некоторых последовательностей, удовлетворяющих (1), как последовательностей наблюдений процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением.

Отметим, что уравнение (1) может иметь различные приложения. Например, оно может описывать динамику некоторого денежного фонда [4, §8.4.1], куда через определенные промежутки времени поступают вклады (величины B_n), а в остальное время изменения капитала происходят пропорционально его величине (со случайными коэффициентами A_n), причем учитываются как доходы, так и расходы.

Дальнейшие рассуждения будут опираться на следующую теорему.

Теорема A. [2]. *Пусть процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяет уравнению* (1), *и пусть*
1) существует такое число $\kappa > 0$, что $\mathrm{E}\, A_1^\kappa = 1$, $\mathrm{E}\, A_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty$, $0 < \mathrm{E}\, B_1^\kappa < \infty$;
2) распределение $B_1/(1-A_1)$ невырождено, а распределение $\ln A_1$ при условии, что $A_1 \neq 0$, не решетчатое.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) уравнение $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, где Y_∞ и (A_1, B_1) независимы, имеет единственное решение $Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^\infty B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$;

2) если в (1) *положить $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, то процесс $\{Y_n\}$ будет стационарным;*

3) при любом начальном условии процесса $\{Y_n\}$ имеет место $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$, $n \to \infty$;

4) существует постоянная $c > 0$, такая, что $\mathrm{P}(Y_\infty > x) \sim c x^{-\kappa}$ при $x \to \infty$;

5) процесс Y_n имеет экстремальный индекс θ, вычисляемый по формуле

$$\theta = \int_1^\infty \mathrm{P}\Big(\bigvee_{j=1}^\infty \prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1}\Big) \kappa y^{-\kappa-1}\, dy,$$

причем если $a_n = n^{-1/\kappa}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n M_n \leq x) = \exp(-c\theta\, x^{-\kappa})$$

для всех $x > 0$.

Заметим, что поведение процесса (1) в достаточно общем случае определяется только величинами A_n. Другими словами, если два процесса вида (1) заданы парами случайных величин (A_n, B_n) и $(A_n, \tilde{B}_n)$, $n \geq 1$, соответственно, причем эти пары удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы А, то оба процесса имеют одинаковые индексы хвоста κ и одинаковые экстремальные индексы θ. Таким образом, нет необходимости, чтобы конкретный процесс (1) представлялся в виде последовательности наблюдений процесса с непрерывным временем, достаточно, чтобы такое представление имел некоторый процесс с такими же коэффициентами A_n.

2 Вывод явной формулы индекса хвоста

Рассмотрим случайный процесс $(X_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = (c - d \cdot X_t)\, dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = x, \tag{2}$$

где W — стандартное броуновское движение, $c \in \mathbb{R}$, $d > 0$, $\sigma > 0$. Вид этого уравнения подобран так, чтобы из него получалось уравнение (1), что будет показано далее.

Согласно [5, теорема 5.2.1], уравнение (2) имеет единственное t-непрерывное решение. В работе [6] для случая $c > 0$, $d > -\frac{\sigma^2}{2}$ это решение представлено в явном виде:

$$X_t = e^{-(d+\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \left(x + c \int_0^t e^{(d+\frac{\sigma^2}{2})s-\sigma W_s}\, ds \right), \quad t \geq 0.$$

Обозначим $a = -(d + \frac{\sigma^2}{2})$, тогда решение уравнения (2) перепишется следующим образом:

$$X_t = e^{at+\sigma W_t} \left(x + c \int_0^t e^{-as-\sigma W_s}\, ds \right), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Также в работе [6] в явном виде указана плотность стационарного распределения:

$$h(x) = \left(\frac{\sigma^2}{2c} \right)^{-\frac{2d}{\sigma^2}-1} \left(\Gamma\left(\frac{2d}{\sigma^2} + 1 \right) \right)^{-1} x^{-2d/\sigma^2-2} \exp\left(-\frac{2c}{\sigma^2} x^{-1} \right), \quad x > 0,$$

и найден индекс хвоста $\kappa = \frac{d}{\sigma^2} + 1 = -\frac{2a}{\sigma^2}$.

Заметим, что если случайная величина X_0 не зависит от процесса W и имеет стационарное распределение, то процесс (3) является стационарным.

Лемма 1. *Пусть Δ — неотрицательная случайная величина, W — стандартное броуновское движение, Δ и W независимы, $A \stackrel{d}{=} e^{a\Delta+\sigma W_\Delta}$, $a < 0$, $\sigma > 0$. Рассмотрим функции $\psi(s) = \mathrm{E}\, A^s$ и $\varphi(u) = \mathrm{E}\, e^{-u\Delta}$ — преобразование Лапласа случайной величины Δ. Тогда $\psi(s) = \varphi\left(-as - \frac{\sigma^2}{2}s^2\right)$.*

Доказательство приведено в [7].

Следствие 1. *Пусть случайная величина A представляется в виде*

$$A \stackrel{d}{=} e^{a\Delta+\sigma\sqrt{\Delta}\xi}, \tag{4}$$

где Δ — неотрицательная случайная величина, ξ имеет стандартное нормальное распределение, Δ и ξ независимы, $a < 0$, $\sigma > 0$. Тогда выполняется равенство $\psi(s) = \psi(\kappa - s)$, где $\kappa = -\frac{2a}{\sigma^2}$.

Следствие 2. *Пусть $\psi(s) = \mathrm{E}\, A^s$, где A — некоторая неотрицательная случайная величина. Если функция $\psi(s(u))$, где $s(u) = -\frac{a}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{a^2-2\sigma^2 u}}{\sigma^2}$ или $s(u) = -\frac{a}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{a^2-2\sigma^2 u}}{\sigma^2}$, $a < 0$, $\sigma > 0$, является преобразованием Лапласа некоторой неотрицательной случайной величины Δ, то величина A представляется в виде (4).*

Теорема 1. *Пусть $A \stackrel{d}{=} e^{a\Delta+\sigma\sqrt{\Delta}\xi}$, где ξ имеет стандартное нормальное распределение, Δ — неотрицательная случайная величина, причем $\mathrm{E}\, \Delta^{-\frac{2a}{\sigma^2}+1} < \infty$, $a < 0$, $\sigma > 0$. Рассмотрим процесс X, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением (2), в котором $c > 0$ — произвольная постоянная, $d = -(a + \frac{\sigma^2}{2})$. Рассмотрим также случайные величины $\Delta_n \stackrel{d}{=} \Delta$, независимые в совокупности и не зависящие от процесса W; $T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, $Y_n = X_{T_n}$, $n \geq 1$. Тогда Y_n удовлетворяют всем условиям теоремы* A, *$A_n \stackrel{d}{=} A$, $n \geq 1$, причем индекс $\kappa = -\frac{2a}{\sigma^2}$.*

Доказательство приведено в [7].

3 Оценка экстремального индекса

Рассмотрим случайный процесс $(X_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению (2). Рассмотрим также процесс $Y_n = X_{T_n}$, $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, $n \geq 1$, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — независимые, неотрицательные, одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса W, с $\mathrm{E}\,\Delta^{-\frac{2a}{\sigma^2}+1} < \infty$.

Обозначим $M_t^X = \max_{[0,t]} X_s$, $M_n^Y = \max_{k=\overline{1,n}} Y_k$.

Чтобы найти оценку θ, применим метод, который использовался в [6]. Для стохастического дифференциального уравнения (2) можно ввести масштабную функцию $s(x)$ и меру скорости m. Масштабная функция определяется следующим равенством:

$$s(x) = \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{c - d\cdot t}{\sigma^2 t^2}\,dt\right) dy, \qquad x \in (0, \infty),$$

откуда следует, что

$$s'(x) = \exp\left(-2\int_1^x \frac{c - d\cdot t}{\sigma^2 t^2}\,dt\right) = \exp\left(-\frac{2c}{\sigma^2} + \frac{2c}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^{\frac{2d}{\sigma^2}}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Мера скорости m процесса, заданного уравнением (2), абсолютно непрерывна и имеет лебегову плотность

$$m'(x) = \frac{2}{\sigma^2 x^2 s'(x)}, \qquad x \in (0, \infty).$$

В этом случае процесс X_t является эргодическим, его стационарное распределение H абсолютно непрерывно и имеет плотность

$$h(x) = \frac{m'(x)}{|m|}, \qquad x \in (0, \infty),$$

где $|m| = m((0, \infty))$.

Теорема B. [6]. *Для любого начального значения $X_0 = y \in (0, \infty)$ и любой функции $u(t) \uparrow \infty$ выполнено равенство*

$$\lim_{t\to\infty} |\mathrm{P}(M_t^X \leq u(t)) - F^t(u(t))| = 0,$$

где $F(x) = \exp\left(-\frac{1}{|m|s(x)}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.

Теорема 2. *Имеет место следующая оценка: $\theta \leq \mu \cdot \frac{2a^2}{\sigma^2}$, где $\mu = \mathrm{E}\,\Delta$.*

Доказательство. Поскольку величины имеют вид $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, $n \geq 1$, где $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — независимые, неотрицательные, одинаково распределенные случайные величины, то T_n образуют процесс восстановления. Пусть $\nu(t)$ — число попадающих на $[0, t]$ моментов восстановления. В силу элементарной теоремы восстановления $\nu(t)/t \to 1/\mu$, $t \to \infty$, п.н. Далее используем тот факт, что $M_{\nu(t)}^Y \leq M_t^X$ и для любой функции $u(t) \uparrow \infty$ выполнено неравенство

$$\mathrm{P}(M_{\nu(t)}^Y \leq u(t)) \geq \mathrm{P}(M_t^X \leq u(t)).$$

Находим асимптотическое отношение хвостов распределений F и H: $\bar{F}(x)/\bar{H}(x) \to \frac{2a^2}{\sigma^2}$, $x \to \infty$. Рассмотрим последовательность u_n такую, что $n \cdot \bar{F}(u_n) \to 1$, $n \to \infty$. Перейдем в обеих частях неравенства к пределу при $n \to \infty$. Предел правой части равен $\lim_{n\to\infty} F^n(u_n) = e^{-1}$, а предел левой части равен

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,H(u_n)^{\theta\nu(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,H(u_n)^{\theta\frac{\nu(n)}{n}n} = \lim_{n\to\infty} H(u_n)^{\theta\frac{1}{\mu}n} = e^{-\theta\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\sigma^2}{2a^2}},$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Более подробно доказательство приведено в [8].

В работе [3] была доказана следующая лемма.

Лемма А. *Если* $\tilde{A}_n \stackrel{d}{=} A_n^s$, $n \geq 1$, $s > 0$, *то* $\tilde{\kappa} = \kappa/s$, $\tilde{\theta} = \theta$.

С помощью этой леммы было показано, что в случае логнормальных A_n экстремальный индекс зависит только от a/σ. Можно доказать более общее утверждение об однородности экстремального индекса по параметрам a, σ и μ.

Теорема 3. *Если* $\Delta \stackrel{d}{=} \mu\Delta_0$, *где* $\mathrm{E}\,\Delta_0 = 1$, $\mu > 0$, *то экстремальный индекс* θ *зависит только от величины* $\frac{a}{\sigma}\sqrt{\mu}$.

Доказательство приведено в [8].

4 Примеры

Пример 1. Случайные величины $\Delta_n = h$, $n \geq 1$, $h > 0$. В этом случае величины A_n имеют логнормальное распределение, т. е. величины $Z_n = \ln A_n$ имеют нормальное распределение с параметрами $(ah, \sigma^2 h)$. Этот пример в случае $h = 1$ подробно рассмотрен в работе [3], где найден индекс хвоста $\kappa = -\frac{a}{2\sigma^2}$ и доказано, что экстремальный индекс θ зависит только от величины a/σ и является невозрастающей функцией от нее на $(-\infty, 0)$.

Нормальная модель для логарифмических приращений финансовых показателей является традиционной в финансовой математике (модель Блэка–Шоулса). Однако практика показывает, что логнормальная модель не всегда удовлетворительно описывает действительность. Как одну из альтернатив можно рассмотреть логлапласовское распределение [9]. Симметричный логлапласовский закон впервые появился еще у Фреше [10] в модели дохода. В [11] этот закон был выведен из некоторой стохастической модели дохода, причем его подгонка под реальные статистические данные дала лучшие результаты, чем логнормальная модель. Логлапласовское распределение возникает также при остановке геометрического броуновского движения (традиционного в финансовой математике) в случайный момент времени, распределенный показательно. В финансовых приложениях это может быть связано с тем, что экономическое время отличается от календарного.

Пример 2. Случайные величины Δ_n, $n \geq 1$, имеют показательное распределение с параметром λ. Покажем, что в этом случае величины A_n имеют логлапласовское распределение. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Z_n \in B) = \mathrm{P}(a\Delta_n + \sigma W(\Delta_n) \in B) = \\
&= \mathrm{E}\ \mathrm{I}\{a\Delta_n + \sigma W(\Delta_n) \in B\} = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{I}\{a\Delta_n + \sigma W(\Delta_n) \in B\}|\Delta_n)) = \\
&= \mathrm{E}\int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_n}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - a\Delta_n)^2}{2\sigma^2\Delta_n}\right) du = \\
&= \textstyle\int_B \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-ax)^2}{2\sigma^2 x}\right) \lambda \exp(-\lambda x)\, dx\, du, \\
&p_{Z_n}(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi x}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - ax)^2}{2\sigma^2 x} - \lambda x\right) dx = \\
&= \textstyle\frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2}}{\sigma^2}|u| + \frac{a}{\sigma^2}u\right).
\end{aligned}
$$

Поскольку плотность распределения Лапласа задается формулой $p(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{\alpha x}$ при $x < 0$ и $p(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{-\beta x}$ при $x \geq 0$, то нетрудно заметить, что Z_n имеет распределение

Лапласа с параметрами

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2} + a}{\sigma^2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2} - a}{\sigma^2}, \tag{5}$$

а A_n — соответственно логлапласовское распределение.

Логлапласовский случай также рассмотрен в [3], для него найдены индекс хвоста $\kappa = \beta - \alpha$ и экстремальный индекс $\theta = (1 - \frac{\alpha}{\beta})^2$. Подставляя в эти формулы (5), получаем $\kappa = -\frac{2a}{\sigma^2}$ и $\theta = \frac{4a^2}{(\sqrt{a^2+2\sigma^2\lambda}-a)^2}$. Отметим, что $\lambda\theta \to \frac{2a^2}{\sigma^2}$ при $\lambda \to \infty$, т.е. оценка из теоремы 2 оказывается асимптотически точной.

Пример 3. Пусть задан $ARCH$-процесс первого порядка

$$X_n = \varepsilon_n \sqrt{\gamma + \lambda X_{n-1}^2}, \quad n \geq 1, \quad \gamma, \lambda > 0,$$

где ε_n, $n \geq 1$, независимы и одинаково распределены. Тогда последовательность $Y_n = X_n^2$ удовлетворяет (1) с $A_n = \lambda\varepsilon_n^2$, $B_n = \gamma\varepsilon_n^2$, $n \geq 1$. В классической модели ε_n имеют стандартное нормальное распределение, поэтому величины A_n имеют гамма-распределение с параметрами $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\lambda})$. Этот случай разобран в работе [2], где получено следующее уравнение для κ: $\Gamma(\kappa + 1/2) = \pi^{1/2}(2\lambda)^{-\kappa}$ и индексы κ и θ найдены численно.

Покажем, что A_n нельзя представить в виде (4). Рассмотрим функцию

$$\psi(s) = \mathrm{E}\, A_n^s = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2s} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{(2\lambda)^s}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{s-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{(2\lambda)^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

Необходимое для представления (4) условие $\psi(s) = \psi(\kappa - s)$ равносильно следующему: $\Gamma(\kappa - s + 1/2) = (2\lambda)^{2s-\kappa}\Gamma(s + 1/2)$. Это условие не выполняется ни при каких $\lambda > 0$.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту А.В. Лебедеву за постановку задачи, а также за внимание и поддержку при работе над статьей.

Список литературы

[1] *Vervaat W.*, On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables // Adv. Appl. Probab., 1979, v. 11, p. 750–783.

[2] *de Haan L., Resnick S., Rootzén H., de Vries G.*, Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes // Stochastic Processes and their Applications, 1989, v. 32, p. 213–224.

[3] *Новицкая О.С., Яцало Е.Б.*, Экстремальное поведение рекуррентных случайных последовательностей // Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ., 2008, № 5, с. 6–10.

[4] *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.*, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer, 2003.

[5] *Оксендаль Б.*, Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М: Мир, 2003.

[6] *Klüppelberg C.*, Risk Management and Extreme Value Theory / Extreme Values in Finance, Telecommunication and the Environment. Boca Raton:Clapman and Hall/CRC, 2002, p.101–168.

[7] *Голдаева А.А.*, Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2010, № 6, с. 13–18.

[8] *Голдаева А.А.*, Равномерная оценка экстремального индекса стохастических рекуррентных последовательностей // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2012, № 2 (в печати)

[9] *Kozubowski T. J., Podgorski K.*, Log-Laplace distributions // Int. Math. J., 2003, v. 3, № 4, p. 467–495.

[10] *Fréshet M.*, Sur les formules de répartition des revenus // Rev. Inst. Int. Statist, 1939, v. 7, p. 32-38.

[11] *Inoue T.*, On income distribution: the welfare implication of the general equilibrium model and the stochastic processes of income distribution formation: Ph.D.Thesis. University of Minnesota, 1978.

Предельные теоремы для стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов с двумя типами частиц[1]

Лебедев А.В.[2]

Рассматриваются максимальные ветвящиеся процессы с двумя типами частиц, ранее введенные автором. Доказаны предельные теоремы для стационарных распределений таких процессов.

1 Введение

Максимальные ветвящиеся процессы (МВП) были введены Дж. Ламперти в [1] как «экстремальные» аналоги процессов Гальтона-Ватсона (с заменой суммирования численностей потомков частиц на взятие максимума из них). Исследования этих процессов были продолжены автором в ряде работ. В [2] было проведено обобщение МВП по области значений с $\mathbf{Z}_+$ на $\mathbf{R}_+$ и доказана эргодическая теорема. Некоторые предельные теоремы для стационарных распределений можно найти в [3, 4, 5]. Обзор исследований автора для МВП с одним типом частиц представлен в [6].

В [7] были введены МВП с $d \geq 2$ типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$. При некоторых дополнительных предположениях доказана эргодическая теорема в случае $d = 2$.

МВП с двумя типами частиц может быть определен как цепь Маркова $\{Z(n)\}$, $Z(n) = (Z_1(n), Z_2(n))$, $n \geq 0$, с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, Z_2(n) \leq y_2 | Z_1(n-1) = x_1, Z_2(n-1) = x_2) = F_1^{x_1}(y_1, y_2) F_2^{x_2}(y_1, y_2),$$

где двумерные распределения F_1 и F_2 имеют носители $T_1, T_2 \subset \mathbf{R}_+^2$.

Распределения F_1 и F_2 в целочисленном случае имеют смысл совместных распределений численностей потомков каждого типа от частицы первого и второго типов соответственно. Мы будет говорить о таких численностях и в общем случае, понимая, что они могут принимать не только целые, но и любые неотрицательные значения.

Далее будут доказаны предельные теоремы для стационарных распределений МВП с двумя типами частиц в случаях некоторых семейств распределений численностей потомков.

Результаты работы были частично представлены на IX Международных Колмогоровских чтениях (Ярославль, 17–20 мая 2011) [8].

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Лебедев Алексей Викторович, alebedev@mech.math.msu.su, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

2 Случай растущих прямоугольников

Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с $F_k^{(\lambda)}$ и $T_k^{(\lambda)} \subset [1,\lambda_1]\times[1,\lambda_2]$, $\lambda>0$, $\lambda_k=p_k\lambda$, $p_k>0$, $\lambda_k\ge 1$, $k=1,2$. По теореме 1 [7] для каждого процесса $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$ на $[1,\lambda_1]\times[1,\lambda_2]$. Обозначим случайный вектор с таким распределением через $\tilde Z^{(\lambda)} = (\tilde Z_1^{(\lambda)}, \tilde Z_2^{(\lambda)})$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda\to\infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался автором в [3].

Теорема 1. *Если для любого вектора* $q=(q_1,q_2)\in(0,1]^2$, $q\ne(1,1)$, *верно*

$$\limsup_{\lambda\to\infty} F_k^{(\lambda)}(q_1\lambda_1, q_2\lambda_2) < 1, \quad k=1,2 \tag{1}$$

и для некоторой векторной функции $u(\lambda)=(u_1(\lambda),u_2(\lambda))$ *существуют пределы*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-F_k^{(\lambda)}(u(\lambda)))=\tau_k\in[0,+\infty],\quad k=1,2,$$

то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = e^{-(p_1\tau_1+p_2\tau_2)}.$$

Доказательство. Обозначим $r=(r_1,r_2)$, $r_k=q_k\lambda_k$. Докажем сначала, что $\Psi^{(\lambda)}(r)\to 0$, $\lambda\to\infty$. Используем разложение

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(\lambda)}(r) = \mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}\in[1,r_1], \tilde Z_2^{(\lambda)}\in[1,r_2]\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}> r_1, \tilde Z_2^{(\lambda)}\in[1,r_2]\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}\in[1,r_1], \tilde Z_2^{(\lambda)}> r_2\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}> r_1, \tilde Z_2^{(\lambda)}> r_2\}) \le\\
&\le F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)\Psi^{(\lambda)}(r) + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r) + F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2} + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\Psi^{(\lambda)}(r) \le \frac{F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r) + F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2} + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2}}{1-F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)} \to 0, \quad \lambda\to\infty.$$

Выберем теперь $q\in(0,1)^2$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = \mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}\in[1,r_1], \tilde Z_2^{(\lambda)}\in[1,r_2]\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}> r_1, \tilde Z_2^{(\lambda)}\in[1,r_2]\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}\in[1,r_1], \tilde Z_2^{(\lambda)}> r_2\})+\\
&+\mathbf{M}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde Z_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde Z_1^{(\lambda)}> r_1, \tilde Z_2^{(\lambda)}> r_2\}),
\end{aligned}$$

откуда следуют неравенства

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \ge F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda_1}F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda_2}(1-\Psi^{(\lambda)}(r)),\\
&\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \le \Psi^{(\lambda)}(r) + \Psi^{(\lambda)}(r_1,\lambda_2) + \Psi^{(\lambda)}(\lambda_1,r_2) + F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{r_1}F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{r_2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Переходя в (2) к пределам по $\lambda\to\infty$ с учетом $F_k^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda}\to e^{-\tau_k}$, $k=1,2$, получаем:

$$e^{-(p_1\tau_1+p_2\tau_2)} \le \liminf_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \le \limsup_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \le e^{-(q_1p_1\tau_1+q_2p_1\tau_2)},$$

откуда в силу произвольности выбора q следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим функции распределения F_1^0, F_2^0 на $[0,1]^2$, принадлежащие областям притяжения некоторых невырожденных (по обеим компонентам) максимум-устойчивых законов H_1 и H_2 [9, 10] с одинаковой нормировкой максимумов, т.е. существуют такие функции $a_1(s)>0$, $a_2(s)$, $b_1(s)>0$, $b_2(s)$, $s>0$, что для векторной функции $v(s,x)=(a_1(s)x_1+b_1(s), a_2(s)x_2+b_2(s))$, $x=(x_1,x_2)$, верно

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(v(s,x))^s = H_1(x), \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(v(s,x))^s = H_2(x), \quad k=1,2. \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть выполнено (1) и существует векторная функция* $f(s,q)=(f_1(s,q), f_2(s,q))$ *такая, что*

$$\frac{1-F_k^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda,x))}{1-F_k^0(v(\lambda,x))} \to 1, \quad \lambda\to\infty. \tag{4}$$

Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(f(\lambda,v(\lambda,x)) = H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

Доказательство. В силу (3) и (4) получаем $\lambda(1-F_k^{(\lambda)}(f(\lambda,v(\lambda,x))) \to -\ln H_k(x)$. Обозначая $\tau_k=-\ln H_k(x)$, $u(\lambda)=f(\lambda,v(\lambda,x))$ и применяя теорему 1, получаем утверждение следствия. □

Наиболее простые примеры, когда применимо следствие 1, возникают при выполнении условий

$$F_k(x_1,x_2) = F_k^0\left(\frac{x_1-1}{\lambda_1-1}, \frac{x_2-1}{\lambda_2-1}\right), \quad k=1,2,$$

тогда $f(s,q)=((p_1s-1)q_1+1, (p_2s-1)q_2+1)$.

Далее в примерах будем предполагать для простоты, что $p_1=p_2=1$, т.е. рассматриваются стационарные распределения на растущих квадратах.

Пример 1. Пусть $F_1^0(x_1,x_2)=x_1^2x_2$, $F_2^0(x_1,x_2)=x_1x_2^2$ (численности потомков каждого типа от частицы каждого типа независимы). Тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{2y_1+y_2}, \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{y_1+2y_2},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(\lambda+y_1, \lambda+y_2) = e^{3(y_1+y_2)}, \quad y_1,y_2\le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)}=(\lambda-\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \lambda-\tilde{Z}_2^{(\lambda)})$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение с независимыми компонентами.

На рис. 1 представлены результаты моделирования процесса при $\lambda=10$ на протяжении 500 шагов с начальным условием $(10,10)$. В других примерах эти параметры остаются неизменными.

При моделировании использовалось конструктивное представление процесса

$$Z_1(n) = 9U_{1,n}^{1/(2Z_1(n-1)+Z_2(n-1))}+1, \quad Z_2(n) = 9U_{2,n}^{1/(Z_1(n-1)+2Z_2(n-1))}+1,$$

где $U_{i,n}$, $i=1,2$, $n\ge 1$, независимы и равномерно распределены на $[0,1]$.

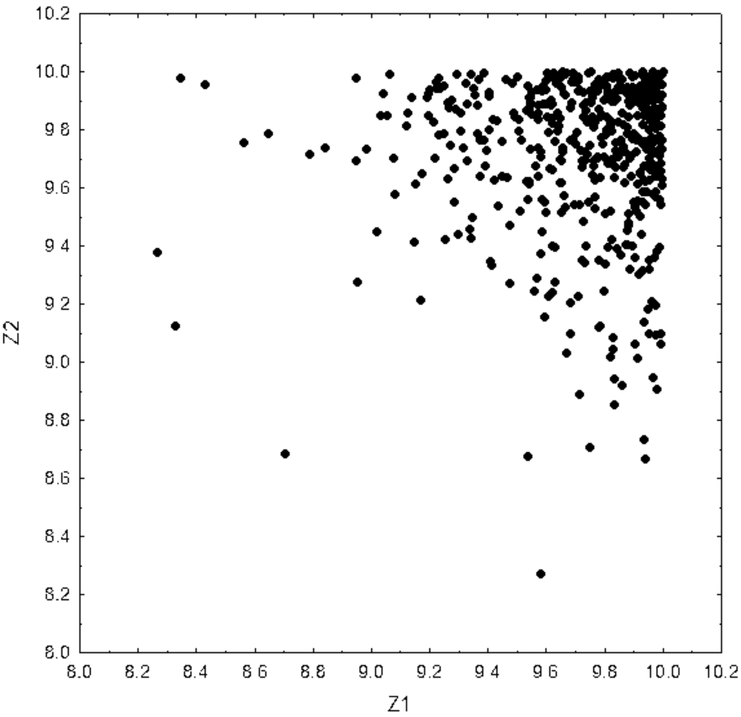


Рис. 1:

Пример 2. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = \min\{x_1^2, x_2\}$, $F_2^0(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2^2\}$ (частные распределения численностей потомков каждого типа от частицы каждого типа те же, что и в примере 1, однако здесь эти численности комонотонны). Тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{\min\{2y_1,y_2\}}, \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{\min\{y_1,2y_2\}},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(\lambda + y_1, \lambda + y_2) = e^{\min\{2y_1,y_2\}+\min\{y_1,2y_2\}}, \quad y_1, y_2 \le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)}$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение, но уже с зависимыми компонентами. Легко показать, что он распределен в угле $\{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^2 : 1/2 \le y_2/y_1 \le 2\}$.

На рис. 2 представлены результаты моделирования процесса. Пунктиром обозначены кривые $Z_2 = 1 + 3\sqrt{Z_1 - 1}$ и $Z_2 = 1 + (Z_1 - 1)^2/9$, ограничивающие область возможных значений.

При моделировании использовалось конструктивное представление процесса

$$Z_1(n) = 9\max\left\{U_{1,n}^{1/(2Z_1(n-1))}, U_{2,n}^{1/Z_2(n-1)}\right\} + 1,\ \ Z_2(n) = 9\max\left\{U_{1,n}^{1/Z_1(n-1)}, U_{2,n}^{1/(2Z_2(n-1))}\right\} + 1,$$

где $U_{i,n}$, $i = 1, 2$, $n \ge 1$, независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$.

В общем случае, в качестве предельных распределений компонент вектора $\tilde{Z}^{(\lambda)}$ могут выступать распределения экстремальных типов Вейбулла $H(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$, $x \le 0$, $\alpha > 0$, и Гумбеля $H(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ [9, 10].

Введем функцию распределения $G(x) = 1 - \exp\{-x/(1-x)\}$, $x \in [0, 1)$.

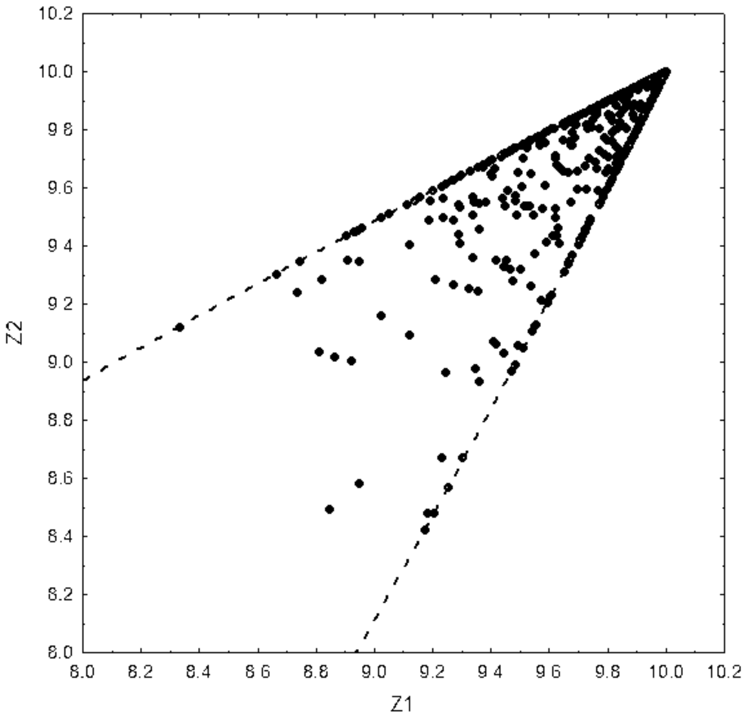


Рис. 2:

Пример 3. Пусть $F_1^0(x_1,x_2)=G^2(x_1)G(x_2)$, $F_2^0(x_1,x_2)=G(x_1)G^2(x_2)$, тогда

$$\lim_{s\to\infty}F_1^0(z_1,z_2)^s=\exp\{-2e^{-y_1}+e^{-y_2}\},\quad \lim_{s\to\infty}F_2^0(z_1,z_2)^s=\exp\{-e^{-y_1}+2e^{-y_2}\},$$

где

$$z_i=1-\frac{1}{1+\ln s}+\frac{y_i}{(1+\ln s)^2},\quad i=1,2,$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(w_1,w_2)=\exp\{-3(e^{-y_1}+e^{-y_2})\},$$

где

$$w_i=\lambda-\frac{\lambda-1}{1+\ln\lambda}+\frac{(\lambda-1)y_i}{(1+\ln\lambda)^2},\quad i=1,2.$$

Таким образом получаем в качестве предельного двумерное распределение Гумбеля с независимыми компонентами.

На рис. 3 представлены результаты моделирования процесса.

Пример 4. Пусть $F_1^0(x_1,x_2)=\min\{G^2(x_1),G(x_2)\}$, $F_2^0(x_1,x_2)=\min\{G(x_1),G^2(x_2)\}$, тогда (в обозначениях примера 3)

$$\lim_{s\to\infty}F_1^0(z_1,z_2)^s=\exp\left\{-e^{-\min\{y_1-\ln 2,y_2\}}\right\},\quad \lim_{s\to\infty}F_2^0(z_1,z_2)^s=\exp\left\{-e^{-\min\{y_1,y_2-\ln 2\}}\right\},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(w_1,w_2)=\exp\left\{-\left(e^{-\min\{y_1-\ln 2,y_2\}}+e^{-\min\{y_1,y_2-\ln 2\}}\right)\right\}.$$

Таким образом получаем в качестве предельного двумерное распределение Гумбеля с зависимыми компонентами, заключенное в полосе $\{(y_1,y_2):|y_2-y_1|\le\ln 2\}$.

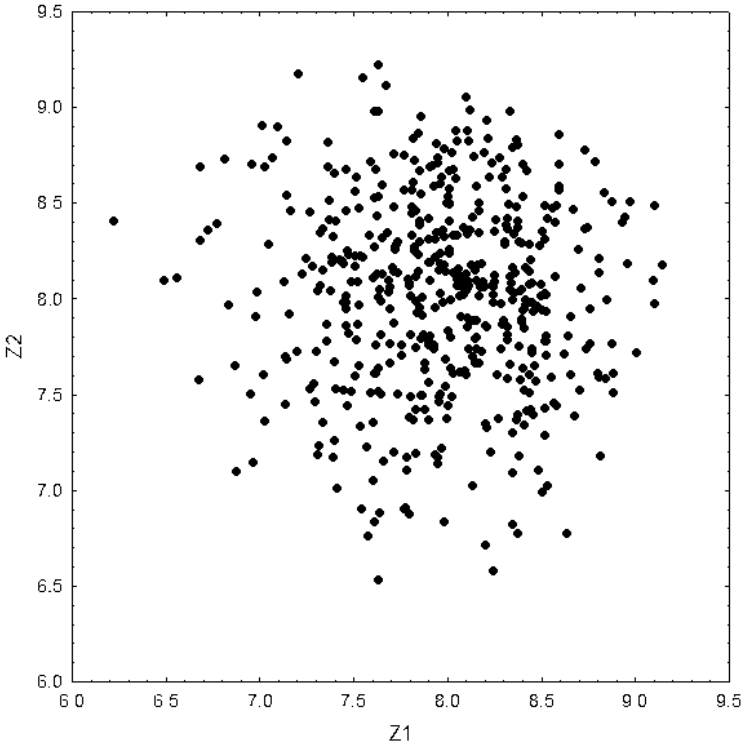


Рис. 3:

На рис. 4 представлены результаты моделирования процесса. Пунктиром обозначены кривые $G((Z_2-1)/9) = G^2((Z_1-1)/9)$ и $G^2((Z_2-1)/9) = G((Z_1-1)/9)$, ограничивающие область возможных значений.

Заметим, что следствие 1 дает только непрерывные предельные распределения (не обязательно абсолютно непрерывные). Однако предельные распределения могут быть и дискретными.

Следствие 2. *Пусть $F_1^{(N)}$ и $F_2^{(N)}$ — дискретные распределения на множествах $\{1,\ldots,N\}^2$, $N \geq 1$, и $F_k^{(N)}(m) = F_k^0(m/N)$, $m = (m_1, m_2) \in \{1,\ldots,N\}^2$, а распределения F_1^0 и F_2^0 удовлетворяют (3) с $a_k(s) = 1/s$, $b_k(s) = 1$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}(N-m_1, N-m_2) = H_1(-m)H_2(-m).$$

Доказательство. В силу (3) получаем $\lambda(1-F_k^{(\lambda)}(N-m_1, N-m_2)) \to -\ln H_k(-m)$. Обозначая $\tau_k = -\ln H_k(-m)$, $u(\lambda) = f(\lambda, v(\lambda, x))$ и применяя теорему 1, получаем утверждение следствия. □

Пример 5. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $F_2^0(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, тогда

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}(N-m_1, N-m_2) = e^{-3(m_1+m_2)}.$$

Таким образом, вектор $\hat{Z}^{(N)} = (N - \tilde{Z}_1^{(N)}, N - \tilde{Z}_2^{(N)})$ имеет асимптотически двумерное геометрическое распределение с независимыми компонентами.

Аналогично примерам 2 и 4, можно построить дискретные предельные распределения и с зависимыми компонентами.

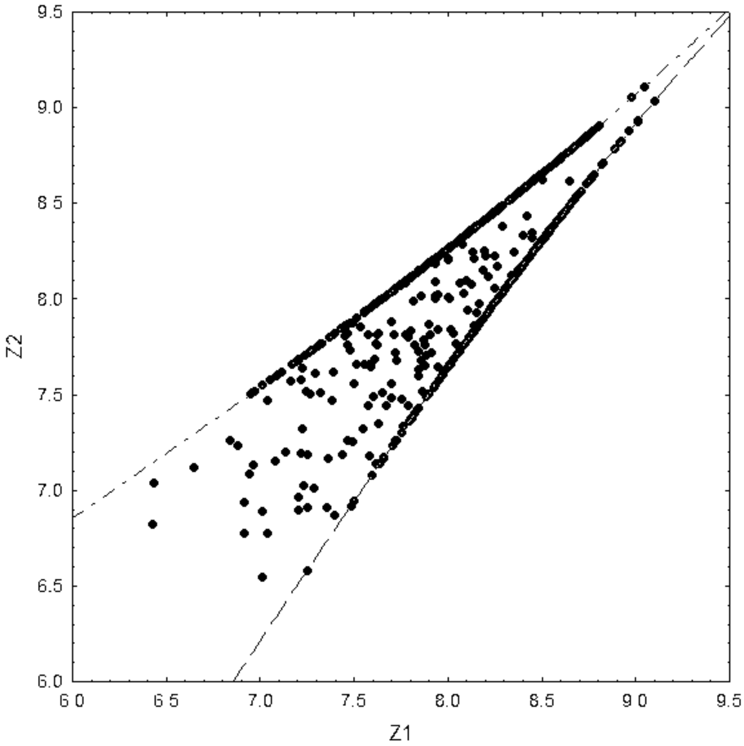


Рис. 4:

3 Степенные семейства и предельный закон Гумбеля

Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с $F_k^{(\lambda)}(x_1, x_2) = F_k^0(x_1, x_2)^\lambda$ на $T_k \subset [1, +\infty)^2$, $k = 1, 2$, $\lambda \geq 1$. Предположим, что F_1^0, F_2^0 удовлетворяют (3), где H_1 и H_2 — двумерные распределения Гумбеля (т.е. каждая компонента имеет распределение данного типа), причем $b_1(s), b_2(s) \to \infty$, $s \to \infty$. Критерии принадлежности распределения к области притяжения экстремального типа Гумбеля можно найти в [9, 10]. В частности, правый хвост должен убывать быстрее любой степени, и все моменты неотрицательной части конечны.

По теореме 1 [7] для каждого $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$ на $[1, +\infty]^2$. Будем по-прежнему обозначать случайный вектор с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался автором в [4].

Пусть F_{kl} — частное распределение l-ой компоненты двумерного распределения F_k, $k = 1, 2$, $l = 1, 2$. Определим функции

$$\varphi_{kl}(s) = \int_0^\infty (1 - F_{kl}^0(x)^s)\, dx, \quad s \geq 1, \quad k, l = 1, 2.$$

Как показано в [4, леммы 1–3], такие функции конечны при всех $s \geq 1$, не убывают и вогнуты, а кроме того, являются медленно меняющимися и $\varphi_{kl}(s) \sim u_{kl}(s)$, $s \to \infty$, где $u_{kl}(s) = (F_{kl}^0)^{-1}(1 - 1/s)$. В силу (3) и сходимости к экстремальному типу Гумбеля имеем $u_{kl}(s) \sim b_l(s)$, так что $\varphi_{kl}(s) \sim b_l(s)$, $s \to \infty$.

Введем также функции

$$\varphi_k(s_1, s_2) = \int_0^\infty (1 - F_{1k}^0(x)^{s_1} F_{2k}^0(x)^{s_2})\, dx, \quad s_1, s_2 \geq 1, \quad k = 1, 2.$$

Для них, очевидно, верны неравенства:

$$\varphi_k(s_1, s_2) \leq \varphi_{1k}(s_1) + \varphi_{2k}(s_2), \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Кроме того, они являются неубывающими и вогнутыми по векторам $s = (s_1, s_2)$ (что следует из монотонности и выпуклости экспоненты).

Обозначим $\mu_k^{(\lambda)} = \mathbf{M}\tilde{Z}_k^{(\lambda)}$, $k = 1, 2$. Очевидно, $\mu_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)} \geq 1$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ верны неравенства $\mu_k^{(\lambda)} \leq \varphi_k(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})$, $k = 1, 2$, при всех достаточно больших λ.*

Доказательство. В силу определения и свойств φ_k имеем

$$\mu_k^{(\lambda)} = \mathbf{M}\varphi_k(\lambda\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \lambda\tilde{Z}_2^{(\lambda)}) \leq \varphi_k(\lambda\mu_1^{(\lambda)}, \lambda\mu_2^{(\lambda)}) \leq \varphi_{1k}(\lambda\mu_1^{(\lambda)}) + \varphi_{2k}(\lambda\mu_2^{(\lambda)}). \tag{6}$$

Поскольку φ_{kl} медленно меняются, то для любого $\delta > 0$ существуют константы C_{kl} такие, что $\varphi_{kl}(s) \leq C_{kl}s^\delta$, $s \geq 1$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(\lambda)} &\leq C_{11}(\lambda\mu_1^{(\lambda)})^\delta + C_{21}(\lambda\mu_2^{(\lambda)})^\delta \\ \mu_2^{(\lambda)} &\leq C_{12}(\lambda\mu_1^{(\lambda)})^\delta + C_{22}(\lambda\mu_2^{(\lambda)})^\delta \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $\mu_0^{(\lambda)} = \max\{\mu_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)}\}$, $C_0 = \max\{C_{11} + C_{21}, C_{12} + C_{22}\}$. Тогда из (7) получаем

$$\mu_0^{(\lambda)} \leq C_0(\lambda\mu_0^{(\lambda)})^\delta,$$

откуда следует $\mu_0^{(\lambda)} \leq (C_0\lambda^\delta)^{1/(1-\delta)}$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ верно $\mu_1^{(\lambda)} \leq \lambda^\varepsilon$, $\mu_2^{(\lambda)} \leq \lambda^\varepsilon$ при всех достаточно больших λ. Подставляя эти оценки в (6), получаем утверждение леммы. □

Теорема 2. *Если для любого $\theta > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$s\varphi_j(s^{1+\varepsilon}, s^{1+\varepsilon})\bar{F}_{jk}^0(\theta b_k(s)) \to 0, \quad s \to \infty, \quad j, k = 1, 2, \tag{8}$$

то при $\lambda \to \infty$ верно

$$\tilde{Z}_k^{(\lambda)}/b_k(\lambda) \xrightarrow{P} 1, \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть $\theta > 1$, а $\varepsilon > 0$ из условий (8). Тогда при всех достаточно больших λ имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} > \theta b_k(\lambda)) = 1 - \mathbf{M}\left(F_{1k}^0(\theta b_k(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_{2k}^0(\theta b_k(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}}\right) \leq \\ &\leq \mu_1^{(\lambda)}\bar{F}_{1k}^{(\lambda)}(\theta b_k(\lambda)) + \mu_2^{(\lambda)}\bar{F}_{2k}^{(\lambda)}(\theta b_k(\lambda)) \leq \lambda\mu_1^{(\lambda)}\bar{F}_{1k}^0(\theta b_k(\lambda)) + \lambda\mu_2^{(\lambda)}\bar{F}_{2k}^0(\theta b_k(\lambda)) \leq \\ &\leq \lambda\varphi_1(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}_{1k}^0(\theta b_k(\lambda)) + \lambda\varphi_2(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}_{2k}^0(\theta b_k(\lambda)), \end{aligned}$$

откуда переходя к пределу при $\lambda \to \infty$ получаем $\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} > \theta b_k(\lambda)) \to 0$ в силу (8).

Пусть теперь $0 < \theta < 1$. Поскольку функции F_{kl}^0 принадлежат области притяжения экстремального типа Гумбеля, то для них верно $F_{jk}^0(\theta b_k(s))^s \to 0$, $s \to \infty$. Заметим, что $\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \geq 1$ п.н. Получаем

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} \leq \theta b_k(\lambda)) \leq (F_{1k}^0(\theta b_k(\lambda))F_{2k}^0(\theta b_k(\lambda))^\lambda \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. □

Заметим, что вместо условия (8) можно использовать более простое условие

$$s(b_1(s^{1+\varepsilon})+b_2(s^{1+\varepsilon}))\bar{F}^0_{jk}(\theta b_k(s))\to 0,\quad s\to\infty,\quad j,k=1,2, \tag{9}$$

из которого следует (8) в силу свойств φ_k и φ_{kl}.

Следствие 3. *Если задана функция $b(s)$ такая, что $b_1(s)/b(s)\to p_1$, $b_2(s)/b(s)\to p_2$, $s\to\infty$, $p_1,p_2\geq 0$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(v(\lambda b(\lambda),x))=H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(v(\lambda b(\lambda),x))=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{M}\left(F_1^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda\tilde{Z}_1^{(\lambda)}}F_2^0(v(b(\lambda),x))^{\lambda\tilde{Z}_2^{(\lambda)}}\right)=$$
$$=\lim_{\lambda\to\infty}\left(F_1^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda b_1(\lambda)}F_2^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda b_2(\lambda)}\right)=H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

□

Пример 6. Пусть

$$F_1^0(x_1,x_2)=(1-e^{-x_1})^2(1-e^{-x_2/3}),\quad F_2^0(x_1,x_2)=(1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2/3})^2,$$

тогда в (3) можно взять $a_1(s)=a_2(s)=1$, $b_1(s)=\ln s$, $b_2(s)=3\ln s$. Имеем

$$\lim_{s\to\infty}F_1^0(x_1+\ln s,x_2+3\ln s)^s=\exp\{-(2e^{-x_1}+e^{-x_2/3})\},$$
$$\lim_{s\to\infty}F_2^0(x_2+\ln s,x_2+3\ln s)^s=\exp\{-(e^{-x_1}+2e^{-x_2/3})\}.$$

Легко проверить, что условие (9) выполняется. Полагая $b(s)=\ln s$, получаем $p_1=1$, $p_2=3$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(x_1+\ln(\lambda\ln\lambda),x_2+3\ln(\lambda\ln\lambda))=H_1(x)H_2^3(x)=\exp\{-(5e^{-x_1}+7e^{-x_2/3})\}.$$

Таким образом, при соответствующей линейной нормировке получаем двумерное распределение Гумбеля с независимыми компонентами.

Список литературы

[1] *Lamperti J.*, Maximal branching processes and long-range percolation // J. Appl. Probab., 1970, v. 7, № 1, c. 89–96.

[2] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005, т. 50, № 3, с. 564–570.

[3] *Лебедев А.В.*, Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы на ограниченных множествах // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика, 2002, № 6, с. 55–57.

[4] *Лебедев А.В.*, Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов // Дискретная математика, 2002, т. 14, № 3, с. 143–148.

[5] *Лебедев А.В.*, Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы в случае степенных хвостов // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2005, № 2, с.47–49.

[6] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы / Современные проблемы математики и механики, М.: МГУ, 2009, т. 4, № 1, с. 93–106.
http://mech.math.msu.su/probab/svodny2.pdf

[7] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. (в печати).

[8] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с двумя типами частиц / Труды IX Международных Колмогоровских чтений. Ярославль: ЯГПУ, 2011, с. 46–50.

[9] *Галамбош Я.И.*, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

[10] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.*, Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

Многотипные максимальные ветвящиеся процессы с копулами экстремальных значений[1]

Лебедев А.В.[2]

Рассматриваются максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц, ранее введенные автором, в случае, когда распределения численностей потомков имеют копулы экстремальных значений. Доказана эргодическая теорема, свойство монотонности и предельная теорема для стационарных распределений в случае степенных хвостов. Особое внимание уделено многомерным распределениям Фреше.

1 Введение

Максимальные ветвящиеся процессы (МВП) были введены Дж. Ламперти в [1] как «экстремальные» аналоги процессов Гальтона-Ватсона (с заменой суммирования численностей потомков частиц на взятие максимума из них). Исследования этих процессов были продолжены автором в ряде работ. В [2] было проведено обобщение МВП по области значений с $\mathbf{Z}_+$ на $\mathbf{R}_+$ и доказана эргодическая теорема. Некоторые предельные теоремы для стационарных распределений можно найти в [3, 4]. Обзор исследований автора для МВП с одним типом частиц представлен в [6].

В [7] были введены МВП с $d \geq 2$ типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$. При некоторых дополнительных предположениях доказана эргодическая теорема в случае $d = 2$.

МВП с d типами частиц может быть определен как цепь Маркова $\{Z(n)\}$, $Z(n) = (Z_1(n), \ldots, Z_d(n))$, $n \geq 0$, с переходными вероятностями

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, \ldots, Z_d(n) \leq y_d | Z_1(n-1) = x_1, \ldots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \ldots, y_d) \ldots F_d^{x_d}(y_1, \ldots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{1}$$

где многомерные распределения F_k имеют носители $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$, $1 \leq k \leq d$.

Распределение F_k, $1 \leq k \leq d$, в целочисленном случае имеет смысл совместного распределения численностей потомков каждого типа от частицы k-го типа. Мы будет говорить о таких численностях и в общем случае, понимая, что они могут принимать не только целые, но и любые неотрицательные значения.

При использовании формулы (1) возникает проблема с возведением многомерной функции распределения в произвольную положительную степень. Дело в том, что результат этой операции не обязательно является снова функцией распределения. Решить

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 11-01-00050.

[2]Лебедев Алексей Викторович, alebedev@mech.math.msu.su, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

указанную проблему можно либо накладывая дополнительные ограничения (как это сделано в [7]), либо рассматривая функции распределения, любая положительная степень которых остается таковой, называемые максимум-безгранично делимыми [8, 9, 10].

Аналогичный подход был использован М.Иржиной в [11] при переходе от целочисленных ветвящихся процессов к процессам с непрерывным множеством состояний на основе безгранично делимых распределений.

Согласно известной теореме Скляра, каждая многомерная функция распределения G допускает представление

$$G(x_1, \dots, x_d) = C(G_1(x_1), \dots, G_d(x_d)), \tag{2}$$

где $G_i(x)$, $1 \le i \le d$, — частные функции распределения, а $C(u_1, \dots u_d)$ — функция распределения на $[0,1]^d$ с равномерными частными распределениями, называемая копулой [12]. И наоборот, из произвольных частных функций распределения и копулы с помощью формулы (2) получается многомерная функция распределения.

Важным классом, изучаемым в теории копул, являются максимум-устойчивые копулы (копулы экстремальных значений) [12, §3.3.4], [13, §7.5], которые удовлетворяют условию:

$$C^s(u_1, \dots, u_d) = C(u_1^s, \dots u_d^s), \quad \forall s > 0. \tag{3}$$

Таким образом, если функция распределения G имеет копулу экстремальных значений C, то верно

$$G^s(x_1, \dots, x_d) = C(G_1^s(x_1), \dots, G_d^s(x_d)), \quad \forall s > 0, \tag{4}$$

так что G^s тоже является функцией распределения, т.е. распределение оказывается максимум-безгранично делимым.

В качестве нетривиального примера можно указать копулу Гумбеля

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_d)^\theta)^{1/\theta}\}, \quad \theta \ge 1.$$

Замечание 1. Условие (3) не является необходимым для максимум-безграничной делимости G. Например, в случае (не максимум-устойчивой) копулы Клейтона

$$C(u_1, \dots u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0,$$

функция G^s также является функцией распределения с копулой Клейтона, но уже с параметром θs.

Однако нам будет удобнее иметь дело с копулами экстремальных значений в силу соотношения (4).

Предположим, что все функции F_k имеют копулы экстремальных значений C_k, $1 \le k \le d$. Тогда у нас нет проблем с определением процесса по формуле (1). Более того, из (1) и (4) получаем его конструктивное представление стохастически рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} F_{jk}^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные вектора $(U_{j,1,n}, \dots, U_{j,d,n})$, $n \ge 1$, независимы и имеют функции распределения C_j, $1 \le j \le d$.

Из (1) для введенного класса процессов получаем следующее свойство.

Свойство 1. *Если процесс $Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_d(n))$ является МВП с копулами экстремальных значений, то для любого набора чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$ процесс $Z^*(n) = (\lambda_1 Z_1(n), \dots, \lambda_d Z_d(n))$ также является МВП с функциями распределения численностей потомков*

$$F_k^*(y_1, \dots, y_d) = F(y_1/\lambda_1, \dots, y_d/\lambda_d)^{1/\lambda_k}, \quad 1 \le k \le d,$$

имеющими те же копулы, что и F_k, $1 \le k \le d$.

Кроме того, можно получить свойство (положительной) ассоциированности [14].

Свойство 2. *Если случайные величины $Z_k(0)$ ассоциированы, то и все $Z_k(n)$, $1 \le k \le d$, $n \ge 1$, ассоциированы.*

Доказательство. Как показано в [15], компоненты максимум-устойчивого случайного вектора ассоциированы. Это верно и для компонент копулы экстремальных значений, как для неубывающих функций (частных распределений) от компонент такого вектора. В силу (1) все $Z_k(n)$, $1 \le k \le d$, $n \ge 1$, являются неубывающими функциями от ассоциированных и независимых случайных величин, так что по теореме 1.8 [14] они ассоциированы. $\square$

2 Свойство монотонности

В [2] были доказаны свойства монотонности МВП с одним типом частиц по распределению числа потомков (относительно некоторого стохастического порядка).

Для одномерных функций распределения полагаем $G_1 \prec G_2$, если $\bar{G}_1(x) \le \bar{G}_2(x)$ для всех x. Заметим, что при этом также $G_1^{-1}(u) \le G_2^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.

Для многомерных функций распределения обобщим отношение стохастического порядка следующим образом: $G_1 \prec G_2$, если на одном вероятностном пространстве можно построить случайный вектор ξ_1 с распределением G_1 и случайный вектор ξ_2 с распределением G_2 так, что $\xi_1 \le \xi_2$ почти наверное (п.н.). Такое отношение и эквивалентные ему рассматривались, например, в [16]. Заметим, что из данного отношения между многомерными распределениями следуют соответствующие отношения между всеми их частными распределениями (покомпонентно). Если у многомерных распределений одинаковые копулы, то верно и обратное.

Обозначим распределение вектора $Z(n)$ через Ψ_n, а его стационарное предельное распределение (если оно существует) через Ψ.

Свойство 3. *Если заданы два МВП с одинаковыми наборами копул экстремальных значений и $\Psi_0' \prec \Psi_0''$, $F_{kl}' \prec F_{kl}''$ для всех $1 \le k, l \le d$, то $\Psi_n' \prec \Psi_n''$ для всех $n \ge 1$, и если процессы имеют стационарные предельные распределения, то $\Psi' \prec \Psi''$.*

Доказательство. Построим $Z'(0)$ и $Z''(0)$ на одном вероятностном пространстве так, что $Z'(0) \le Z''(0)$ п.н. Далее на том же пространстве строим оба процесса пространстве по рекуррентным формулам:

$$Z_k'(n) = \bigvee_{j=1}^{d} (F_{jk}')^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j'(n-1)}\right), \quad Z_k''(n) = \bigvee_{j=1}^{d} (F_{jk}'')^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j''(n-1)}\right), \tag{5}$$

где случайные вектора $(U_{j,1,n}, \dots, U_{j,d,n})$, $n \ge 1$, независимы и имеют функции распределения C_j, $1 \le j \le d$.

Поскольку $(F_{jk}')^{-1}(u) \le (F_{jk}'')^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$ для всех $1 \le j, k \le d$, то из (5) получаем по индукции $Z'(n) \le Z''(n)$ п.н. и $\Psi_n' \prec \Psi_n''$ для всех $n \ge 1$. Соотношение между стационарными распределениями получаем в пределе при $n \to \infty$. $\square$

3 Эргодическая теорема

В [7] была доказана эргодическая теорема для МВП с двумя типами частиц при дополнительных предположениях

$$\min\{\inf T_1^*, \inf T_2^*\} \geq x_0 > 0, \tag{6}$$

и

$$F_1^{x_0}(y_1, y_2), F_2^{x_0}(y_1, y_2) \text{ — функции распределения.} \tag{7}$$

Для МВП с копулами экстремальных значений предположения типа (7) заведомо выполняются, а предположение (6) обобщим:

$$\bigwedge_{k=1}^{d} \inf T_k^* \geq x_0 > 0. \tag{8}$$

Тем самым мы автоматически исключаем возможность вырождения процесса (его обращения в нуль или сходимости к нулю), а также чередование типов (когда в одном поколении присутствуют частицы только одного типа, в следующем — другого и т.д.) и другие особенности поведения.

В [7] были введены множества $T_k^* = \bigcup_{j=1}^{d} T_{j,k}$ и $T_k^{(s)}$ — носители распределений, заданных функциями распределения F_k^s. Предполагалось, что $T_k^{(s)} = T_k$ при всех $s \in T_k^* \cup \{x_0\}$. Заметим, что для максимум-безгранично делимых распределений это равенство верно даже при всех $s > 0$.

Докажем это с помощью следующей леммы, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть F — функция распределения в R^d, $d \geq 2$, тогда все функции F^s, $s > d-1$, являются функциями распределения с одинаковым носителем.*

Доказательство. Понятно, что любая функция F^s обладает необходимыми свойствами сходимости к 0 и 1 на бесконечности, и требуется проверить лишь так называемое «неравенство прямоугольника»: вероятность попадания точки в любой параллелепипед $\Pi = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$ должна быть неотрицательна.

Расмотрим сначала случай абсолютно непрерывного распределения. Тогда неравенство прямоугольника будет следовать из неотрицательности формальной плотности

$$p_s(y_1, \dots, y_d) = \frac{\partial^d (F^s(y_1, \dots, y_d))}{\partial y_1 \dots \partial y_d}.$$

Заметим, что $p_s(y)$ представляет собой сумму произведений, включающих производные степенной функции u^s, взятые от $F(y)$, и частные производные F, от 1-го до d-го порядка (и те, и другие). Все они неотрицательны при $s > d-1$, поэтому F^s являются функциями распределения. Кроме того, для любой точки y каждое слагаемое либо остается положительным, либо тождественно равно нулю при всех $s > d-1$. Отсюда следует, что F^s имеют одинаковые носители.

В общем случае, для любого параллелепипеда Π можно построить абсолютно непрерывное распределение $\tilde{F}$, для которого функция распределения совпадает с F в вершинах Π. Тогда в них будут совпадать также $\tilde{F}^s$ и F^s. В силу одинаковости носителей распределений $\tilde{F}^s$ при всех $s > d-1$, вероятности попадания в Π при всех этих распределениях либо положительны, либо равны нулю, и совпадают с соответствующими вероятностями для F^s. Следовательно, носители распределений F^s также одинаковы при всех $s > d-1$. $\square$

Следствие 1. *Если F — функция максимум-безгранично делимого распределения в R^d, $d \geq 2$, то все F^s, $s > 0$, имеют одинаковый носитель.*

Доказательство. Возьмем любые $0 < s_1 < s_2$. В силу максимум-безграничной делимости $G = F^{s_1/d}$ является функцией распределения. Тогда получаем $F^{s_1} = G^d$, $F^{s_2} = G^{ds_2/s_1}$, т.е. функцию распределения G в степенях, больших $d-1$. По лемме 1 их носители совпадают. $\square$

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \left\{ \bigvee_{k=1}^{d} x^{(k)} : x^{(k)} \in T_k, 1 \leq k \leq d \right\},$$

поскольку при любом $Z(0) \in \mathbf{R}_+^d \backslash \{0\}$ получаем $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Множество S является носителем условного распределения $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$ для любого $x \in (0, +\infty)^d$.

Обозначим через S_k проекции S на оси Ox_k, $1 \leq k \leq d$.

Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Обозначим $x^0 = (x_0, \ldots, x_0)$. Предположим также, что существует точка $a = (a_1, \ldots, a_d)$ такая, что для множеств $A = [a_1, +\infty) \times \cdots \times [a_d, +\infty)$ и $A^* = (0, a_1] \times \cdots \times (0, a_d]$ верно

$$\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0) > 0, \quad \mathbf{P}(Z(n) \in A^* | Z(n-1) = x^0) > 0. \tag{9}$$

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Для случайных векторов $\xi^{(k)}$ с распределениями F_k определим характеристики

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (8), (9) и $\sum_{k=1}^d \rho_k < e^{-\gamma}$, то процесс $Z(n)$ эргодический.*

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения

$$G(u) = \prod_{k=1}^{d} \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| \leq u) = \prod_{k=1}^{d} F_k(u, \ldots, u),$$

тогда для $\rho = \limsup_{u \to \infty} u \bar{G}(u)$ верно $\rho \leq \sum_{k=1}^d \rho_k < e^{-\gamma}$. Значит, для некоторого $0 < \tau < e^{-\gamma}$ существует такое $M > \|a\|$, что $G(u) \geq e^{-\tau/u}$ при всех $u \geq M$. Из формулы (1) получаем:

$$\mathbf{P}(\|Z(n)\| \leq u | Z(n-1) = x) = \prod_{k=1}^{d} F_k^{x_k}(u, \ldots, u) \geq G^{\|x\|}(u).$$

Введем пробную функцию Ляпунова $g(x) = \max\{\ln(\|x\|/M), 0\}$ и обозначим $\mu(x) = \mathbf{M}(g(Z(n)) | Z(n-1) = x) - g(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \mu(x) &\leq \int_0^{+\infty} (1 - G^{Me^{g(x)}}(Me^v)) \, dv - g(x) \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} (1 - \exp\{-\tau e^{g(x)} e^{-v}\}) \, dv - g(x) = \\ &= \gamma + \ln \tau - \mathrm{Ei}(-\tau e^{g(x)}), \end{aligned}$$

где через Ei обозначена интегральная показательная функция

$$\mathrm{Ei}(y) = -\int_{-y}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad y < 0,$$

причем $\mathrm{Ei}(y) \to 0$, $y \to -\infty$. Поскольку $\gamma + \ln \tau < 0$, это означает, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $N \geq M$, что $\mu(x) < -\varepsilon$ при $\|x\| > N$. При $\|x\| \leq N$ величина $\mathbf{M}(g(Z(n))|Z(n-1) = x)$ ограничена. Таким образом, условия Ляпунова [17, §4.2] выполнены.

Проверим условие перемешивания [17, §2]. Обозначим $\delta = \prod_{k=1}^{d} F_k(a_1, \ldots, a_d) > 0$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d) \in V = [x_0, N]^d \cap S$. Введем вектор ζ', распределенный как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x^0$, и вектор ζ'', распределенный как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x - x^0$ (предполагая сначала, что $x \neq x^0$), причем ζ' и ζ'' независимы. Тогда их максимум $\zeta' \vee \zeta''$ распределен как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$. Для любого борелевского множества $B \subset S$ имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z(n) \in B|Z(n-1) = x) = \mathbf{P}(\zeta' \vee \zeta'' \in B) \geq \mathbf{P}(\zeta' \vee \zeta'' \in B \cap A) \geq \\ &\geq \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A, \zeta'' \in A^*) = \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A)\mathbf{P}(\zeta'' \in A^*) \geq \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A)\delta^N. \end{aligned}$$

При $x = x^0$ это неравенство тривиально.

Определим вероятностную меру на множестве S:

$$\varphi(B) = \mathbf{P}(\zeta' \in B|\zeta' \in A)$$

и число $0 < p < \mathbf{P}(\zeta' \in A)\delta^N$, тогда

$$\mathbf{P}(Z(n) \in B|Z(n-1) = x) > p\varphi(B).$$

Кроме того, в силу сделанных предположений цепь Маркова $Z(n)$ является неприводимой и апериодичной (из любого состояния можно попасть в V за один шаг).

Из проверенных условий следует эргодичность процесса $Z(n)$ [17]. □

Следствие 2. *Если выполнены условия (8), (9) и* $\mathbf{M}\|\xi^{(k)}\| < \infty$ *для всех* $1 \leq k \leq d$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Утверждение следует из асимптотики $\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u) = o(1/u)$, $u \to \infty$, $k = 1, 2$.

Замечание 2. Поскольку в доказательстве теоремы не используется наличие копул экстремальных значений, она остается верной для любых максимум-безгранично делимых распределений численностей потомков при тех же предположениях.

4 Многомерные распределения Фреше

В [7] приведен пример, когда F_k, $1 \leq k \leq d$, представляют собой многомерные максимум-устойчивые распределения (распределения экстремальных значений) [13, §7.5], [18, §5.2]. Поскольку все происходит в $\mathbf{R}_+^d$, то из трех экстремальных типов это могут быть только многомерные распределения Фреше (которые предполагаем невырожденными по всем компонентам). Тогда частные функции распределения F_{kl} имеют вид

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} \exp\{-c_{kl}(y - b_{kl})^{-\alpha_k}\}, & y > b_{kl} \\ 0, & y \leq b_{kl} \end{cases}, \quad \alpha_k, c_{kl} > 0, \quad b_{kl} \geq 0,$$

а копулы C_k являются копулами экстремальных значений.

Для многомерных распределений Фреше получаем следующие соотношения:

$$F_k^x(y_1,\ldots,y_d) = F_k(x^{-1/\alpha_k}(y_1-b_{k1})+b_{k1},\ldots,x^{-1/\alpha_k}(y_d-b_{kd})+b_{kd}), \forall x>0.$$

Отсюда следует, что МВП может быть задан рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \left(Z_j^{1/\alpha_j}(n)(\xi_k^{(j)}(n)-b_{jk})+b_{jk} \right), \tag{10}$$

где случайные вектора $\xi^{(j)}(n) = (\xi_1^{(j)}(n),\ldots,\xi_d^{(j)}(n))$, $n\geq 1$, независимы и имеют распределения F_j, $1\leq j\leq d$.

Рассмотрим, как теорема 1 может быть применена для исследования эргодичности процессов с численностями потомков, имеющими многомерные распределения Фреше.

Прежде всего, условие (8) эквивалентно тому, что все $b_{kl}>0$.

Найдем асимптотику вероятности, пользуясь свойством (3):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\|>u) = 1-F_k(u,\ldots u) = \\
&= 1-C_k(\exp\{-c_{k1}(u-b_{k1})^{-\alpha_k}\},\ldots,\exp\{-c_{kd}(u-b_{kd})^{-\alpha_k}\}) = \\
&= 1-\exp\{u^{-\alpha_k}\ln C_k(\exp\{-c_{k1}(1-b_{k1}/u)^{-\alpha_k}\},\ldots,\exp\{-c_{kd}(1-b_{kd}/u)^{-\alpha_k}\})\} \sim \\
&\sim -\ln C_k(e^{-c_{k1}},\ldots,e^{-c_{kd}})u^{-\alpha_k}, \quad u\to\infty.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\rho_k = \begin{cases} +\infty, & 0<\alpha_k<1, \\ -\ln C_k(e^{-c_{k1}},\ldots,e^{-c_{kd}}), & \alpha_k=1, \\ 0, & \alpha_k>1. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, по формуле (11) можно вычислить характеристики для проверки условия теоремы 1. В частности, если все $\alpha_k>1$, то процесс оказывается эргодическим.

В следующих трех примерах полагаем $\alpha_k=1$.

Пример 1. Пусть $C_k(u_1,\ldots,u_d)=u_1\ldots u_d$ (копула независимости).
Тогда $\rho_k=\sum_{l=1}^d c_{kl}$.

Пример 2. Пусть $C_k(u_1,\ldots,u_d)=\min\{u_1,\ldots,u_d\}$ (копула комонотонности).
Тогда $\rho_k=\bigvee_{l=1}^d c_{kl}$.

Пример 3. Пусть

$$C_k(u_1,\ldots,u_d)=\exp\{-((-\ln u_1)^\theta+\cdots+(-\ln u_d)^\theta)^{1/\theta}\}, \quad \theta\geq 1$$

(копула Гумбеля). Тогда

$$\rho_k = \left(\sum_{l=1}^d c_{kl}^\theta\right)^{1/\theta}.$$

В силу максимум-устойчивости многомерного распределения Фреше можно установить некоторое соотношение для стационарных распределений процесса при различных значениях параметров.

Обозначим

$$\Phi_{\alpha,b,c}(y) = \begin{cases} \exp\{-c(y-b)^{-\alpha}\}, & y > b; \\ 0, & y \le b, \end{cases}$$

где $\alpha, c > 0$, $b \ge 0$. Из определения следует

$$\Phi^r_{\alpha,b,c}(sy) \equiv \Phi_{\alpha,b/s,cr/s^\alpha}(y), \quad r,s>0. \tag{12}$$

Обозначим через $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}$ стационарное распределение МВП с указанными наборами значений параметров (которые мы можем менять) и фиксированными копулами экстремальных значений. Если в каком-то из наборов значения одинаковы, пишем одно это значение, например: $\Psi_{(\alpha),(b_{kl}),(c_{kl})}$, если все $\alpha_k = \alpha$.

Утверждение 1. *Для любого набора чисел $a_1, \dots, a_d > 0$ верно*

$$\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a_l),(c_{kl}a_k/a_l^{\alpha_k})}(x_1,\dots x_d) \equiv \Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(a_1x_1,\dots a_dx_d), \quad x \in \mathbf{R}^d_+.$$

Доказательство. Пусть Z — МВП с параметрами α_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, $1 \le k,l \le d$. Рассмотрим процесс $Z^*(n) = (Z_1(n)/a_1, \dots Z_d(n)/a_d)$. Его стационарное распределение есть $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(a_1x_1,\dots a_dx_d)$. С другой стороны, согласно свойству 1, Z^* является МВП с функциями распределения численностей потомков $F^*_k(x_1,\dots x_d) = F^{a_k}_k(a_1x_1,\dots a_dx_d)$ и теми же копулами. С помощью (12) получаем

$$\begin{aligned} &F^*_k(x_1,\dots x_d) = F^{a_k}_k(a_1x_1,\dots a_dx_d) = \\ &= C^{a_k}_k(\Phi_{\alpha_k,b_{k1},c_{k1}}(a_1x_1),\dots,\Phi_{\alpha_k,b_{kd},c_{kd}}(a_dx_d)) = \\ &= C_k(\Phi^{a_k}_{\alpha_k,b_{k1},c_{k1}}(a_1x_1),\dots,\Phi^{a_k}_{\alpha_k,b_{kd},c_{kd}}(a_dx_d)) = \\ &= C_k(\Phi_{\alpha_k,b_{k1}/a_1,c_{k1}a_k/a_1^{\alpha_k}}(x_1),\dots,\Phi_{\alpha_k,b_{k1}/a_d,c_{k1}a_k/a_d^{\alpha_k}}(x_d)), \end{aligned}$$

так что процесс Z^* имеет стационарное распределение $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a_l),(c_{kl}a_k/a_l^{\alpha_k})}$. $\square$

Следствие 3. *Для любого $a > 0$ верно*

$$\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a),(c_{kl}/a^{\alpha_k-1})}(x) \equiv \Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(ax).$$

Рассмотрим теперь отдельно особый случай, когда все $b_{kl} = 0$. В этом случае условие (8) нарушается и возникает возможность сходимости процесса к нулю по вероятности, т.е. асимптотического вырождения. Чтобы избежать этого, исключим ноль из S и исследуем на эргодичность процесс $W(n) = (W_1(n),\dots,W_d(n))$, где $W_k(n) = \ln Z_k(n)$.

Утверждение 2. *Если все $b_{kl} = 0$ и все $\alpha_k > 1$, то процесс $W(n)$ эргодический.*

Доказательство. Обозначим $\alpha = \min \alpha_k > 1$. Из формулы (10) получаем:

$$W_k(n) = \bigvee_{j=1}^d \left(\frac{W_j(n-1)}{\alpha_j} + \eta^{(j)}_k(n) \right),$$

где $\eta^{(j)}_k(n) = \ln \xi^{(j)}_k(n)$. Тогда

$$|W_k(n)| \le \bigvee_{j=1}^d \frac{|W_j(n-1)|}{\alpha_j} + \bigvee_{j=1}^d |\eta^{(j)}_k(n)|,$$

откуда

$$\|W(n)\| \leq \frac{\|W(n-1)\|}{\alpha} + \eta(n), \quad \eta(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \|\eta^{(j)}(n)\|, \tag{13}$$

где $\eta(n)$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{M}\eta(n) < \infty$.

Введем пробную функцию Ляпунова $g(x) = \|x\|$ и $\mu(x) = \mathbf{M}(g(W(n))|W(n-1) = x) - g(x)$, тогда из (13) следует, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $N > 0$, что $\mu(x) < -\varepsilon$ при $\|x\| > N$. При $\|x\| \leq N$ величина $\mathbf{M}(g(W(n))|W(n-1) = x)$ ограничена. Таким образом, условия Ляпунова [17, §4.2] выполнены.

Условие перемешивания [17, §2] можно проверить так же, как в доказательстве теоремы 1, для исходного процесса $Z(n)$, полагая $V = [e^{-N}, e^{N}] \cap S$.

Из эргодичности $W(n)$ следует эргодичность $Z(n)$ на $S \backslash \{0\}$. □

На рис. 1 представлен результат моделирования двумерного процесса $Z(n)$ за 500 шагов с начальным условием $Z(0) = (1, 1)$ в случае, когда численности потомков имеют распределения Фреше с независимыми компонентами и параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $c_{11} = c_{22} = 2$, $c_{12} = c_{21} = 1$, $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$.

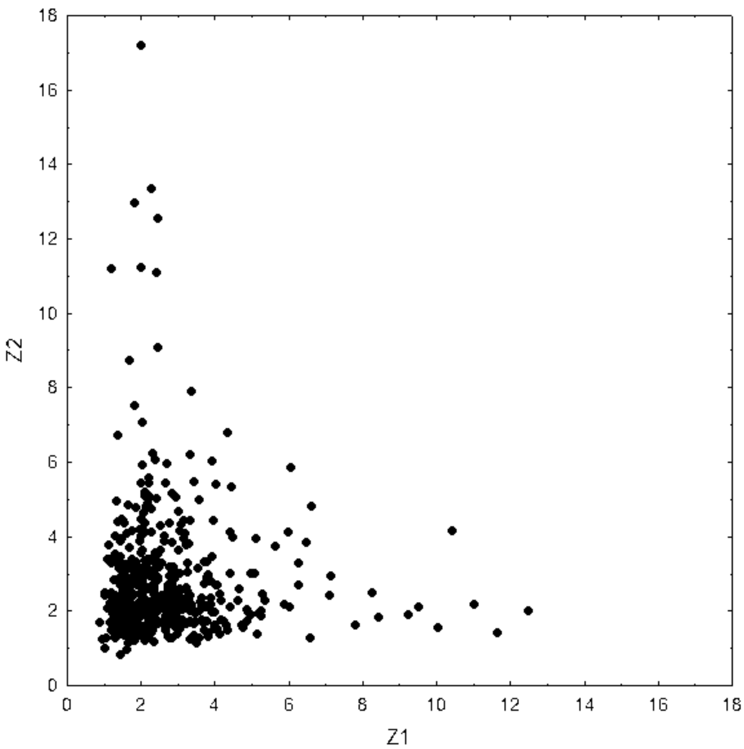


Рис. 1:

5 Предельные теоремы для стационарных распределений в случае степенных хвостов

Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с фиксированным набором копул экстремальных значений и $F_{kl}^{(\lambda)}(y) = F_{kl}^{\lambda}(y)$, $\lambda > 0$, причем F_{kl} имеют степенные хвосты. Обозначим стационарные распределения этих процессов (если они существуют) через $\Psi^{(\lambda)}$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался автором в [5].

Теорема 2. *Если процессы $Z^{(\lambda)}(n)$ эргодические при всех достаточно больших λ, и существуют такие числа $\alpha > 1$, $v > 0$, $c_{kl} > 0$, что $F_{kl} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$ и $\bar{F}_{kl}(y) \sim c_{kl}y^{-\alpha}$, $y \to \infty$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(x\lambda^{1/(\alpha-1)}) = \Psi_{(\alpha),(0),(c_{kl})}(x), \quad x \in \mathbf{R}_+^d. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим $\mu = \lambda^{1/(\alpha-1)}$, тогда $\lambda\mu = \mu^\alpha$. Перейдем к процессам $\hat{Z}^{(\lambda)}(n) = Z^{(\lambda)}(n)/\mu$, в этом случае $\hat{\Psi}^{(\lambda)}(x) = \Psi^{(\lambda)}(\mu x)$ и требуется доказать, что $\hat{\Psi}^{(\lambda)} \to \Psi_{(\alpha),(0),(c_{kl})}$, $\lambda \to \infty$. Имеем

$$\hat{F}_{kl}^{(\lambda)}(y) = F_{kl}(\mu y)^{\mu^\alpha} \to \Phi_{\alpha,0,c_{kl}}(y), \quad \lambda \to \infty. \tag{15}$$

Кроме того, из условия $F_{kl} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$ и равенства (12) получаем $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$. С другой стороны, если $\bar{F}_{kl}(y) \sim c_{kl}y^{-\alpha}$, $y \to \infty$, то найдутся такие числа $b > 0$, $w > \max c_{kl}$, что все $F_{kl} \prec \Phi_{\alpha,b,w}$, откуда $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,b/\mu,w}$, что дает равномерную оценку $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,1,w}$ при всех $\lambda > b^{\alpha-1}$. Таким образом, по свойству 3, при всех достаточно больших λ имеет место отношение $\Psi_{(\alpha),(0),(v)} \prec \hat{\Psi}^{(\lambda)} \prec \Psi_{(\alpha),(1),(w)}$.

Семейство стационарных распределений $\{\hat{\Psi}^{(\lambda)}\}$ ограничено с двух сторон собственными распределениями на $S\backslash\{0\}$ и, следовательно, плотно в $S\backslash\{0\}$. По теореме 10.1 [17] из плотности этого семейства, сходимости переходных функций, порожденных частными функциями распределения (15) при заданных копулах, и непрерывности предельной переходной функции следует слабая сходимость стационарных распределений, которую и требовалось доказать. □

Замечание 3. Если $F_{kl} = \Phi_{\alpha,0,c_{kl}}$, то предельное соотношение (14) обращается в тождество (в силу следствия 3).

Условию теоремы удовлетворяют, например, МВП с распределениями Парето

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} 1 - (y/b_{kl})^{-\alpha}, & y > b_{kl}; \\ 0, & y \le b_{kl} \end{cases}$$

при $\alpha > 1$, $b_{kl} > 0$, поскольку $F_{kl}(y) \le \Phi_{\alpha,0,b_{kl}}(y)$ при всех $y > 0$. Также можно подобрать необходимую оценку для любого набора распределений со степенными хвостами (одинаковой степени) и положительной левой границей.

Список литературы

[1] *Lamperti J.*, Maximal branching processes and long-range percolation // J. Appl. Probab., 1970, v. 7, № 1, p. 89–96.

[2] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005, т. 50, № 3, с. 564–570.

[3] *Лебедев А.В.*, Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы на ограниченных множествах // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика, 2002, № 6, с. 55–57.

[4] *Лебедев А.В.*, Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов // Дискретная математика, 2002, т. 14, № 3, с. 143–148.

[5] *Лебедев А.В.*, Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы в случае степенных хвостов // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика, 2005, № 2, с.47–49.

[6] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы / Современные проблемы математики и механики, М.: МГУ, 2009, т. 4, № 1, с. 93–106.
http://mech.math.msu.su/probab/svodny2.pdf

[7] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика (в печати).

[8] *Balkema A.A., Resnick S.I.*, Max-infinite divisibility // J. Appl. Probab., 1977, v. 14, № 2, p. 309–311.

[9] *Resnick S.I.*, Extreme values, regular variation and point processes. Springer, 1987.

[10] *Земплени А.*, Проверка max-безграничной делимости // Теория вероятностей и ее применения, 1992, т. 37, № 1, с. 173–175.

[11] *Jirina M.*, Stochastic branching processes with continuous state space // Czech. Math. J., 1958, v. 8, № 2, p. 292–313.

[12] *Nelsen R.*, An introduction to copulas / Lecture Notes in Statistics. Springer, 1999, v. 139.

[13] *McNeil A.J, Frey R., Embrechts P.*, Quantitative risk management. Princeton University Press, 2005.

[14] *Булинский А.В., Шашкин А.П.*, Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[15] *Marshall A., Olkin I.*, Domains of attraction of multivariate extreme value distributions // Ann. Probab., 1983, v. 11, № 1, p. 168–177.

[16] *Маршалл А., Олкин И.*, Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М: Мир, 1983.

[17] *Боровков А.А.*, Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999. 440 с.

[18] *Галамбош Я.И.*, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

О фазах в эволюции многомерных взаимодействующих диффузий с синхронизацией[1]

Манита А.Д.[2]

Мы рассматриваем многомерные марковские процессы $x(t)$, которые описывают движение N стохастических частиц с комбинированным взаимодействием, включающем синхронизацию. Мы находим временны́е шкалы $t = t(N)$, $N \to \infty$, на которых данные процессы имеют качественно различное поведение.

1 Введение

Многокомпонентные стохастические модели с синхронизацией представляют собой относительно новый класс систем, которые интересны как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений к современным технологическим решениям. Речь идет об устройствах с большим числом автономно функционирующих компонент, которые время от времени должны обмениваться данными между собой. Обмен данными между конкретными компонентами влечет некоторое согласование (синхронизацию) их состояний, причем правила этой синхронизации могут варьироваться в зависимости от конкретного приложения. Другими словами, речь идет о некотором способе самоорганизации системы. Если отвлечься от проблемы обмена данными и условно обозначить через $(x_1, \ldots, x_N)$ состояние системы из N компонент, то абстрактно в самом общем виде единичный акт синхронизации может быть описан как мгновенный скачок состояния вида $(x_1, \ldots, x_N) \to (x'_1, \ldots, x'_N)$, где $\{x'_1, \ldots, x'_N\} \subsetneq \{x_1, \ldots, x_N\}$.

Начальной мотивацией для рассмотрения вероятностных моделей с синхронизацией послужили асинхронные алгоритмы для масштабных параллельных вычислений, в которых отсутствует центральный управляющий узел, а согласование между множественными вычислительными единицами реализовано за счет обмена сообщениями. Исчерпывающее обсуждение синхронных и асинхронных алгоритмов можно найти в книге [2]. Одной из первых строгих математических работ, после которой вероятностники обратили внимание на эти модели, стала статья [1], в которой для оценки производительности двухкомпонентной системы с синхронизацией был рассмотрен марковский процесс специального вида и изучено его поведение на больших временах. Однако двумерный случай не может передать все нюансы функционирования реальных систем с синхронизацией. Дальнейшее изучение многомерных моделей привело к рассмотрению новых специфических типов

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 09-01-00761 и 11-01-90421.

[2]Манита Анатолий Дмитриевич, manita@mech.math.msu.su, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

многомерных марковских процессов, которые условно можно разделить на две группы. Первая группа задач может быть переформулирована в терминах систем стохастических частиц со специальным взаимодействием типа синхронизации (см. [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]). Вторая группа моделей (см. [10, 11, 12]) предполагает возможность каскадных (т.е., мгновенных цепных) синхронизаций, которые неудобно рассматривать в рамках формализма систем частиц, хотя они являются весьма реалистичными с точки зрения приложений. Подробнее об этих подходах можно прочесть в работе [13], там же имеется краткий обзор опубликованных к тому времени результатов. Задачи, которые мы будем рассматривать здесь, относятся к первой группе моделей.

Математическая проблема, которой посвящена настоящая публикация, состоит в том, чтобы охарактеризовать качественное поведение многомерного марковского процесса $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$ для больших N и различных временны́х шкал $t = t(N)$. При добавлении синхронизации в динамику стохастической системы частиц можно выделить две противоположные тенденции: увеличение разброса частиц в конфигурации в силу их свободного случайного движения и, наоборот, уменьшение разброса по причине имеющих место синхронизирующих скачков. Баланс между этими тенденциями определяет характер коллективного поведения системы в целом, причем результат этого баланса может оказаться различным в зависимости от выбранной временной шкалы $t = t(N)$, $t \to \infty$.

Процесс $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$ определяется как возмущение некоторого процесса $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t))$ с помощью парного синхронизирующего взаимодействия. В качестве невозмущенного процесса $y(t)$ выбирается решение системы стохастических дифференциальных уравнений, в котором снос линейно зависит от координат y_i (см. формулу (3) ниже). Точнее, невозмущенный процесс представляет собой систему стохастических частиц со взаимодействием типа среднего поля и это взаимодействие может быть как притягивающим, так и отталкивающим. Это первый пример такого рода, так как во всех предыдущих работах [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] синхронизирующее возмущение добавлялось в систему независимых частиц. Основной результат состоит в доказательстве существования *трех шкал* $t = t(N)$ качественно различного поведения системы при $N \to \infty$ и вычисления точной асимптотики некоторого функционала, характеризующего "типичный размер" конфигурации частиц. Этот функционал основан на вычислении моментов второго порядка, следовательно, используя его и применяя классические неравенства П.Л. Чебышева, мы имеем принципиальную возможность получить оценки областей в пространстве, в которых с подавляющей вероятностью находится конфигурация частиц. Наша модель зависит от трех вещественных параметров, это делает возможным обсудить фазовые переходы. Помимо этого обсуждаются и другие вопросы: поведение процессов $x(t)$ и $y(t)$ на больших временах при фиксированном числе частиц, устойчивость временны́х фаз при малых возмущениях параметров. Доказательство всех этих утверждений получаются относительно легко с использованием некоторого явного представления (теорема 3.1) для функционала, отвечающего за "типичный размер" конфигурации. Возможно, главное достоинство настоящей работы в том, что в ней предложена, как принято говорить, *явно решаемая модель* с составным взаимодействием (гладким и синхронизирующим), в которой без чрезмерных технических трудностей можно доказать наличие нескольких различных фаз качественного поведения. В параграфе 5 обсуждается, как полученные результаты обобщить со случая попарных синхронизаций на случай k-частичных синхронизаций. Метод настоящей статьи может применяться и для других классов невозмущенных динамик $y(t)$.

Для сравнения кратко перечислим некоторые опубликованные ранее результаты. В работе [3] изучается гидродинамическое поведение бесконечной системы частиц с парной анизотропной синхронизацией. В работах [4, 5] доказано существование трех фаз в поведении конечной системы частиц двух типов с парной синхронизацией между ними. Работа [6] посвящена анизотропному трехчастичному синхронизирующему взаимодействию. В работе [7] найдены последовательные фазы качетвенного поведения для системы однородных случайных блужданий с симметричной k-частичной синхронизацией. В [8] аналогичный результат был получен для независимых броуновских движений. В работе [9] впервые была изучена немарковская модель синхронизации.

2 Модель и основные предположения

Мы рассмотрим многомерный случайный процесс

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

который можно отнести к специальному классу стохастических систем взаимодействующих частиц. Случайный процесс $x(t)$ мы определим как специальное возмущение более простого случайного процесса $y(t)$ при помощи т.н. синхронизирующего взаимодействия. Для этого нам понадобится следующая конструкция.

Будем считать, что N есть общее число частиц в системе, а число $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ есть координата i-й частицы в момент времени t. Обозначим $\mathcal{N}_N = \{1, \dots, N\}$. Чтобы дать строгое определение процесса $(x(t),\, t \geq 0)$, *вначале* зафиксируем на некотором вероятностном пространстве $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}}\right)$ следующие объекты.

(а) Марковское семество $\{y^{a,s}\}_{a \in \mathbb{R}^N,\, s \geq 0}$ случайных процессов ([14, 15])

$$y^{a,s}(t) = (y_1^{a,s}(t), \dots, y_N^{a,s}(t)) \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq s, \qquad y^{a,s}(s) = a,$$

которое мы будем называть *невозмущенной* системой частиц и использовать для нее краткое символическое обозначение $y(t)$. Конкретные предположения относительно общей переходной функции этого семейства мы сделаем чуть позже. Еще раз подчеркнем, что случайные величины $y_k^{a,s}(t)$ определены на пространстве $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}}\right)$: $y_k^{a,s}(t) = y_k^{a,s}(t, \tilde{\omega})$.

(б) Последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных моментов времени

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots, \qquad (\tau_m = \tau_m(\tilde{\omega}))$$

(в) случайный вектор $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0))$, называемый в дальнейшем начальной конфигурацией частиц.

Основное предположение состоит в том, что $\{y^{a,s}\}$, $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $x(0)$ *независимы.*

Затем мы рассмотрим другое вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathsf{P}')$, на котором реализована независимая последовательность

$$(i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \dots,\ (i_n, j_n),\ \dots \tag{1}$$

равновероятных упорядоченных пар (i, j) таких, что $i, j \in \mathcal{N}_N$, $i \neq j$. В дальнейшем мы для простоты будем полагать

$$\omega' = ((i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \dots,\ (i_n, j_n),\ \dots)$$

и использовать координатные функции $i_n(\omega') = i_n$ и $j_n(\omega') = j_n$.

Введем новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \left(\tilde{\Omega} \times \Omega', \tilde{\mathcal{F}} \times \mathcal{F}', \tilde{\mathsf{P}} \times \mathsf{P}'\right)$, на котором будет определен случайный процесс $(x(t,\omega),\, t \geq 0)$, $\omega = (\tilde{\omega}, \omega')$. Мы *формально* определим траектории процесса $(x(t),\, t \geq 0)$ при помощи следующих условий :

$$\begin{aligned} x_k(s,\omega) &= y_k^{x(\tau_n(\tilde{\omega})),\tau_n(\tilde{\omega})}(s,\tilde{\omega}), \\ & \qquad\qquad \forall s \in [\tau_n(\tilde{\omega}), \tau_{n+1}(\tilde{\omega})), \quad \forall k \in \mathcal{N}_N\,, \\ x_{j_n(\omega')}(\tau_n(\tilde{\omega}),\omega) &= x_{i_n(\omega')}(\tau_n(\tilde{\omega}) - 0, \omega), \\ x_m(\tau_n(\tilde{\omega}),\omega) &= x_m(\tau_n(\tilde{\omega}) - 0, \omega) \qquad \forall m \in \mathcal{N}_N \setminus \{j_n(\omega')\}\,. \end{aligned}$$

Неформально говоря, динамика процесса $x(t)$ имеет две составляющие: невозмущенное движение и попарная синхронизация между частицами. А именно, *синхронизация* возможна только в случайные моменты времени

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$$

и она имеет вид *синхронизирующих скачков*: в момент τ_n наудачу (с равной вероятностью) выбирается пара частиц (i,j) и частица j мгновенно перемещается к частице i:

$$(x_i, x_j) \to (x_i, x_i)\,. \tag{2}$$

Внутри интервалов (τ_k, τ_{k+1}) частицы процесса $x(t)$ движутся согласно закону марковского процесса $y(t)$.

Таким образом, динамика системы частиц $x(t)$ может быть рассмотрена как возмущение стохастической динамики $y(t)$. Нас интересует вопрос о том, как наличие синхронизирующих скачков влияет на поведение процесса на больших временах. Точнее, мы обсудим следующие ситуации:

(а) N фиксировано, а $t \to \infty$;

(б) $N \to \infty$, $t = t(N) \to \infty$ для различных функций $t(N)$ (временны́е шкалы).

Мы сосредоточимся, главным образом, на ситуации (б), посвятив ситуации (а) лишь параграф 3.2.

Условие M. Моменты $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются событиями пуассоновского потока с интенсивностью δ, то есть, последовательность $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из независимых случайных величин, имеющих показательное распределение: $\mathsf{P}\left(\tau_n - \tau_{n-1} > s\right) = \exp(-\delta s), \quad s > 0$.

Условие M приводит к тому, что $(x(t),\ t \geq 0)$ оказывается марковским процессом с пространством состояний $\mathbb{R}^N$ и формальным генератором

$$L_0^y + \delta L_{\mathrm{S}}, \qquad \delta > 0\,,$$

где L_0^y — генератор марковского процесса $y(t)$, а L_{S} отвечает синхронизирующим скачкам.

В настоящей работе мы будем рассматривать следующий класс невозмущенных динамик $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t))$:

$$dy_i = \frac{r}{N} \sum_{j=1}^{N} (y_i - y_j)\, dt + \sigma dB_i, \qquad i = 1, \ldots, N\,. \tag{3}$$

Здесь $r \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_N(t))$ — стандартное N-мерное броуновское движение. Другими словами, диффузионный процесс $y(t)$ описывает движение броуновских частиц, которые взаимодействуют между собой довольно простым образом. А именно, частицы каждой пары притягиваются друг к другу, если $r < 0$, и отталкиваются, если $r > 0$. В случае $r = 0$ невозмущенный процесс $y(t)$ совпадает с $B(t)$ и соответствует системе независимых броуновских частиц, такая задача была исследована в [8].

Таким образом, динамика процесса $x(t)$, определенного выше, зависит от четырех параметров N, r, σ и δ. Нам будет удобно называть такой процесс стохастической системой $\mathcal{M}_N(r, \sigma, \delta)$. В дальнейшем мы будем также рассматривать последовательности $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ (индексированные буквой N) процессов $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N$, у которых параметры, определяющие динамику, меняются в зависимости от N.

3 Основные результаты

В контексте изучения стохастических систем взаимодействующих частиц важнейшее место занимает описание коллективного поведения системы на больших временах. Интуитивно ясно, что наличие синхронизации должно приводить уменьшению пространственного "разброса" конфигурации частиц.

3.1 Контроль над размером конфигурации

Для того, чтобы формализовать понятие "размера" или "разброса" конфигурации $(x_1, \ldots, x_N)$ рассмотрим на пространстве состояний следующую функцию

$$V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+, \qquad V(x) := \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^{N} (x_m - M(x))^2 \,,$$

где $M(x) := \frac{1}{N} \sum\limits_{m=1}^{N} x_m$ есть центр масс конфигурации частиц $x = (x_1, \ldots, x_N)$. В математической статистике функция V известна как выборочная дисперсия. Мы введем также функцию $R_N^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, зависящую от времени $t \geq 0$ следующим образом

$$R_N^x(t) := \mathsf{E}\, V(x(t)). \tag{4}$$

Оказывается, что функция $R_N^x(t(N))$ ведет себя по разному при разном выборе временной шкалы $t = t(N)$. Для того, чтобы доказать это, мы получим следующую явную формулу для $R_N^x(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть процесс $x(t)$ соответствует стохастической модели $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$. Существует число $\varkappa > 0$, определяемое только видом синхронизирующего взаимодействия и не зависящее от других параметров модели r_N, σ_N, δ_N, такое, что*

1) при $a_N \neq 0$, где

$$a_N = \frac{\varkappa \delta_N}{N(N-1)} - 2r_N \,, \tag{5}$$

имеет место представление

$$R_N^x(t) = \sigma_N^2 a_N^{-1}\, (1 - \exp(-a_N t)) + \exp(-a_N t)\; R_N^x(0),$$

2) при $a_N = 0$

$$R_N^x(t) = \sigma_N^2\, t + R_N^x(0).$$

Другими словами, $R_N^x(t)$ является решением дифференциального уравнения очень простого вида:

$$\frac{d}{dt} R_N^x(t) = \sigma_N^2 - a_N\, R_N^x(t)\,.$$

Таким образом, модель $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$, которую мы предлагаем к изучению в настоящей работе, является явно решаемой. Благодаря этому обстоятельству, результаты о существовании различных фаз во временной эволюции моделей $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ получаются в качестве легкого следствия теоремы 3.1.

Замечание 1. Для попарных синхронизаций (1) и (2), рассматриваемых в настоящей работе, $\varkappa = 2$. Вместе с тем, результаты данной работы могут быть обобщены и на более общий случай k-частичных симметризованных синхронизирующих взаимодействий [7]. В таком случае константа $\varkappa > 0$ будет выражаться через сигнатуру взаимодействия (см. также [8]).

Замечание 2. Утверждение теоремы 3.1 остается верным и в тех крайних случаях, когда хотя бы один из параметров δ_N или r_N обращается в 0. Действительно, формальная ситуация "нет ни взаимодействия, ни синхронизации" ($\delta_N = 0$ & $r_N = 0$) соответствует случаю, когда процесс $x(t)$ есть N-мерное броуновское движение $\sigma_N B(t)$. Легкая проверка показывает, что

$$R_N^{\sigma_N B}(t) = R_N^{\sigma_N B}(0) + \sigma_N^2 t\,. \tag{6}$$

Это уравнение характеризует расплывание конфигурации независимых частиц. Ситуация "нет взаимодействия, но есть синхронизация" ($\delta_N > 0$ & $r_N = 0$) есть случай броуновских частиц с синхронизацией, которому посвящена работа [8]. Случай "есть взаимодействие, но нет синхронизации" ($\delta_N = 0$ & $r_N \neq 0$) хотя и лежит вне фокуса настоящей работы, но может быть без особого труда проанализирован с помощью небольшой модификации рассуждений параграфа 4 настоящей работы. При этом формулировка результата (теорема 3.1) остается неизменной.

3.2 Система с фиксированным числом частиц

Здесь мы обсудим поведение невозмущенного процесса $y(t)$ и процесса с синхронизацией $x(t)$ в предположении, что число частиц N *фиксировано*, а время t растет к бесконечности: $t \to \infty$. Можно заметить, что динамики возмущенного и невозмущенного процессов коммутируют со пространственными сдвигами системы частиц: $(x_1, \dots, x_N) \to (x_1 + a, \dots, x_N + a)$, поэтому не приходится ожидать, что эти процессы имеют пределы по распределению при $t \to \infty$. Поэтому разумно ставить такой вопрос, например, для процессов $y^\circ(t) = (y_i^\circ(t),\ i \in \mathcal{N}_N)$ и $x^\circ(t) = (x_i^\circ(t),\ i \in \mathcal{N}_N)$, которые видны подвижным наблюдателям, находящимся в центрах масс соответствующих конфирураций:

$$y_i^\circ(t) = y_i(t) - M(y(t)), \qquad x_i^\circ(t) = x_i(t) - M(x(t)),$$

(см. также [8]). Можно было бы поместить наблюдателя в одну из частиц конфигурации, как это сделано, например, в [3], но в настоящей работе удобнее подвижная система координат, связанная именно с центром масс. Существование пределов по распределению в подвижной системе координат созвучно свойству сдвиг-компактности для мерозначных случайных процессов (см. [16]).

Теорема 3.2 (Поведение $y(t)$ на больших временах)**.** *Для невозмущенного процесса $y(t)$ верны следующие утверждения.*

1) Центр масс эволюционирует как броуновское движение:

$$d\,M(y(t)) = \frac{1}{\sqrt{N}}\,d\,\widetilde{B}(t)\,,$$

где $\widetilde{B}(t)$ — стандартное броуновское движение.

2) Если $r_N > 0$ (отталкивающее взаимодействие), то процесс $y^\circ(t)$ не имеет предела по распределению при $t \to \infty$.

3) Если $r_N < 0$ (притягивающее взаимодействие), то процесс $y^\circ(t)$ является эргодичным и, следовательно, имеет при $t \to \infty$ предельное распределение, не зависящее от начальной конфигурации.

4) В случае $r_N = 0$ система $y(t)$ является N-мерным броуновским движением, а процесс $y^\circ(t)$ не имеет предела по распределению при $t \to \infty$.

Утверждения 1 и 4 теоремы 3.2 являются очевидными, а по поводу доказательства утверждений 2 и 3 мы ограничимся следующим комментарием. Процесс $y(t)$ является решением конкретной системы (3) стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) и при заданной размерности N вопрос о его поведении является хорошо изученным [17]. Как следует из Замечания 2, для данного случая ($\delta_N = 0$) мы можем воспользоваться явным представлением теоремы 3.1. В частности, функция $R_N^y(t) = R_N^{y^\circ}(t) = \mathsf{E}V(y(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}R_N^y(t) = \sigma_N^2 + 2r_N\,R_N^y(t)\,,$$

следовательно, $W(y) = \mathsf{E}V(y)$ является функцией Ляпунова для стохастической системы $y(t)$. Поэтому, утверждения 2 и 3 являются следствием теории устойчивости решений СДУ (см. [17]).

В случае $r_N < 0$ предельное распределение μ^N процесса $y^\circ(t)$ представляется сложным и едва ли оно может быть получено “в явном виде”. Однако некоторый функционал, вычисленный по этой предельной мере, мы можем извлечь из теоремы 3.1: $R_N^{y^\circ}(t) \to \sigma_N^2/(2r_N)$, $(t \to \infty)$.

Теперь мы обсудим, как синхронизация влияет на поведение системы с *фиксированным* числом частиц *на больших временах*, то есть, нас интересует утверждение для $x^\circ(t)$ аналогичное теореме 3.2. Прежде всего заменим, что для центра масс $M(x(t)$ невозможно написать замкнутое уравнение и эволюция $M(x(t)$ существенно сложнее, чем у $M(y(t))$. В промежутках между скачками $M(x(t)$ подчиняется замкнутому СДУ, но сами скачки зависят от индивидуального расположения каждой частицы. По поводу эргодичности и неэргодичности $x^\circ(t)$ мы сформулируем нижеследующий результат, доказательству которого мы посвятим отдельную публикацию. Отметим, что результаты теоремы 3.3 в настоящей статье использоваться не будут, а ее формулировка приводится тут для полноты изложения.

Теорема 3.3 (Поведение $y(t)$ на больших временах)**.**

1) Если $2r_N - \frac{\varkappa\delta_N}{N(N-1)} \ge 0$, то процесс $x^\circ(t)$ не имеет предела по распределению при $t \to \infty$.

2) Если $2r_N - \frac{\varkappa\delta_N}{N(N-1)} < 0$, то процесс $x^\circ(t)$ является эргодичным и, следовательно, имеет при $t \to \infty$ предельное распределение, не зависящее от начальной конфигурации.

Сравнивая теоремы 3.2 и 3.3, приходим к выводу, что синхронизация расширяет множество параметров, соответствующее эргодичности, с $r_N < 0$ до $r_N < \frac{\varkappa\delta_N}{2N(N-1)}$. Другими словами, на больших временах влияние синхронизации может частично скомпенсировать отталкивание частиц в невозмущенной динамике при $r_N > 0$ (или усилить притягивание при $r_N < 0$).

3.3 Наличие фазового перехода

Первое из такого рода утверждений, которое мы формулируем ниже, хотя и не является максимально общим, но зато наглядно демонстрирует наличие качественно различных временны́х шкал в коллективном поведении системы.

В следующей теореме мы будем считать, что $N \to \infty, \quad t = t(N) \to \infty$.

Теорема 3.4 (О трех фазах)**.** *Пусть числа $b \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ таковы, что $2b - \delta\varkappa \neq 0$, а $\sigma > 0$. Рассмотрим последовательность моделей*

$$\mathcal{M}_N(b/N^2, \sigma, \delta), \quad N = 1, 2, \dots ,$$

то есть, $r_N = bN^{-2}$, $\sigma_N = \sigma$, $\delta_N = \delta$. Предположим, что $\sup\limits_N R_N^x(0) < \infty$. Тогда имеют место два случая.

Случай 1: $2b - \delta\varkappa < 0$ *(доминирование синхронизации)*

I. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to 0,$ *то* $R_N^x(t(N)) \sim \sigma^2\, t(N).$

II. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to c_1 > 0,$ *то* $R_N^x(t(N)) \sim \gamma_{b,\delta}(c_1)\, \sigma^2\, t(N),$
причем функция $\gamma_{b,\delta}(c) > 0$ такова, что
$\gamma_{b,\delta}(0) = 1, \quad \frac{d}{dc}\gamma_{b,\delta}(c) < 0, \quad (c > 0), \quad \gamma_{b,\delta}(+\infty) = 0.$

III-S. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to \infty,$ *то* $R_N^x(t(N)) \sim \left(\dfrac{\sigma^2}{\varkappa\delta - 2b}\right) N^2.$

Случай 2: $2b - \delta\varkappa > 0$ *(сильное отталкивание)*

I. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to 0,$ *то* $R_N^x(t(N)) \sim \sigma^2\, t(N).$

II. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to c_1 > 0,$ *то* $R_N^x(t(N)) \sim \gamma_{b,\delta}(c_1)\, \sigma^2\, t(N),$
причем $\gamma_{b,\delta}(0) = 1, \quad \frac{d}{dc}\gamma_{b,\delta}(c) > 0, \quad (c > 0), \quad \gamma_{b,\delta}(+\infty) = +\infty.$

III-R. *Если* $\dfrac{t(N)}{N^2} \to \infty,$ *то*

$$R_N^x(t(N)) \sim \frac{\sigma^2 N^2}{2b - \varkappa\delta} \exp\left((2b - \varkappa\delta)\, \frac{t(N)}{N^2}\right).$$

Результаты данной теоремы можно пояснить следующим образом. На временны́х шкалах **I** в системе происходит относительно малое число синхронизирующих скачков и основной вклад в эволюцию вносит динамика невозмущенного процесса $y(t)$. В динамике процесса $y(t)$ (см. формулу (3)) коэффициент отталкивания/притягивания $r_N = b/N^2$ мал, чтобы его воздействие было заметно на временной шкале **I**, поэтому главную роль здесь играет диффузионная часть (3). Поэтому асимптотика функции $R_N^x(t(N))$ здесь, в сущности, такая же, как для системы независимых частиц (см. (6)). Следуя терминологии, предложенной в [5], мы назовем шкалу **I** *фазой начальной десинхронизации.* На последующих временны́х стадиях, влияние синхронизации и отталкивания/притягивания уже не являются пренебрежимыми. Мы видим на шкале **II** наличие в асимптотике $R_N^x(t(N))$ множителя $\gamma_{b,\delta}(c_1)$, который монотонно убывает в случае 1 и возрастает в случае 2. Поэтому *в случае 1* шкалу **II** естественно назвать фазой *постепенного затухания десинхронизации.* Так как *в случае 1* на шкале **III-S** асимптотика не зависит от того, насколько быстро растет $t(N)$, мы можем назвать эту шкалу *фазой финальной синхронизации.* Видно, что при изменении параметра c_1, происходит плавное сопряжение асимптотик шкал **I** и **III-S**.

Случай 2 характерен тем, что отталкивание между частицами преобладает над синхронизацией и заключительная шкала **III-R** демонстрирует неограниченный рост размеров конфигурации $x(t)$. Вторая шкала в случае 2 обеспечивает плавный переход между асимптотиками шкал **I** и **III-R**.

Таким образом, каждая из выделямых шкал демонстрирует некоторый (промежуточный) результат соревнования между различными составляющими динамики частиц: диффузией, отталкиванием и синхронизацией.

Заметим, что при непрерывном изменении параметров b и δ мы можем перейти от случая 1 к случаю 2, при этом качественная картина поведения системы сильно изменится. Следующая теорема посвящена пограничному случаю $2b - \delta\varkappa = 0$.

Теорема 3.5. *Пусть числа $b > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что $2b - \delta\varkappa = 0$, а $\sigma > 0$. Рассмотрим последовательность моделей*

$$\mathcal{M}_N(\tfrac{b}{N(N-1)}, \sigma, \delta), \quad N = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

и предположим, что $\sup\limits_N R_N^x(0) < \infty$. Тогда для любой функции $t(N) \to \infty$

$$R_N^x(t(N)) \sim \sigma^2\, t(N), \qquad N \to \infty.$$

В теореме 3.5 описана “хрупкая” ситуация, когда на больших временах отталкивание и синхронизация полностью уравновешивают друг друга. В результате этого система проявляет асимптотику функции $R_N^x(t(N))$, характерную для независимых броуновских частиц, и мы имеем здесь единую временную шкалу типа **I**.

В физике описано много явлений, когда при непрерывном изменении параметров многочастичной системы наблюдаются разрывы или утрата гладкости у макровеличин, характеризующих эту систему в целом. Такие явления называются фазовыми переходами. Эта терминология была заимствована математиками при изучении аналогичных эффектов в большом количестве вероятностных моделей (см. [18, 19, 20, 21, 5, 22].

Таким образом, стохастическая модель, изучаемая нами здесь, характеризуется наличием фазовых переходов.

3.4 Общая теорема о трех фазах

Следующая теорема обобщает теоремы предыдущего параграфа.

Теорема 3.6 (О трех фазах в общей постановке)**.** *Рассмотрим последовательность моделей*

$$\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N), \quad N = 1, 2, \dots,$$

относительно параметров которой, мы предположим, что

1) $\liminf_N \sigma_N > 0$,

2) $a_N = \frac{\varkappa \delta_N}{N(N-1)} - 2r_N \to 0$.

Как и раньше, предположим, что $\sup_N R_N^x(0) < \infty$. *Тогда при* $N \to \infty$ *имеют место следующие асимптотические результаты.*

I. *Если* $a_N t(N) \to 0$, *то* $R_N^x(t(N)) \sim \sigma_N^2\, t(N)$.

II. *Если* $a_N t(N) \to c \neq 0$, *то* $R_N^x(t(N)) \sim \dfrac{1-\exp(-c)}{c}\, \sigma_N^2\, t(N)$.

III-S. *Если* $a_N t(N) \to +\infty$, *то* $R_N^x(t(N)) \sim \dfrac{\sigma_N^2}{a_N}$.

III-R. *Если* $a_N t(N) \to -\infty$, *то* $R_N^x(t(N)) \sim \dfrac{\sigma_N^2}{|a_N|} \exp\left(|a_N|\, t(N)\right)$.

Замечание 3. Функция от c, возникающая в пункте II теоремы 3.6,

$$f(c) = \frac{1-e^{-c}}{c}, \tag{8}$$

строго убывает

$$f'(c) < 0, \quad (c \neq 0), \qquad f(-\infty) = +\infty, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0.$$

3.5 Возмущения параметров модели

Поскольку для стохастических систем, имеющих отношение к практическим приложениям, точное определение параметров модели затруднительно, уместной является задача об "устойчивости" качественного поведения системы при малых возмущениях параметров:

$$r_N = r_N{}^\circ + \widetilde{r_N}, \quad \delta_N = \delta_N{}^\circ + \widetilde{\delta_N}, \quad \sigma_N = \sigma_N{}^\circ + \widetilde{\sigma_N}.$$

На самом деле, решение проблемы устойчивости легко получается в виде несложных следствий теоремы 3.6. Ниже мы приведем лишь одно из таких утверждений. Введем обозначения

$$a_N{}^\circ = \frac{\varkappa \delta_N{}^\circ}{N(N-1)} - 2r_N{}^\circ, \qquad \widetilde{a_N} = \frac{\varkappa \widetilde{\delta_N}}{N(N-1)} - 2\widetilde{r_N}.$$

Таким образом, $a_N = a_N{}^\circ + \widetilde{a_N}$. Обозначим $q_N = a_N / a_N{}^\circ$.

Теорема 3.7 (О возмущении параметров)**.** *Рассмотрим последовательность моделей*

$$\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ), \quad N = 1, 2, \dots,$$

и предположим, что для параметров $r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ$ *этих моделей выполнены условия 1 и 2 теоремы 3.6, а также условие* $a_N{}^\circ \neq 0$ *для всех достаточно больших* N. *Тогда*

a) *условие* $|q_N| + \left|q_N^{-1}\right| = O(1)$, $N \to \infty$, *является необходимым и достаточным, чтобы модели* $\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ)$ *и* $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ *обладали общей временной шкалой* $t = t(N)$ *типа* ***I*** *и имели одинаковый вид асимптотического поведения функций* $R_N^{x;\circ}$ *и* R_N^x*:*

$$R_N^{x,\circ}(t(N)) \sim (\sigma_N{}^\circ)^2\, t(N), \qquad R_N^x(t(N)) \sim \sigma_N^2\, t(N);$$

б) *условие* $q_N \to 1$, $N \to \infty$, *является необходимым и достаточным, чтобы модели* $\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ)$ *и* $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ *обладали общей временной шкалой* $t = t(N)$ *типа* ***II*** *и имели одинаковый вид асимптотического поведения функций* $R_N^{x;\circ}$ *и* R_N^x *с одной и той же константой* $c \neq 0$*:*

$$R_N^{x;\circ}(t(N)) \sim f(c)\ (\sigma_N{}^\circ)^2\ t(N), \qquad R_N^x(t(N)) \sim f(c)\,\sigma_N^2\, t(N)\,,$$

где $f(c)$ *определено в (8).*

в) *условие* $0 < \liminf\limits_N q_N < \limsup\limits_N q_N < +\infty$ *является необходимым и достаточным, чтобы модели* $\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ)$ *и* $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ *обладали общей временной шкалой* $t = t(N)$ *типа* ***III-S*** *или* ***III-R*** *и имели одинаковый вид асимптотического поведения функций* $R_N^{x;\circ}$ *и* R_N^x*, соответствующий данному типу шкалы.*

Предположение $a_N{}^\circ \neq 0$, сделанное в теореме 3.7, существенно. Действительно, рассмотрим в качестве невозмущенной модели $\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ)$ модель (7) с условием $2b - \delta\varkappa = 0$, а в качестве возмущенной — модель

$$\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N) = \mathcal{M}_N\left(\tfrac{b}{N^2}, \sigma, \delta\right).$$

Здесь $a_N{}^\circ = 0$, а $a_N = \frac{2b}{N^2(N-1)}$, причем число b положительно. Согласно теореме 3.5 модель $\mathcal{M}_N(r_N{}^\circ, \sigma_N{}^\circ, \delta_N{}^\circ)$ обладает единой временной шкалой типа **I**:

$$R_N^{x;\circ}(t(N)) \sim \sigma^2\, t(N), \qquad \forall\, t(N) \uparrow \infty.$$

С другой стороны, применяя теорему 3.6, можно убедиться, что модель $\mathcal{M}_N(r_N, \sigma_N, \delta_N)$ обладает тремя последовательными временны́ми шкалами типов **I**, **II** и **III-S**: $t_1(N) = o(N^3)$, $t_2(N) \sim uN^3$ и $t_3(N)/N^3 \to \infty$, которые характеризуются следующими асимптотиками

$$\begin{aligned}
R_N^x(t_1(N)) &\sim \sigma^2\, t_1(N),\\
R_N^x(t_2(N)) &\sim f\,(2b\,u)\ \sigma^2\, t_2(N)\ \sim\ (1 - e^{-2b\,u})\,\frac{\sigma^2}{2b}\,N^3,\\
R_N^x(t_3(N)) &\sim \frac{\sigma^2}{2b}\,N^3
\end{aligned}$$

соответственно. Заметим, что формальный предельный переход $u \to +\infty$ переводит асимптотику фазы **II** в асимптотику фазы **III-S**.

4 Доказательства

Наша основная цель состоит в доказательстве теорем 3.1 и 3.6, так как все остальные основные утверждения (теоремы 3.4, 3.5 и 3.7) являются непосредственными следствиями этих теорем. Первичное значение имеет теорема 3.1 о явном представлении функции $R_N^x(t)$.

4.1 Доказательство теоремы 3.1

Общая схема доказательства будет напоминать вывод теоремы 2.3 в [8], но все этапы этого вывода потребуют существенной модификации и обобщения. Пусть $\Pi_t =$

$\max\{m : \tau_m \le t\}$. Таким образом, $\tau_{\Pi_t} = \max\{\tau_i : \tau_i \le t\}$. Для вычисления математического ожидания в $R_N^x(t) = \mathsf{E}\, V(x(t))$ мы прибегнем к следующей цепочке *условных* математических ожиданий

$$\mathsf{E}\,(\cdot) = \mathsf{E}\,\Big(\mathsf{E}\,\Big(\mathsf{E}\,\Big(\cdot \mid \{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}\Big) \mid \Pi_t\Big)\Big)\,.$$

Лемма 4.1.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\Big(V(x(t)\mid \ \{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}\Big) \;&=\; \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[A_{*,t}\sum_{i=0}^{\Pi_t-2} h_N^{\Pi_t-i}\, A_{\Pi_t-1}\cdots A_{i+1}\, B_i \,+\\ &\qquad + h_N\, A_{*,t}\, B_{\Pi_t-1} + B_{*,t}\Big] \,+\\ &\qquad + h_N^{\Pi_t}\, A_{*,t}\, A_{\Pi_t-1}\cdots A_1\, A_0\, R_N^x(0)\,,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_N \;&:=\; 1 - \frac{\varkappa}{N(N-1)}\,, \\ A_m \;&:=\; \exp\big(\,2r_N\,(\tau_{m+1}-\tau_m)\,\big)\,, \qquad \tau_0 \equiv 0, &\quad (9)\\ A_{*,t} \;&:=\; \exp\big(\,2r_N\,(t-\tau_{\Pi_t})\,\big)\,, &\quad (10)\\ B_m \;&:=\; A_m - 1, \qquad B_{*,t} \;:=\; A_{*,t}-1\,. &\quad (11)\end{aligned}$$

Эту лемму мы докажем в § 4.2, а пока воспользуемся ею для получения главного утверждения.

Если использовать (11) и исключить B_m и $B_{*,t}$ из утверждения леммы 4.1, мы получим представление

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\Big(V(x(t)\mid \ \{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}\Big) \;&=\; \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[\,h_N^{\Pi_t}\, A_{*,t}\, A_{\Pi_t-1}\cdots A_1\, A_0 \,+\\ &\qquad + (1-h_N)\ A_{*,t}\sum_{i=1}^{\Pi_t-2} h_N^{\Pi_t-i}\, A_{\Pi_t-1}\cdots A_{i+1}\, A_i \,+\\ &\qquad + (1-h_N)\ h_N\, A_{*,t}\, A_{\Pi_t-1} + (1-h_N)\ A_{*,t} - 1\Big] \,+\\ &\qquad + h_N^{\Pi_t}\, A_{*,t}\, A_{\Pi_t-1}\cdots A_1\, A_0\, R_N^x(0)\,.\end{aligned}$$

Вспоминая вид обозначений (9) и (10), получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\Big(V(x(t)\mid \ \{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}\Big) \;&=\; \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[\,h_N^{\Pi_t}\,\exp(2r_N t) \,+\\ &\qquad + (1-h_N)\sum_{i=1}^{\Pi_t-2} h_N^{\Pi_t-i}\,\exp\big(2r_N(t-\tau_i)\big) \,+ &\quad (12)\\ &\qquad + (1-h_N)\ h_N\,\exp\big(2r_N(t-\tau_{\Pi_t-1})\big) \,+ &\quad (13)\\ &\qquad + (1-h_N)\,\exp\big(2r_N(t-\tau_{\Pi_t})\big) - 1\Big] \,+ &\quad (14)\\ &\qquad + h_N^{\Pi_t}\,\exp(2r_N t)\, R_N^x(0)\,.\end{aligned}$$

Теперь мы намерены взять условное математическое ожидание $\mathsf{E}\,(\cdot\mid\Pi_t)$ от обеих частей предыдущей формулы. Нам понадобится следующий хорошо известный факт, который нетрудно проверить непосредственно (см. обсуждение в § 4.2).

Лемма 4.2. *Ввиду выполнения условия M случайный процесс* $(\Pi_t,\ t \geq 0)$ *является пуассоновским с параметром* δ_N. *Условные распределения случайных величин* $t-\tau_m$, *при фиксированном значении процесса* Π_t *принадлежат классу бета-распределений:*

$$\mathsf{P}\left\{t-\tau_m \in (x, x+dx) \,|\, \Pi_t = n\right\} = n\, C_{n-1}^{m-1}\, \frac{x^{n-m}(t-x)^{m-1}}{t^n}\, dx, \quad x \in (0,t),\ m = \overline{1,n}.$$

Вычисляя $\mathsf{E}\,(\cdot \,|\, \Pi_t = n)$ от тех слагаемых в (12)–(14), которые содержат множитель $(1-h_N)$, и применяя формулу бинома Ньютона, получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_N^{n-i} \int_0^t e^{2r_N x}\, n\, C_{n-1}^{i-1}\, \frac{x^{n-i}(t-x)^{i-1}}{t^n} = t^{-1} \int_0^t e^{2r_N x}\, n\, \left(\frac{h_N x + (t-x)}{t}\right)^{n-1} dx\,.$$

С учетом оставшихся слагаемых, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(V(x(t) \,|\, \Pi_t = n) \;\;=\;\; & \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[-1 + h_N^n\, \exp(2r_N t) + \\ & \qquad + (1-h_N)\, t^{-1} \int_0^t e^{2r_N x}\, n\, \left(1 - \frac{(1-h_N)\, x}{t}\right)^{n-1} dx\Big] + \\ & + h_N^n\, \exp(2r_N t)\, R_N^x(0)\,.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi(s) := \mathsf{E}s^{\Pi_t} = \exp\left(\,\delta_N t\,(s-1)\,\right)$$

производящую функцию пуассоновской случайной величины Π_t. Усредняя по значениям Π_t, приходим к представлению

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(V(x(t)) \;\;=\;\; & \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[-1 + \varphi(h_N)\, \exp(2r_N t) + \\ & \qquad + (1-h_N)\, t^{-1} \int_0^t e^{2r_N x} \varphi'\left(1 - \frac{(1-h_N)\, x}{t}\right) dx\Big] + \\ & + \varphi(h_N)\, \exp(2r_N t)\, R_N^x(0)\,.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi'(s) = \delta_N t\, \exp\left(\,\delta_N t\,(s-1)\,\right)$, вычислим

$$\begin{aligned} t^{-1} \int_0^t e^{2r_N x} \varphi'\left(1 - \frac{(1-h_N)\, x}{t}\right) dx \;\;&=\;\; t^{-1} \int_0^t e^{2r_N x}\, \delta_N t\, \exp\left(-\delta_N t \cdot \frac{(1-h_N)\, x}{t}\right) dx \;= \\ &=\;\; \delta_N \int_0^t \exp\left(2r_N x - \delta_N\,(1-h_N)\, x\,\right) dx \;= \\ &=\;\; \begin{cases} \dfrac{\delta_N}{a_N}\,\left(1 - e^{-a_N t}\right), & \text{если } \ a_N \neq 0, \\[2ex] \delta_N t, & \text{если } \ a_N = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где, как и в (5), $a_N = \frac{\varkappa \delta_N}{N(N-1)} - 2r_N$. Более того,

$$\varphi(h_N)\, \exp(2r_N t) = \exp(\,2r_N t - \delta_N t\,(1-h_N)\,) = e^{-a_N t}\,.$$

Теперь все готово для вычисления $\mathsf{E}\,(V(x(t))$. В случае $a_N \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,(V(x(t)) &= e^{-a_N t}\, R_N^x(0) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[-1 + e^{-a_N t} + \\
&\qquad + \frac{(1-h_N)\,\delta_N}{a_N}\,\left(1 - e^{-a_N t}\right)\Big] = \\
&= e^{-a_N t}\, R_N^x(0) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,\frac{2r_N}{a_N}\,\left(1 - e^{-a_N t}\right) = \\
&= e^{-a_N t}\, R_N^x(0) + \frac{\sigma_N^2}{a_N}\,\left(1 - e^{-a_N t}\right).
\end{aligned}
$$

В случае $a_N = 0$ имеем $2r_N = \delta_N(1-h_N)$, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,(V(x(t)) &= R_N^x(0) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[-1 + 1 + \\
&\qquad + (1-h_N)\,\delta_N t\Big] = \\
&= R_N^x(0) + \sigma_N^2\, t\,.
\end{aligned}
$$

Теорема 3.1 доказана.

4.2 Доказательство лемм

Нам понадобятся следующие семейства σ-алгебр, порожденных последовательностью времен $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и случайным процессом $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &= \sigma\left((x(s),\, s \le \tau_m)\,,\, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}\right), \quad m = 0, 1, \ldots \\
\mathcal{F}_{m-} &= \sigma\left((x(s),\, s \le \tau_m - 0)\,,\, \{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}\right), \quad m = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

Обозначим также $\mathcal{F}_{0-} = \sigma\left(\,\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$. Очевидно, что

$$
\mathcal{F}_{0-} \subset \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{m-} \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{(m+1)-} \subset \mathcal{F}_{m+1} \subset \cdots
$$

Для доказательства леммы 4.1 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Существует $\varkappa > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$*

$$
\mathsf{E}\,(V(x(\tau_m))\,|\,\mathcal{F}_{m-}) = h_N\, V\left(x(\tau_m - 0)\right),
$$

где $h_N = \left(1 - \dfrac{\varkappa}{N(N-1)}\right) \in (0,1)$.

Эта лемма связана со свойствами синхронизирующих скачков. Она уже использовалась и обсуждалась в работе [8]. В основе ее доказательства, которое мы не станем приводить здесь, лежат некоторые идеи работы [7]. Обратившись к [7], легко видеть, что утверждение леммы 4.3 справедливо и для более общих синхронизирующих взаимодействий. Отметим (см. Замечание 1), что для парных синхронизаций, которые мы обсуждаем тут, постоянная $\varkappa$ имеет особенно простой вид: $\varkappa = 2$.

Лемма 4.4. *Для невозмущенной динамики $(y(t),\, t \ge 0)$ справедливо тождество*

$$
V(y(t)) = V(y(0))\,\exp\left(2r_N t\right) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\left(\exp\left(2r_N t\right) - 1\right)\,.
$$

Доказательство леммы 4.4 довольно стандартно и мы его отложим до конца настоящего параграфа. А сейчас завершим *доказательство леммы* 4.1.

Так как динамика процесса $x(t)$ состоит из синхронизирующих скачков, происходящих в моменты $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и фрагментов независящей от них свободной динамики $y(t)$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(V(x(\tau_{m+1}-0))\,|\,\mathcal{F}_m\right) &= V(x(\tau_m))\exp\left(2r_N(\tau_{m+1}-\tau_m)\right)+\\
&+\frac{\sigma_N^2}{2r_N}\left(\exp\left(2r_N(\tau_{m+1}-\tau_m)\right)-1\right) =\\
&= V(x(\tau_m))\,A_m+\frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,B_m
\end{aligned}$$

в обозначениях (9) и (11).

Используя лемму 4.3, мы получим, что

$$\mathsf{E}\left(V(x(\tau_{m+1}))\,|\,\mathcal{F}_m\right) = h_N A_m V(x(\tau_m)) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,h_N B_m\,. \tag{15}$$

Соотношение (15) можно использовать для итерирования, например, в следующем выражении

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(V(x(\tau_{m+1}))\,|\,\mathcal{F}_{m-1}\right) &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(V(x(\tau_{m+1}))\,|\,\mathcal{F}_m\right)\,|\,\mathcal{F}_{m-1}\right) =\\
&= h_N A_m \mathsf{E}\left(V(x(\tau_m))\,|\,\mathcal{F}_{m-1}\right) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,h_N B_m =\\
&= h_N A_m\left(h_N A_{m-1}V(x(\tau_{m-1})) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,h_N B_{m-1}\right) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\,h_N B_m =\\
&= h_N^2 A_m A_{m-1} V(x(\tau_{m-1})) + \frac{\sigma_N^2}{2r_N}\left[h_N^2 A_m B_{m-1} + h_N B_m\right].
\end{aligned}$$

Продолжая эти рекуррентные разложения, мы приходим к формуле

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big(V(x(\tau_n)|\ \{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}\Big) &= h_N^n\,A_{n-1}\cdots A_1\,A_0\,R_N^x(0)\ +\\
&+\frac{\sigma_N^2}{2r_N}\Big[\sum_{i=0}^{n-2} h_N^{n-i}\,A_{n-1}\cdots A_{i+1}\,B_i + h_N\,B_{n-1}\Big].
\end{aligned}$$

Для любого неслучайного момента времени $t > 0$, заметим, что на интервале $(\tau_{\Pi_t}, t]$ не происходит ни одной синхронизации. Здесь мы принимаем во внимание то, что распределение τ_{Π_t} непрерывно. Применив еще раз лемму 4.4, мы придем к утверждению *леммы* 4.1. Заключительное замечание состоит в том, что выше во всех формулах, содержащих условные математические ожидания, знак “=” понимается, как обычно, в смысле равенства “почти всюду”.

Что касается первого утверждения *леммы* 4.2 о том, что при выполнении условия M процесс Π_t является пуассоновским, то этот факт является широко известным. Второе утверждение леммы 4.2 о явном виде условной плотности проверяется прямым вычислением.

Доказательство леммы 4.4. Используя систему стохастических дифференциальных уравнений, определяющих процесс $(y(t),\, t \geq 0)$, для любых $k \neq m$ имеем

$$\begin{aligned}
d\,(y_k - y_m) &= \frac{r_N}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_k - y_m)\,dt\ +\ \sigma_N\,(dB_k - dB_m)\,,\\
d\,Y_{km} &= r_N\,Y_{km}\,dt + \sigma_N\sqrt{2}\,d\widetilde{B}_{km},
\end{aligned}$$

где $Y_{km}(t) = y_k(t) - y_m(t)$, а $\left(\widetilde{B}_{km}(t),\, t \geq 0\right)$ — стандартное броуновское движение. Обозначая $m_2(t) = \mathsf{E}\,(Y_{km}(t))^2$ и применяя формулу Ито, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно неслучайной функции $m_2(t)$:

$$\frac{d}{dt}\, m_2 = 2r_N\, m_2 \,+\, 2\sigma_N^2\,,$$

решая которое, получаем

$$m_2(t) = m_2(0)\, e^{2r_N t} \,+ \frac{\sigma_N^2}{r_N}\, \left(e^{2r_N t} - 1\right)\,. \tag{16}$$

Непосредственно можно убедиться в том, что

$$V(x) := \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^{N} (x_m - M(x))^2 = \frac{1}{(N-1)N} \sum_{k<m} (x_k - x_m)^2\,,$$

следовательно,

$$V(y(t)) := \frac{1}{(N-1)N} \sum_{k<m} (Y_{km}(t))^2\,.$$

Применяя к обеим частям математическое ожидание и используя (16), получаем утверждение леммы 4.4.

4.3 О доказательствах теорем 3.4, 3.5, 3.6 и 3.7

Теорема 3.6 получается из п. 1 теоремы 3.1 непосредственным вычислением соответствующих асимптотик. Теорема 3.4, в свою очередь, легко выводится из теоремы 3.6. При этом

$$\gamma_{b,\delta}(c_1) = f(\, c_1(\delta\varkappa - 2b)\,),$$

где $f(c)$ — функция, определенная в (8). Теорема 3.5 следует из п. 2 теоремы 3.1.

Теорема 3.7 доказывается путем прямой проверки выполнения условий теоремы 3.6 для возмущенных моделей.

5 Возможные обобщения результатов

Во-первых, как было отмечено в Замечании 1, полученные в настоящей работе результаты обобщаются на случай k-частичного симметризованного синхронизирующего взаимодействия (k-ССВ), $k > 2$. При этом никаких модификаций изложенные выше доказательства не требуют. Отличие состоит только в том, что в случае парных синхронизаций (2-ССВ) число $\varkappa$ равно 2. Но сама конструкция-определение k-ССВ является довольно громоздкой, поэтому мы ее не будем приводить здесь, чтобы не злоупотреблять объемом данной публикации. Определение k-ССВ и его обсуждение читатель может найти, обратившись к [7, 8].

Все основные результаты параграфа 3 останутся в силе, а их доказательства останутся практически неизменными, если в качестве невозмущенной динамики $y(t)$ взять марковское семейство, соответствующее следующей системе СДУ:

$$dy_i = r_N\, y_i\, dt + \sigma_N dB_i, \qquad i = 1, \ldots, N\,, \tag{17}$$

где, как и в (3), $r_N \in \mathbb{R}$, $\sigma_N > 0$, $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_N(t))$ — стандартное N-мерное броуновское движение. Очевидно, что в процессе $y(t)$, заданном системой (17), частицы независимы. Например, при $r_N < 0$ мы имеем дело с N независимыми процессами Орнштейна-Уленбека. В некотором смысле случай (17) выглядит проще, чем случай (3). Отличие (17) от случая (3) состоит в том, что теперь динамика $y(t)$ не коммутирует со сдвигами, поэтому нет необходимости переходить к подвижной системе координат, связанной с центром масс. То есть, формулировки теоремы 3.2 (п. 2–4) и теоремы 3.3 следует модифицировать заменив в них y° на y и x° на x соответственно. Формулировки теорем параграфов 3.3–3.5 остаются неизменными.

Список литературы

[1] *Mitra D., Mitrani I.*, Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback // Performance Evaluation, 1987, v. 7, p. 111–124.

[2] *Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.*, Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Belmont: Athena Scientific, 1997.

[3] *Manita A., Shcherbakov V.*, Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction // Markov Processes Relat. Fields, 2005, v. 11, N. 3, p. 489–518.

[4] *Malyshev V., Manita A.*, Asymptotic Behaviour in the Time Synchronization Model / Representation Theory, Dynamical Systems, and Asymptotic Combinatorics AMS, American Mathematical Society Translations — Series 2: Advances in the Mathematical Sciences, 2006, v. 217, p. 101–115.

[5] *Малышев В., Манита А.*, Фазовые переходы в модели синхронизации времени // Теория вероятностей и ее применения, 2005, т. 50, № 1, с. 150–158.

[6] *Малышкин А.Г.*, Предельная динамика для вероятностных моделей обмена информацией в сетях параллельных вычислений // Проблемы Передачи Информации, 2006, т. 42, № 3, с. 78–96.

[7] *Манита А.Д.*, Стохастическая синхронизация в большой системе однотипных частиц // Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, № 1, с. 162–168.

[8] *Manita A.*, Brownian Particles Interacting via Synchronizations // Communications in Statistics — Theory and Methods, 2011, v. 40, N. 19-20, p. 3440–3451.

[9] *Manita A.*, On Markovian and non-Markovian Models of Stochastic Synchronization / Proceedings of The 14th Conference "Applied Stochastic Models and Data Analysis" (ASMDA), 2011, Rome, Italy, p. 886–893.

[10] *Manita A., Simonot F.*, Clustering in Stochastic Asynchronous Algorithms for Distributed Simulations / Lecture Notes in Computer Science, 2005, v. 3777, p. 26-37.

[11] *Manita A., Simonot F.*, On the cascade rollback synchronization // arXiv.org:math/0508533, 2005.

[12] *Манита А.Д.*, Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации // Успехи математических наук, 2006, т. 61, № 5, с. 187-188.

[13] *Манита А.Д.*, Коллективное поведение в многомерных вероятностных моделях синхронизации // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2007, т. 14, № 6, с. 1001–1021.

[14] *Ито К.*, Вероятностные процессы. Выпуск 2. М.: Мир, 1963.

[15] *Вентцель А.Д.*, Курс теории случайных процессов, М.: Наука, 1975.

[16] *Дороговцев А.А.*, Мерозначные процессы и стохастические потоки. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.

[17] *Хасьминский Р.З.*, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М.: Наука, 1969.

[18] *Синай Я.Г.*, Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.

[19] *Grimmett G.*, Percolation. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[20] *Маслов В.П.*, Фазовые переходы в вероятностной игре // Матем. заметки, 2003, т. 73, № 4, с. 637–640.

[21] *Маслов В.П.*, Фазовый переход из “конденсатного” состояния // Матем. заметки, 2003, т. 74, № 4, с. 637–640.

[22] *Малышев В.А., Манита А.Д.*, Стохастическая микромодель течения Куэтта // Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, № 4, с. 798-–809.

Частичные системы Штейнера и случайные гиперграфы[1]

Шабанов Д.А.[2]

Исследуется известная задача экстремальной комбинаторики, связанная с частичными системами Штейнера. В работе с помощью случайных гиперграфов получены новые верхние оценки минимально возможного количества ребер в частичной системе Штейнера с большим хроматическим числом.

1 Введение и история задачи

В работе исследуется известная экстремальная задача о раскрасках частичных систем Штейнера. Сначала мы напомним основные определения.

Гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность подмножеств множества V, и эти подмножества называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из $E(H)$ не являются одноцветными. *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа. Мы будем обозначать хроматическое число гиперграфа H через $\chi(H)$. Если $\chi(H) \leq r$, то говорят, что гиперграф H является *r-раскрашиваемым.*

Пусть $n > l \geq 2$ — натуральные числа. Гиперграф H называется *(n, l)-системой*, если он является n-однородным, и любые l вершин H содержатся (как подмножество) не более чем в одном ребре H. В частном случае, если H — это $(n, 2)$-система, то говорят, что он является *простым* n-однородным гиперграфом.

Частным случаем (n, l)-систем являются, так называемые, системы Штейнера. *Системой Штейнера* $S(l, n, m)$ называется n-однородный гиперграф на m вершинах, любые l вершин которого содержатся (как подмножество) ровно в одном ребре гиперграфа. Таким образом, система Штейнера $S(l, n, m)$ является (n, l)-системой и, в частном случае $l = 2$, простым гиперграфом. Впервые понятие системы Штейнера появилось еще в 1853 году в работе самого Дж. Штейнера [1]. Совокупности подмножеств, образующие системы Штейнера, часто возникают в различных задачах теории кодирования. Подробнее об

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00294), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8784.2010.1) и гранта Президента РФ МК-3429.2010.1.

[2]Шабанов Дмитрий Александрович, gold-amber@yandex.ru, ассистент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

этом можно прочитать, например, в обзоре [2] и книге [3]. В свою очередь (n,l)-системы в мировой литературе принято называть *частичными системами Штейнера.*

В 2001 году в работе А. В. Косточки, Д. Мубаи, В. Рёдля и П. Тетали [4] была поставлена задача об отыскании величины $m^*(n,r,l)$, равной *минимально возможному числу ребер в* (n,l)*-системе с хроматическим числом, большим* r. Формально, определение $m^*(n,r,l)$ можно записать так:

$$m^*(n,r,l) = \min\left\{|E(H)|:\ H - (n,l)\text{-система},\ \chi(H) > r\right\}.$$

В настоящей работе получена новая верхняя оценка величины $m^*(n,r,l)$, а потому мы напомним только об известных верхних оценках $m^*(n,r,l)$, опустив рассказ о нижних оценках.

В 2001 году А. В. Косточка с соавторами получили (см. [4]) следующую верхнюю оценку величины $m^*(n,r,l)$.

Теорема 1. (А.В. Косточка, Д. Мубаи, В. Рёдль, П. Тетали, [4]) *Для любых* $n \geq 3$, $l \geq 2$, $r \geq 2$ *выполняется неравенство*

$$m^*(n,r,l) \leq 2\frac{\left(2n^{3l}\right)^{l/(l-1)}}{(n)_l}\left(r^{n-1}\ln(er)\right)^{l/(l-1)}. \tag{1}$$

В формуле (1) через $(n)_l$ обозначено число размещений без повторения: $(n)_l = n(n-1)\ldots(n-l+1)$.

В 2009 году Косточка вернулся к этой задаче, и в его совместной с М. Кумбхатом работе [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. (А.В. Косточка, М. Кумбхат, [6]) *Для любых* $r \geq 2$ *и* $l \geq 2$ *существует такое число* $n_0 = n_0(r,l)$*, что для всех* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$m^*(n,r,l) \leq 10r^2\left(2r^n n^2\right)^{l/(l-1)}. \tag{2}$$

Наконец, еще два результата были получены в 2010 году. Первый из них принадлежит Косточке и Рёдлю (см. [7]).

Теорема 3. (А.В. Косточка, В. Рёдль, [7]) *Для любых* $r \geq 2$ *и* $l \geq 2$ *существует такое число* $n_1 = n_1(r,l)$*, что для всех* $n > n_1$ *выполняется неравенство*

$$m^*(n,r,l) \leq (4\,e^r)^l\,(n\,r^n \ln r)^{l/(l-1)}. \tag{3}$$

Второй результат 2010 года получили Т. Боман, А. Фризе и Д. Мубаи в работе [8].

Теорема 4. (Т. Боман, А. Фризе, Д. Мубаи, [8]) *Существует такая функция* $r_0 = r_0(n,l)$*, что для всех* $n > l \geq 2$*, и* $r > r_0$ *выполняется неравенство*

$$m^*(n,r,l) \leq 2\left(\frac{100(n)_l^2}{l!}\right)^{1/(l-1)}\left(\frac{10(n-1)}{l-1}\right)^{l/(l-1)}\left(r^{n-1}\ln r\right)^{l/(l-1)}. \tag{4}$$

Заметим, что для величины $m^*(n,r,l)$ ранее были получены сильные асимптотические верхние оценки (см. (2), (3), (4)), когда параметр l мал (фиксирован в асимптотике). Только первая оценка Косточки и др. (1) выполнена для всех возможных l, но, совершенно очевидно, она весьма неточна при больших l (например, при $l \sim n$).

2 Формулировка основного результата

В работе получена новая верхняя оценка $m^*(n,r,l)$, которая выполнена для всех $l \geq 3$.

Теорема 5. *Существует такая положительная константа C, что для любых $n > l \geq 3$ и $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m^*(n,r,l) \leq C\, n^{2l/(l-2)} \left(r^{n-1} \ln r\right)^{l/(l-2)}. \tag{5}$$

Если, к тому же, $r \geq n$, то

$$m^*(n,r,l) \leq C\, \left(\frac{n^{2l}}{l!}\right)^{1/(l-2)} \left(r^{n-1} \ln r\right)^{l/(l-2)}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 5 основано на рассмотрении биномиальной модели случайного гиперграфа и будет приведено в следующем разделе.

Перейдем к сравнению верхних оценок величины $m^*(n,r,l)$. Оценка Косточки и Рёдля (3) улучшает их предыдущий результат (1), а также оценку Косточки и Кумбхата (2) и нашу новую оценку (5) при фиксированных l и r и растущем n. Несложно понять, что в этих условиях на параметры правая часть (3) есть

$$O\left(r^{nl/(l-1)} n^{l/(l-1)}\right),$$

в то время как правая часть оценки (1) имеет вид

$$\Omega\left(r^{nl/(l-1)} n^{(2l^2+l)/(l-1)}\right),$$

а правая часть (2) — вид

$$\Omega\left(r^{nl/(l-1)} n^{2l/(l-1)}\right),$$

ну а наша оценка (5) этих условиях есть

$$\Omega\left(r^{nl/(l-2)} n^{2l/(l-2)}\right).$$

В свою очередь, оценка Бомана, Фризе и Мубаи (4) улучшает оценку Косточки и др. (1), если

$$\left(\frac{100(n)_l^2}{l!}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10(n-1)}{l-1}\right)^{l/(l-1)} < \frac{\left(2n^{3l}\right)^{l/(l-1)}}{(n)_l}.$$

Несложно проверить, что данное неравенство выполняется для всех $l \geq 3$, $n \geq 3$:

$$\left(\frac{100(n)_l^2}{l!}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10(n-1)}{l-1}\right)^{l/(l-1)} < \left(\frac{100n^{2l}}{6}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10n}{2}\right)^{l/(l-1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{50}{3}\right)^{1/2} 5^{3/2} n^3 < 50n^3 < n^{\frac{21}{2}} \leq \left(n^7\right)^{l/(l-1)} \leq \left(n^{2l+1}\right)^{l/(l-1)} =$$

$$= \frac{\left(n^{3l}\right)^{l/(l-1)}}{n^l} < \frac{\left(2n^{3l}\right)^{l/(l-1)}}{(n)_l}.$$

Таким образом, оценка (4) всегда лучше (1), если выполнены условия теоремы 4. Более того, при растущем r и фиксированных значениях n и l оценка (4) улучшает и нашу оценку (6): в данной асимптотической области (4) есть $\Omega\left(r^{(n-1)l/(l-1)}\right)$, в то время как (6) есть $\Omega\left(r^{(n-1)l/(l-2)}\right)$.

Сравним теперь оценку Косточки, Мубаи, Рёдля и Тетали (1) и нашу новую оценку (5), которые выполнены при всех значения параметров $n > l \geq 3$ и $r \geq 2$. Отношение правых частей (1) и (5) имеет порядок

$$n^{\frac{3l^2}{l-1}-\frac{2l}{l-2}}((n)_l)^{-1}(r^{n-1}\ln r)^{-l/[(l-1)(l-2)]} >$$

$$> n^{\frac{3l^2}{l-1}-\frac{2l}{l-2}-l}r^{-\frac{(n-1)l}{(l-1)(l-2)}} = n^{2l+\frac{3}{l-1}-\frac{4}{l-2}-3}r^{-\frac{(n-1)l}{(l-1)(l-2)}}.$$

Отсюда видно, что, например, в асимптотической области $\frac{n\ln r}{l} = o(l\ln n)$ наша оценка (5) существенно лучше оценки (1) Косточки и др. Если к тому, выполнено $r \geq n$, то у нас еще более сильная оценка (6). Однако в обратной области $\frac{n\ln r}{l} \gg l\ln n$ наши оценки, наоборот, асимптотически слабее.

К сожалению, величины $n_0(r,l)$, $n_1(r,l)$ и $r_0(n,l)$ из условий теорем 2, 3 и 4 трудно поддаются явному вычислению. Поэтому, подводя итоги сравнения верхних оценок величины $m^*(n,r,l)$, мы отметим лишь следующее.

1. При фиксированных $l \geq 3$, $r \geq 2$ и растущем n наилучшей асимптотической верхней оценкой является оценка Косточки и Рёдля (3).

2. При фиксированных $n > l \geq 3$ и растущем r наилучшей асимптотической верхней оценкой является оценка Бомана, Фризе и Мубаи (4).

3. В случае, когда n и l растут и выполнено $\frac{n\ln r}{l} \gg l\ln n$, наилучшей верхней оценкой служит результат Косточки, Мубаи, Рёдля и Тетали (1).

4. В случае, когда n и l растут, $r < n$ и выполнено $\frac{n\ln r}{l} = o(l\ln n)$, наилучшей верхней оценкой служит наша первая оценка (5).

5. В случае, когда n и l растут, $r \geq n$ и выполнено $\frac{n\ln r}{l} = o(l\ln n)$, наилучшей верхней оценкой служит наша вторая оценка (6).

Таким образом, в работе получены две новые верхние асимптотические оценки величины $m^*(n,r,l)$, которые улучшают все ранее известные результаты в очень широкой области значений параметров n, r и l.

3 Доказательство основного результата

В данном разделе мы приведем доказательство теоремы 5. Начнем мы с обоснования неравенства

$$m^*(n,r,l) \leq C_1\, n^{2l/(l-2)}\left(r^{n-1}\ln r\right)^{l/(l-2)}, \tag{7}$$

где $C > 0$ — некоторая абсолютная константа, а $n > l \geq 3$, $r \geq 2$.

Для доказательства (7) необходимо доказать существование n-однородного гиперграфа H, который обладает следующими свойствами:

1) хроматическое число $\chi(H) > r$,

2) H является (n,l)-системой,

2) число ребер H не превышает правой части (7).

Для доказательства существования гиперграфов с такими свойствами мы рассмотрим модель биномиальную случайного гиперграфа $H(N,n,p)$. Пусть $K_N^{(n)}$ — полный n-однородный гиперграф на N вершинах, тогда гиперграф $H(N,n,p)$ есть подгиперграф $K_N^{(n)}$, полученный путем случайного включения ребер $K_N^{(n)}$: каждое ребро независимо от других включается в $H(N,n,p)$ с вероятностью p и не включается с вероятностью $1-p$. Данная модель случайного гиперграфа — это естественное обобщение классической модели случайного графа $G(n,p)$, предложенной в 60-х годах П. Эрдешем и А. Реньи (см. [9]). Подробнее об исследованиях случайных графов и гиперграфов см. [10], [11], [12].

Выберем значения параметров модели $H(N,n,p)$ следующим образом:

$$N = \left\lceil \left(n^{2l} r^{2(n-1)} (\ln r)^2\, (4.1)^2\right)^{\frac{1}{l-2}} \right\rceil, \quad p = (4.1)\,\frac{r^{n-1}\ln r}{\binom{N}{n}}\, N. \tag{8}$$

Оценим вероятности невыполнения интересующих нас трех событий. Для удобства оформим данные оценки в виде трех утверждений.

Утверждение 1.

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \le r\right) < \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \le r\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{\sigma}\{\sigma \text{ — правильная } r\text{-раскраска } H(N,n,p)\}\right),$$

где объединение берется по всем r-цветным раскраскам σ множества вершин. В свою очередь,

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{\sigma}\{\sigma \text{ — правильная } r\text{-раскраска } H(N,n,p)\}\right) \le$$

$$\le \sum_{\sigma} \mathsf{P}\left(\sigma \text{ — правильная } r\text{-раскраска } H(N,n,p)\right) = \sum_{\sigma}(1-p)^{\sum_{i=1}^{r}\binom{N_i(\sigma)}{n}},$$

где через $N_i(\sigma)$ обозначено число вершин цвета i в раскраске σ. Сумма

$$\sum_{i=1}^{r}\binom{N_i(\sigma)}{n}$$

при любых значениях $N_i(\sigma)$, для которых $\sum_{i=1}^{r}\ N_i(\sigma) = N$, оценивается снизу выражением $r\binom{N/r-1}{n}$. Доказательство этого простого факта можно найти, например, в [13]. Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \le r\right) \le \sum_{\sigma}(1-p)^{r\binom{N/r-1}{n}} \le r^N (1-p)^{r\binom{N/r-1}{n}} <$$

$$< r^N\ \exp\left\{-p\,r\binom{N/r-1}{n}\right\} = r^N\ \exp\left\{-\,4.1\,(\ln r) N\, r^n \frac{\binom{N/r-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right\}. \tag{9}$$

Рассмотрим отношение биномиальных коэффициентов в правой части (9). Используя простое неравенство $1 + x > e^{x/(1+x)}$ для всех $x > -1$, получаем

$$r^n \frac{\binom{N/r-1}{n}}{\binom{N}{n}} \geq \left(1 - \frac{rn}{N}\right)^n \geq \exp\left\{-\frac{r\,n^2}{N - rn}\right\} \geq e^{-4/3}. \tag{10}$$

Последнее неравенство в цепочке вытекает из следующих оценок. Заметим, что в силу выбора параметра N (см. (8)) выполнено $rn^2 \leq N$. Отсюда $rn \leq N/n \leq N/4$ (т.к. по условию теоремы 5 $n \geq 4$). Из этих простых соотношений мы и получаем (10).

В итоге,

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \leq r\right) < r^N \, \exp\left\{-\,4.1\,(\ln r) N\, r^n \frac{\binom{N/r-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right\} \leq$$

$$\leq r^N \, \exp\left\{-\,4.1\,(\ln r) N\, e^{-4/3}\right\} < r^N \, \exp\left\{-\,\frac{17}{16}\,(\ln r) N\right\} = r^{-\frac{N}{16}} \leq r^{-2} \leq \frac{1}{4}.$$

Предпоследнее неравенство также вытекает из соотношения $N \geq rn^2 \geq 32$. Утверждение 1 доказано. $\square$

Утверждение 2.

$$\mathsf{P}\left(H(N,n,p) \textit{ не является } (n,l)\textit{-системой}\right) < \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Гиперграф не является (n,l)-системой тогда и только тогда, когда у него есть два ребра, имеющие не менее l общих вершин. Следовательно, используя выбор (8) параметров нашей модели случайного гиперграфа, получаем цепочку соотношений

$$\mathsf{P}\left(H(N,n,p) \text{ не является } (n,l)\text{-системой}\right) \leq \binom{N}{l}\binom{N-l}{n-l}^2 p^2 =$$

$$= (4.1)^2 (r^{n-1}\ln r)^2 N^2 \frac{((n)_l)^2}{l!(N)_l} \leq (4.1)^2 (r^{n-1}\ln r)^2 N^2 \,\frac{1}{l!}\left(\frac{n^2}{N}\right)^l =$$

$$= (4.1)^2 \frac{\left(n^{2l} r^{2n-2} (\ln r)^2\right)}{l!\, N^{l-2}} \leq \frac{(4.1)^2}{l!\,(4.1)^2} = \frac{1}{l!} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{4}.$$

Утверждение 2 доказано. $\square$

Утверждение 3.

$$\mathsf{P}\left(|E(H(N,n,p))| \geq 2\binom{N}{n} p\right) < \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Ясно, число ребер случайного гиперграфа $H(N,n,p)$ есть биномиальная случайная величина с параметрами $\left(\binom{N}{n}, p\right)$. Тогда воспользуемся классической оценкой вероятности большого уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения: если X — биномиальная случайная величина, то

$$\mathsf{P}\left(X \geq 2\,\mathsf{E}X\right) \leq e^{-3\,\mathsf{E}X/8}.$$

Доказательство этого несложного факта можно найти, например, в монографии [11]. Тогда

$$\mathsf{P}\left(|E(H(N,n,p))| \geq 2\binom{N}{n}p\right) \leq \exp\left\{-\frac{3}{8}\binom{N}{n}p\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{3}{8}\,(4.1) r^{n-1}\ln r\, N\right\} \leq r^{-1.5\, r^{n-1}} \leq 2^{-12} < \frac{1}{4}.$$

Утверждение 3 доказано. □

Подведем итоги. Из утверждений 1, 2, 3 следует, что случайный гиперграф $H(N,n,p)$ при нашем выборе параметров с вероятностью по крайней мере $1/4$ обладает тремя свойствами: во-первых, он не является r-раскрашиваемым, во-вторых, он является (n,l)-системой, а, в-третьих, число его ребер не превосходит

$$2\binom{N}{n}p = 8.2\, N\, r^{n-1}\ln r = O\left(n^{2l/(l-2)}\left(r^{n-1}\ln r\right)^{l/(l-2)}\right).$$

Неравенство (7) доказано.

Теперь перейдем к обоснованию второй оценки $m^*(n,r,l)$:

$$m^*(n,r,l) \leq C_2\,\left(\frac{n^{2l}}{l!}\right)^{1/(l-2)}\left(r^{n-1}\ln r\right)^{l/(l-2)}, \tag{11}$$

где C_2 — абсолютная константа, а $r \geq n > l \geq 3$. Здесь мы также будем опираться на биномиальную модель случайного гиперграфа $H(N,n,p)$, но параметры N и p выберем немного по-другому:

$$N = \left\lceil \left(\frac{n^{2l}}{l!}\, r^{2(n-1)}(\ln r)^2\,(8.2)^2\right)^{\frac{1}{l-2}}\right\rceil, \quad p = (4.1)\,\frac{r^{n-1}\ln r}{\binom{N}{n}}\, N. \tag{12}$$

Покажем, что и при новом выборе параметров верны утверждения 1, 2, 3.

В силу (9) имеем

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \leq r\right) \leq r^N\,\exp\left\{-\,4.1\,(\ln r)N\, r^n\frac{\binom{N/r-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right\}.$$

Для обоснования неравенства (10) нам все лишь требовалось, чтобы $rn^2 \leq N$. Из выбора параметра N (см. (12)) у нас есть оценка $N \geq r^2 n$, но по условию $r \geq n$. Следовательно, $N \geq n^2 r$ и неравенство (10) верно и во втором случае. Далее, просто повторяем рассуждения доказательства утверждения 1 из первого случая:

$$\mathsf{P}\left(\chi\left(H(N,n,p)\right) \leq r\right) < r^N\,\exp\left\{-\,4.1\,(\ln r)N\, r^n\frac{\binom{N/r-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right\} \leq$$

$$\leq r^N\,\exp\left\{-\,4.1\,(\ln r)N\, e^{-4/3}\right\} < r^N\,\exp\left\{-\,\frac{17}{16}\,(\ln r)N\right\} = r^{-\frac{N}{16}} \leq r^{-2} \leq \frac{1}{4}.$$

Утверждение 1 во втором случае доказано.

Для оценки вероятности $(l-1)$-простоты $H(N,n,p)$, как и в первом случае, имеем оценку:

$$\mathsf{P}\left(H(N,n,p) \text{ не является } (n,l)\text{-системой}\right) \le \binom{N}{l}\binom{N-l}{n-l}^2 p^2 \le$$

$$\le (4.1)^2 \frac{\left(n^{2l} r^{2n-2} (\ln r)^2\right)}{l!\, N^{l-2}} \le \frac{(4.1)^2}{(8.2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Так что утверждение 2 тоже доказано и во втором случае.

Доказательство же утверждения 3 полностью идентично во втором случае, в нем не требуется никаких изменений для второго случая.

Подведем итоги. Из утверждений 1, 2, 3, как и в первом случае, следует, что случайный гиперграф $H(N,n,p)$ при нашем выборе параметров с вероятностью по крайней мере $1/4$ обладает тремя свойствами: во-первых, он не является r-раскрашиваемым, во-вторых, он является (n,l)-системой, а, в-третьих, число его ребер не превосходит

$$2\binom{N}{n} p = 8.2\, N\, r^{n-1} \ln r = O\left(\left(\frac{n^{2l}}{l!}\right)^{1/(l-2)} \left(r^{n-1}\ln r\right)^{l/(l-2)}\right).$$

Неравенство (11) обосновано. Теорема 5 доказана.

Список литературы

[1] *Steiner J.*, Combinatorische Aufgabe // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1853, v. 45, p. 181–182.

[2] *Assmus E.F. Jr., Key J.D.*, Steiner Systems // Designs and Their Codes, Cambridge University Press, 1994, p. 295–316.

[3] *Beth T., Jungnickel D., Lenz H.* Design Theory, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[4] *Kostochka A.V., Mubayi D., Rödl V., Tetali P.*, On the chromatic number of set systems // Random Structures and Algorithms, 2001, v. 19, № 2, p. 87–98.

[5] *Grable D., Phelps K., Rödl V.*, The minimum independence number for designs // Combinatorica, 1995, v. 15, p. 175–185.

[6] *Kostochka A.V., Kubmhat M.*, Coloring uniform hypergraphs with few edges // Random Structures and Algorithms, 2009, v. 35, № 3, p. 348–368.

[7] *Kostochka A.V., Rödl V.*, Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number // Random Structures and Algorithms, 2010, v. 36, № 1, p. 46–56.

[8] *Bohman T., Frieze A., Mubayi D.*, Coloring H-free hypergraphs // Random Structures and Algorithms, 2010, v. 36, № 1, p. 11–25.

[9] *Erdős P., Rényi A.*, On the evolution of random graphs // Publications of the Mathematical Institute of of the Hungarian Academy of Sciences, 1960, v. 5, № 1–2, p. 17-61.

[10] *Bollobás B.*, Random graphs, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[11] *Jansen S., Łuczak T., Rucinski A.*, Random graphs, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[12] *Karoński M., Łuczak T.*, Random hypergraphs / Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Bolyai Society Mathematical Studies, v. 2, eds. D. Miklós, V.T. Sós, T. Szőnyi, Springer, 1996, p. 283–293.

[13] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.*, Задачи и упражнения по дискретной математике, М.: Физматлит, 2005.

Симметричные ветвящиеся блуждания с тяжелыми хвостами[1]

Яровая Е.Б.[2]

Рассматривается непрерывное симметричное ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$ с одним источником размножения и гибели частиц. Предполагается, что переходные интенсивности случайного блуждания имеют «тяжелые хвосты». В результате этого предположения нарушается условие конечной дисперсии скачков, при котором ветвящиеся случайные блуждания изучались ранее, и процесс может быть невозвратным даже на решетках низких размерностей ($d = 1, 2$). Установлены условия невозвратности для ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}^d$, а также предельные теоремы для численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке.

1 Введение

Одним из вкладов П. Л. Чебышева в теорию вероятностей явилось создание нового подхода к доказательству предельных теорем теории вероятностей — метода моментов. Применение этого метода при доказательстве ряда предельных теорем из современных разделов теории случайных процессов, таких как, например, ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) [4, глава 4], остается актуальным до сих пор. В настоящей работе исследуются ВСБ по $\mathbf{Z}^d$ с одним источником размножения и гибели частиц. Предполагается, что переходные интенсивности случайного блуждания, лежащего в основе ВСБ, имеют «тяжелые хвосты». В результате этого предположения нарушается условие конечной дисперсии скачков, при котором ВСБ изучались ранее. В дальнейшем для краткости такие ВСБ будут называться ВСБ с тяжелыми хвостами.

В последние годы случайные блуждания (без ветвления) с бесконечной дисперсией скачков привлекали внимание многих исследователей. Среди недавних публикаций отметим книгу [1], содержащую достаточно полную библиографию на эту тему.

Симметричные ВСБ с одним источником ветвления изучались, например, в [2, 3, 4]. В этих работах эволюция средних численностей частиц в произвольном узле решетки определяется структурой спектра линейного оператора $H = A+\beta\Delta_0$, где генератор случайного блуждания $A = (a(z))$, $z \in \mathbf{Z}^d$, является ограниченным самосопряженным оператором в $l^2(\mathbf{Z}^d)$, а оператор Δ_0 задается равенством $\Delta_0 = \delta_0\delta_0^T$, в котором через $\delta_0 = \delta_0(\cdot)$ обозначается вектор-столбец на $\mathbf{Z}^d$, принимающий единичное значение в начале координат, и нули в остальных точках. Параметр β характеризует интенсивность источника (см., например, [2, 3, 4]). Одним из принципиальных предположений в этих и последующих работах

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10-01-00266.

[2]Яровая Елена Борисовна, yarovaya@mech.math.msu.su, доцент кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

было условие конечной дисперсии скачков случайного блуждания, которое в терминах функции $a(\cdot)$ выражается в виде неравенства $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}|z|^2a(z)<\infty$. При выполнении этого условия ВСБ является возвратным на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$, но теряет это свойство на $\mathbf{Z}^d$ при $d\geq 3$.

В работах [2, 3, 4] установлено, что при $d\geq 3$ существует такое пороговое значение интенсивности источника $\beta_c>0$ при превышении которого $(\beta>\beta_c)$ численности частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке растут экспоненциально. В то же время при $\beta\leq\beta_c$ такого экспоненциального роста численностей частиц не бывает. С этой точки зрения число β_c может рассматриваться как критическое значение. Случай, когда $d=1,2$, существенно отличается от случая старших размерностей тем, что при $d=1,2$ для порогового значения интенсивности источника справедливо равенство $\beta_c=0$, и экспоненциальный рост численностей частиц наблюдается при всех $\beta>0$.

При формулировке и доказательстве этих результатов в [4] отправной точкой служит соотношение $\beta_c=G_0^{-1}$, где G_λ — преобразование Лапласа вероятности возвращения блуждания в исходную точку при $\lambda\geq 0$.

В [2, 3, 4] и последующих работах при $d\geq 3$ неравенство $G_0<\infty$ (или, что равносильно, $\beta_c>0$) вытекало из условия $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}|z|^2a(z)<\infty$. Цель статьи — ослабить это предположение и получить новые условия, при которых значение G_0 будет конечно, что, в свою очередь, позволит пересмотреть результаты предыдущих исследований (цит. выше) в новой ситуации. Подчеркнем, что эта цель достигается при рассмотрении ВСБ с тяжелыми хвостами, т.е., когда выполняется соотношение $a(z)\approx z^{-(d+\alpha)}$, $\alpha\in(0,2)$. Из этого соотношения вытекает, что дисперсия скачков может стать бесконечной, а соответствующее случайное блуждание — невозвратным даже на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$.

Отметим, что различие между ВСБ с конечной дисперсией скачков и ВСБ с тяжелыми хвостами особенно наглядно для процессов чистого размножения в источнике. Отсутствие гибели в таких ВСБ влечет выполнение неравенства $\beta>0$, поэтому в ВСБ по $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$ с конечной дисперсией скачков возможен только экспоненциальный рост численностей частиц при всех значениях β (критический и докритический случаи отсутствуют), в то время как для ВСБ с тяжелыми хвостами экспоненциальный рост происходит лишь при преодолении порогового значения $\beta>\beta_c=G_0^{-1}>0$.

Структура работы следующая. В разделе 2, приводятся общие факты об операторе A, генерирующем случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$. Здесь не используются никакие предположения о дисперсии скачков. В разделе 3 напоминаются результаты о случайном блуждании с конечной дисперсией скачков из [2, 3, 4], в связи с тем, что свойства оператора A формулируются в терминах преобразования Фурье, а этот подход применяется и в дальнейшем. В разделе 4 вводится случайное блуждание с тяжелыми хвостами. Теорема 4.2 может быть рассмотрена как основной результат: лежащее в основе ВСБ случайное блуждание может быть невозвратным для решеток низких размерностей, в частности, для $\mathbf{Z}$, если $\alpha\in(0,1)$, и для $\mathbf{Z}^2$, если $\alpha\in(0,2)$. В разделе 5 вводится модель ВСБ с тяжелыми хвостами и устанавливаются необходимые и достаточные условия экспоненциального роста численностей частиц, как в произвольной точке, так и на всей решетке.

2 Генератор A случайного блуждания

Рассмотрим действительную функцию $a(\cdot)\in l^1(\mathbf{Z}^d)$. Для нее имеют место равенства

$$\sum_{z}|a(z-z')|=\sum_{z'}|a(z-z')|=c,$$

где $c = \|a\|_{l^1} := \sum_{z\in\mathbf{Z}^d} |a(z)|$, и поэтому по лемме Шура (см., например, [6]) выражение

$$(Au)(z) := \sum_{z'\in\mathbf{Z}^d} a(z-z')u(z') \tag{1}$$

определяет для каждого $p \in [1,\infty]$ линейный ограниченный оператор

$$A : l^p(\mathbf{Z}^d) \to l^p(\mathbf{Z}^d),$$

для которого

$$\|A\|_{l^p} \le c.$$

Предположим что

A1: $a(z) \ge 0$, если $z \ne 0$ и $a(0) = -\sum_{z\ne 0} a(z) \le 0$.

В этом случае оператор A может быть переписан в виде

$$(Au)(z) - a(0)u(z) = \sum_{z'\in\mathbf{Z}^d, z'\ne z} a(z-z')u(z'),$$

и, используя соотношения $\sum_{z\ne z'} |a(z-z')| = \sum_{z'\ne z} |a(z-z')| = |a(0)|$, в силу леммы Шура [6] получаем оценку

$$\|A - a(0)I\|_{l_p} \le |a(0)|, \quad \forall\, p \in [1,\infty]. \tag{2}$$

Отсюда для спектра $\sigma_p(A)$ оператора $A : l^p(\mathbf{Z}^d) \to l^p(\mathbf{Z}^d)$ вытекает включение

$$\sigma_p(A) \subseteq \{z \in \mathbf{C} : |z - a(0)| \le |a(0)|\}, \quad p \in [1,\infty]. \tag{3}$$

Более того, если предположить, что

A2: $a(z) = a(-z)$ для каждого $z \in \mathbf{Z}^d$,

то ядро оператора A становится симметричным. Поэтому при выполнении условия A2 оператор A оказывается самосопряженным в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbf{Z}^d)$, и его спектр лежит на вещественной прямой. С учетом (3) отсюда вытекает, что

$$\sigma_2(A) \subseteq [2a(0), 0]. \tag{4}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Пусть для действительной функции $a(\cdot) \in l^1(\mathbf{Z}^d)$ выполнено условие A1. Тогда выражение* (1) *определяет для каждого $p \in [1,\infty]$ линейный ограниченный оператор $A : l^p(\mathbf{Z}^d) \to l^p(\mathbf{Z}^d)$, удовлетворяющий соотношениям* (2) *и* (3). *Более того, если условие A2 выполнено, то оператор A является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbf{Z}^d)$, и его спектр $\sigma_2(A)$ удовлетворяет включению* (4).

Сформулируем некоторые дополнительные свойства оператора A в терминах преобразования Фурье функции $a(\cdot)$. Определим функцию $\phi(\theta)$ как

$$\phi(\theta) = \sum_{z\in\mathbf{Z}^d} a(z)e^{i\langle z,\theta\rangle}, \quad \theta \in [-\pi,\pi]^d, \tag{5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на $\mathbf{Z}^d$.

В силу условия А2 функция $\phi(\cdot)$ может быть представлена в виде

$$\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^d} a(z) \cos\langle z, \theta \rangle, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

и, следовательно, является вещественнозначной функцией. Так как условие А1 выполнено, то

$$\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} a(z) \left(\cos\langle z, \theta \rangle - 1\right) \leq 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d. \tag{6}$$

Отсюда следует, что если $\phi(0) = 0$, тогда $z = 0$ является локальным максимумом функции $\phi(\cdot)$.

Определение 1. Функция $a(\cdot)$ называется *неприводимой*, если для каждого $z \in \mathbf{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbf{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Наложим еще одно ограничение на функцию $a(\cdot)$.

А3: функция $a(\cdot)$ неприводима.

Теперь рассмотрим случайное блуждание X_t, $t \geq 0$, где X_t — положение частицы на $\mathbf{Z}^d$ в момент времени t. Генератор A случайного блуждания X_t определяется формулой (1) и удовлетворяет условиям А1–А3. Вероятность $p(h, x, y)$ того, что частица, находящаяся в точке $x \neq 0$ за малое время h прыгнет в произвольную точку решетки y удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} p(h, x, y) &= a(x, y)h + o(h) = a(y - x)h + o(h) \quad \text{for} \quad y \neq x, \\ p(h, x, x) &= 1 + a(x, x)h + o(h) = 1 + a(0)h + o(h). \end{aligned}$$

Как показано, например, в [4], переходные вероятности случайного блуждания $p(t, x, y)$ в этом случае удовлетворяют системе обратных уравнений Колмогорова

$$\partial_t p(t, x, y) = Ap(t, x, y), \quad p(t, x, y) = \delta_y(x). \tag{7}$$

Пусть

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; x, y) dt, \quad \lambda > 0. \tag{8}$$

В силу условия А1 ряд $\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} p(t, x, y)$ абсолютно сходится при каждых t и y (см., например, [4]). Таким образом, к уравнению (7) можно применить дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{p}(t, \theta, y) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} p(t, x, y) e^{i(x, \theta)}.$$

В этом случае уравнение (7) принимает вид

$$\partial_t \tilde{p}(t, \theta, y) = \phi(\theta) \tilde{p}(t, \theta, y), \quad \tilde{p}(0, \theta, y) = e^{i(\theta, y)}.$$

Следовательно, $\tilde{p}(t, \theta, y) = e^{\phi(\theta)t} e^{i(\theta, y)}$, и применение обратного преобразования Фурье к последнему уравнению при $t \geq 0$ приводит к равенству

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi, \pi]^d} e^{\phi(\theta)t + i(\theta, y - x)}\, d\theta, \quad x, y \in \mathbf{Z}^d.$$

Отсюда получается иное представление для функции Грина случайного блуждания (8):

$$G_\lambda(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{e^{i(\theta,\,y-x)}}{\lambda-\phi(\theta)}\,d\theta,\quad x,y\in\mathbf{Z}^d,\quad \lambda\ge 0. \tag{9}$$

Положим $G_0=G_0(0,0)$.

Определение 2. Случайное блуждание X_t, $t\ge 0$, будем называть невозвратным (транзиентным), если для функции Грина выполнено соотношение $G_0<\infty$, и возвратным, если $G_0=\infty$.

3 Случайное блуждание с конечной дисперсией скачков

В этом разделе рассматривается функция $a(\cdot)$ при более сильном предположении

A4: $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}|z|^2a(z)<\infty$.

В этом случае, очевидно, $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}|a(z)|<\infty$. Из условия A4 вытекает, что дисперсия скачков случайного блуждания конечна.

В следующей теореме утверждается, что неприводимая функция $\phi(\theta)$ при выполнении условий A1–A4 имеет в точке $\theta=0$ невырожденный глобальный максимум.

Теорема 3.1. *Если для действительной функции $a(\cdot)$ выполнены условия A1–A4, то функция $\phi(\cdot)$ корректно определена, дважды непрерывно дифференцируема и*

$$\phi(\theta)\le-\gamma|\theta|^2,\quad \theta\in[-\pi,\pi]^d,$$

для некоторого $\gamma>0$.

Доказательство теоремы 3.1 может быть найдено в [4, лемма 2.1.2]. Из этой теоремы вытекает, в частности, что в окрестности точки $\theta=0$ функция $\phi(\theta)$ представляется как

$$\phi(\theta)=\frac{\langle\varphi''_{\theta\theta}(0)\theta,\theta\rangle}{2}+o(|\theta|^2),$$

где якобиан $\varphi''_{\theta\theta}(0)$ невырожден, т.е.

$$|\langle\varphi''_{\theta\theta}(0)\theta,\theta\rangle|\ge\gamma|\theta|^2,\quad \gamma>0.$$

Для переходных вероятностей при каждом $d\ge 1$ и каждых $x,y\in\mathbf{Z}^d$ справедливо асимптотическое представление

$$p(t;x,y)\sim\frac{\gamma_d}{t^{\frac{d}{2}}}\quad\text{as}\quad t\to\infty, \tag{10}$$

где $\gamma_d=((2\pi)^dD_d)^{-\frac12}$ с $D_d=|\det\phi''_{\theta\theta}(0)|$ (см., напр., доказательство для дискретного времени в [5] и для непрерывного — в [4]).

Следующее известное утверждение для случайного блуждания с конечной дисперсией скачков [5] является непосредственным следствием соотношений (8) и (10).

Теорема 3.2. *Пусть случайное блуждание $X=(X_t)_{t\ge0}$ по $\mathbf{Z}^d$ задается генератором A, для которого выполнены условия A1–A4. Тогда переходные вероятности $p(t;x,y)$ удовлетворяют асимптотическому равенству* (7)*, а случайное блуждание X невозвратно при $d\ge 3$ и возвратно при $d=1,2$.*

4 Случайное блуждание с тяжелыми хвостами

Пусть дана непрерывная положительная функция $H : [-\pi, \pi]^d \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условию симметрии

$$H(x) = H(-x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]^d, \tag{11}$$

и оценкам

$$0 < H_0 \le H(x) \le H^0, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]^d, \tag{12}$$

с некоторыми константами H_0 и H^0. В настоящем разделе будет предполагаться, что для неприводимой функции $a(\cdot)$ выполняется дополнительное условие:

A5: $a(z) = \frac{H\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{d+\alpha}}$, где $\alpha \in (0, 2)$, $z \in \mathbf{Z}^d$ и $z \neq 0$.

Как известно (см., например, [7, пример 4.642]),

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} \frac{1}{|z|^\nu} < \infty \Longleftrightarrow \nu > d.$$

Поэтому в силу (12)

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} a(z) < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 0.$$

Теперь, если определить значение $a(0)$ как

$$a(0) = -\sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} a(z) \le 0,$$

то $a(\cdot)$ будет удовлетворять условию A1.

В силу (11) для функции $a(\cdot)$ выполняется также условие A2. В то же время рассматриваемое в предыдущем разделе условие A4 уже не выполняется для функции $a(\cdot)$ при $0 < \alpha < 2$. Итак, доказана следующая лемма:

Лемма 4.1. *Если неприводимая функция $a(z)$ удовлетворяет условию A5, то для нее справедливы условия A1 и A2, но при этом условие A4 не выполняется:*

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} |z|^2 a(z) = \infty.$$

Рассмотрим преобразование Фурье (5) функции $a(\cdot)$. В силу условий A1, A2 и A5 функция $a(\cdot)$ абсолютно суммируема на $\mathbf{Z}^d$. Так как величины $e^{i\langle z, \theta\rangle}$ равномерно ограничены для всех действительных векторов z и θ, то преобразование Фурье $\phi(\theta)$ функции $a(\cdot)$ корректно определено и непрерывно на d-мерном кубе $[-\pi, \pi]^d$. Таким образом, доказана

Лемма 4.2. *Если для скалярной функции $a(z)$ выполняется условие A5, то ее преобразование Фурье $\phi(\theta)$ корректно определено, непрерывно на d-мерном кубе $[-\pi, \pi]^d$ и принимает действительные значения. Более того, для $\phi(\theta)$ справедливо представление* (6).

В частности, при выполнении условия A5 преобразование Фурье $\phi(\theta)$ функции $a(\cdot)$ имеет вид

$$\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^d, z \neq 0} H\left(\frac{z}{|z|}\right) |z|^{-(d+\alpha)} \left(\cos\langle z, \theta\rangle - 1\right), \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d. \tag{13}$$

Теорема 4.1. *Если $\alpha \in (0,2)$ и для неприводимой функции $a(\cdot)$ выполнено условие A5, то для преобразования Фурье $\phi(\theta)$ функции $a(\cdot)$ справедлива оценка*

$$\phi(\theta) \le -C|\theta|^{\alpha}, \quad \theta \in [-\pi,\pi]^d,$$

где C некоторая положительная константа.

Доказательство теоремы 4.1 основано на равенстве (13) и на теоремах о порядке роста функций, представляемых рядами Фурье с монотонными коэффициентами [9, том I, глава 5, теорема 2.6].

Теорема 4.2. *Пусть $X = (X_t)_{t\ge 0}$ — случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$ с генератором A. Если для неприводимой функции $a(\cdot)$ справедливо условие A5, то переходные вероятности $p(t;x,y)$ удовлетворяют уравнению (7). Кроме того, случайное блуждание X невозвратно при $d=1$ для каждого $0<\alpha<1$ и при $d\ge 2$ для каждого $0<\alpha<2$.*

Доказательство. Положим $p(t) = p(t;0,0)$. Тогда в силу (9) по теореме 4.1 имеют место соотношения

$$G_0 = \int_0^\infty p(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{d\theta}{(-\phi(\theta))} \le \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{d\theta}{C|\theta|^{\alpha}}, \quad C>0.$$

Здесь интеграл справа сходится при $\alpha < d$, откуда следует утверждение теоремы 4.2. $\square$

5 Ветвящееся случайное блуждание с тяжелыми хвостами

В этом разделе рассматривается ВСБ с генератором случайного блуждания A и одним источником ветвления частиц, расположенном в начале координат. Ветвление в источнике задается инфинитезимальной производящей функцией $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$, где $b_n \ge 0$ для $n \ne 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$, для которой предполагается, что $\beta_r = f^{(r)}(1) < \infty$, $r \in \mathbf{N}$, $\beta = \beta_1 = f'(1)$, где через $f^{(r)}$ обозначается r-ая производная функции f.

Пусть $\mu_t(y)$ — число частиц в момент времени t в точке y, тогда условие, что в начальный момент времени $t=0$ система состоит из одной частицы, находящейся в точке x, равносильно $\mu_0(y) = \delta_y(x)$. При этом общее число частиц на решетке определяется равенством $\mu_t = \sum_{y\in\mathbf{Z}^d}\mu_t(y)$. Таким образом, если в момент времени t в точке $x_0 = 0$ находилось $\mu_t(0) > 0$ частиц, то каждая из частиц, находящихся в точке $x_0 = 0$, может за малое время h либо перейти с вероятностью $p(h;0,y) = a(y)h + o(h)$ в точку $y \ne 0$; либо произвести потомство из $n \ne 1$ частиц (считая, что и сама частица входит в это число); либо погибнуть (случай, когда $n=0$) с вероятностью $p_*(h;n) = b_n h + o(h)$; либо сохраниться (никаких изменений не происходит) с вероятностью $1 - \sum_{y\ne 0} a(y)h - \sum_{n\ne 1} b_n h + o(h)$. Повторяя без каких-либо изменений рассуждения из [8], получаем, что время, проведенное частицей в источнике, экспоненциально распределено с параметром $-(a(0)+b_1)$.

Как показано в [2, 3, 4], численности частиц в произвольной точке решетки, также как и общее число частиц на всей решетке, растут экспоненциально тогда и только тогда

$$\beta > \beta_c = G_0^{-1}. \tag{14}$$

В этом смысле значение β_c естественно назвать *критическим*. Оказалось, что тот же самый результат справедлив для ВСБ с тяжелыми хвостами. Определим оператор H как

$$H := A + \beta\Delta_0. \tag{15}$$

Как было доказано в [10], оператор H, также как и оператор A, действует в каждом из пространств $l^p(\mathbf{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Однако для простоты в следующей теореме рассматривается случай $p = 2$.

Теорема 5.1. *Пусть оператор H определяется соотношением* (15)*, где генератор A удовлетворяет условиям A1–A3 и A5. Тогда*

(i) спектр оператора $H : l^2(\mathbf{Z}^d) \to l^2(\mathbf{Z}^d)$ расположен на вещественной прямой и все его положительные точки спектра (если таковые существуют) являются изолированными собственными значениями;

(ii) оператор H имеет по крайней мере одно положительное собственной значение тогда и только тогда, когда выполняется условие (14)*;*

(iii) если выполняется условие (14)*, то оператор H имеет единственное положительное собственное значение.*

Автор благодарен профессору С.А. Молчанову за полезные идеи и дискуссии.

Список литературы

[1] *Borovkov A., Borovkov K.*, Asymptotic Analysis of Random Walks. Heavy-Tailed Distributions, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] *Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // C. R. Acad. Sci., 1998, Paris. Sér. I., v. 326, № 9, p. 975–980.

[3] *Богачев Л. В., Яровая Е. Б.*, Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником // ДАН, 1998, т. 363, № 4, с. 439–442.

[4] *Яровая Е. Б.*, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, 2007.

[5] *Спицер Ф.*, Принципы случайного блуждания. М: Мир, 1969.

[6] *Шубин М. А.*, Псевдоразностные операторы и их функция Грина // Известия АН СССР, сер. матем., 1985, т. 49, № 3, с. 652–671.

[7] *Gradshteyn I., Ryzhik I.*, Table of Integrals, Series, and Products, 5th ed., Academic Press, Inc., 1994.

[8] *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

[9] *Zygmund A.*, Trygonometric Series. Vol. I, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[10] *Яровая Е. Б.* Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, № 4, с. 705–731.

РАЗДЕЛ 2

Теория функций и функциональный анализ

П.Л.Чебышев и теория функций

П.Л.Чебышев является создателем теории наилучшего приближения функций. В своем сочинении «Черчение географических карт» 1856 года он пишет, что «большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, совершенно новым для науки, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного».

Ещё в 1853 году в работе «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» П.Л.Чебышев поставил знаменитую задачу о полиномах данной степени, наименее уклоняющихся от данной функции в данном промежутке изменения аргумента. В этой и других работах он решает эту задачу как в общем случае, так и во многих частных случаях. Он показал, что решением ряда таких задач являются многочлены, известные ныне как многочлены Чебышева. Многочлены Чебышева играют важную роль в теории и в практических вопросах аппроксимации функций.

Большое применение на практике находит также знаменитый чебышевский альтернанс. Еще при жизни П.Л.Чебышева вышли в свет работы его выдающихся учеников Е.И.Золотарева, А.Н.Коркина, А.А.Маркова, В.А.Маркова, представляющие важный вклад в развиваемую им теорию функций, наименее уклоняющихся от нуля. Она приобрела такой вид, что стала предметом преподавания во всем мире.

П.Л.Чебышев заложил основы общей теории ортогональных многочленов. В 1855 он опубликовал статью «О непрерывных дробях», которая явилась началом целого ряда работ, посвященных построению общей теории ортогональных многочленов, а также введению некоторых важных ортогональных систем. П.Л.Чебышев получил новые свойства разложений в ряды, связанные с непрерывными дробями, и дал важнейшие применения общих результатов к теории механических квадратур и предельных величин интегралов, что позднее было включено в классическую проблему моментов. Эти исследования были затем продолжены его знаменитыми учениками А.А.Марковым, К.А.Поссе, Н.Я.Сониным и др.

П.Л.Чебышев является создателем интерполяционного метода Чебышева, обладающего большим преимуществом по сравнению с другими интерполяционными методами. Ряд работ П.Л.Чебышева был посвящен вопросам интегрируемости функций, квадратурным формулам, приближенному интегрированию и т.д. В этом направлении хорошо известно интегральное неравенство Чебышева.

Результаты П.Л.Чебышева высоко оцениваются во всем мире. Например, известный шведский ученый Миттаг-Леффлер считал Чебышева «одним из величайших учителей анализа всех времён», «гением, обогатившим математические науки своими бессмертными открытиями».

Может ли стабилизатор быть восьмимерным?[1]

Белошапка В.К.[2]

В работе обсуждается следующий вопрос. Какие значения может принимать размерность стабилизатора точки в алгебре Ли инфинитезимальных голоморфных симметрий произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности пространства $\mathbf{C^2}$? Для ответа на этот вопрос основную трудность представляют ростки бесконечного типа по Кону, сферические в точке общего положения. Полностью разобран пример гиперповерхностей вида $\Gamma(r) = \{v = ur(|z|^2)\}$. Размерности алгебры Ли и ее стабилизатора при этом могут принимать следующие значения (5,5), (4,2), (3,3) и (2,2). Все четыре класса описаны явно, первые три заданы элементарными функциями, в описании этих классов участвует рациональная функция $Q_n(t) = \mathrm{tg}(n \,\mathrm{arctg}(t))$, аналогичная знаменитому многочлену Чебышева.

1 Введение

Если Γ_ξ — абсолютно произвольный росток вещественно аналитической гиперповерхности Γ двумерного комплексного пространства $\mathbf{C^2}$ с координатами $(z, w = u + iv)$ в точке ξ, а $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ — алгебра Ли ростков векторных полей в точке ξ, порождающих голоморфные пребразования Γ_ξ, то имеет место простая альтернатива. Либо размерность $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ равна бесконечности и при этом росток биголоморфно эквивалентен ростку вещественной гиперплоскости $\{v = 0\}$, либо эта размерность не превосходит **восьми**, причем равенство означает, что в точках Леви-невырожденности гиперповерхность Γ сферична, т.е. локально эквивалентна ростку сферы $S = \{|z|^2 + |w^2| = 1\}$. Доказательство очень просто. Если росток — это росток гиперповерхности, Леви-вырожденной во всех своих точках, то такой росток, как известно, эквивалентен ростку гиперплоскости. Если же это не так, то, рассмотрев любые девять полей из $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ в точке Леви-невырожденности, мы убеждаемся, что они линейно зависимы. Это следует из любой версии Леви-невырожденной теории вплоть до работы Пуанкаре 1907-го года ([1], [2]). Оттуда же, при наличии восьми линейно независимых полей, следует сферичность. В алгебре Ли инфинитезимальных автоморфизмов $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ имеется стабилизатор - подалгебра Ли $\mathrm{aut}_\xi\,\Gamma_\xi$, состоящая из ростков полей, обращающихся в ноль в точке ξ. Это поля, порождающие преобразования, оставляющме ξ на месте. Итак, мы знаем, что для любого не плоского, т.е. не эквивалентного гиперплоскости, ростка размерность полной алгебры Ли $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ не превосходит восьми, причем восьмерка может реализоваться только для гиперповерхностей, сферических в точках Леви-невырожденности. При этом сфера однородна и размерность стабилизатора точки равна **пяти**.

[1]Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ № 11-01-00495-а и № 11-01-12033-офи-м-2011.

[2]Белошапка Валерий Константинович, vkb@strogino.ru, профессор кафедры теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

А что можно сказать о размерности стабилизатора $\mathrm{aut}_\xi \Gamma_\xi$ *для ростка произвольной не плоской гиперповерхности?*

Конечно, можно сразу сказать, что эта размерность не превосходит восьми, т.к. это подалгебра полной алгебры Ли автоморфизмов. Но при этом, по-видимому, ростков со стабилизаторами размерностей 6, 7 или 8 никто никогда не видел.

В соответствии с работой Черна и Мозера ([2]) локальное уравнение вещественной гиперповерхности в точке Леви-невырожденности можно записать в виде

$$v = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(hz^4\bar{z}^2) + \dots,$$

где многоточие обозначает члены степени семь и выше по переменным $(z, \bar{z}, u)$. Если $h = 0$, то начало координат называется омбилической точкой гиперповерхности. В той же работе было показано, что если гиперповерхность омбилична каждой точке окрестности, то она сферична (эквивалентна ростку сферы). Таким образом, если гиперповерхность несферична в своих Леви-невырожденных точках, то множество ее неомбилических точек — открытое плотное множество (дополнение к собственному вещественно аналитическому подмножеству). Если точка неомбилична, то дополнительные рассмотрения компонент отображения, привязанные к младшему ненулевому члену уравнения, т.е. к члену $2\,\mathrm{Re}(hz^4\bar{z}^2)$ позволяют утверждать, что имеется не более двух голоморфных симметрий (включая тождественное отображение) гиперповерхности, сохраняющих ноль на месте ([4]). В частности, размерность стабилизатора равна нулю. Тем самым для гиперповерхности, несферичной в точке общего положения, оценка размерности полной группы падает до трех. Если у такой гиперповерхности действительно имеется трехмерная алгебра Ли, то в точке общего положения, а именно, там, где три базисных поля линейно независимы, поверхность является локально однородной и, тем самым, попадает в известный список Э.Картана ([3]). Итак, еще раз.

Если росток гиперповерхности имеет стабилизатор размерности пять или более, то либо росток сферичен (в невырожденном случае), либо представляющая его гиперповерхность сферична в точках невырожденности.

Эта формулировка очень похожа на утверждение о полной алгебре Ли. Однако есть отличие. Мы так и не узнали о невозможности (или возможности) реализации размерностей стабилизатора 6, 7 и 8. В частности, остался открытым такой вопрос. Верно ли, что 5-мерный стабилизатор есть только у сферы? Ответ на этот, второй, вопрос будет получен ниже. Или даже так: верно ли, что если полная алгебра 8-мерна, то росток сферичен?

Пусть, далее, росток гиперповерхности имеет конечный тип по Кону. Это означает, что она не содержит одномерной комплексной кривой, проходящей через центр ростка. Уравнение гиперповерхности конечного типа можно записать в виде

$$\Gamma = \{v = \Phi_m(z, \bar{z}) + \dots\},$$

где Φ_m — ненулевой однородный многочлен от $(z, \bar{z}$ степени $m \geq 2$ без гармонической компоненты $2\,\mathrm{Re}(pz^m)$ (эту компоненту всегда можно убрать простой заменой), а многоточие обозначает члены веса выше, чем m. При этом при подсчете веса монома переменные z и $\bar{z}$ идут с весом 1, а u — с весом m. Отметим, что если $m = 2$, то речь идет о Леви-невырожденной гиперповерхности, поэтому интерес представляют вырожденные гиперповерхности с $m > 2$. Однако, несмотря на вырожденность, к такому ростку применима стандартная техника модельных поверхностей, где в качестве модельной используется гиперповерхность $Q = \{v = \Phi_m(z, \bar{z})\}$. В результате мы получаем, что стабилизатор $\mathrm{aut}_\xi \Gamma_\xi$

имеет естественное точное представление в стабилизаторе начала координат модельной поверхности $\mathrm{aut}_0\, Q_0$. Таким образом вопрос о возможных размерностях стабилизатора сводится к вопросу о вычислении алгебры $\mathrm{aut}_0\, Q_0$. Это несложное вычисление было проделано в 1996-м году в студенческой курсовой работе А.Ершовой ([5]). Вычисление показывает, что стабилизатор Леви-вырожденного ростка конечного типа не может быть больше трех. Максимум, т.е. тройка, достигается на гиперповерхностях вида

$$S_m = \{v = |z|^{2m}\}.$$

Этот результат содержится также в работе М.Коллара 2005-го года ([6]). Итак, ростки, которые не охвачены приведенным выше простым рассуждением — это ростки бесконечного типа, причем такие, что представляющие их гиперповерхности сферичны в своих Леви-невырожденных точках. Отметим, что отмеченные выше экстремальные для конечного типа гиперповерхности S_m также сферичны вне вещественной прямой $\{z = 0, v = 0\}$, на которой вырождается форма Леви. Это следует из того, что S_m — это образ сферической гиперповерхности S_1 при отображении $(z \to z^m, \quad w \to w)$. Вне прямой $\{z = 0\}$ отображение локально обратимо.

2 Автоморфизмы гиперповерхности вида $\mathbf{v} = \mathbf{ur}(|\mathbf{z}|^2)$.

Уравнение ростка бесконечного типа можно записать в виде $v = uF(z, \bar{z}, u)$. В этом пункте дается полное опиисание строения алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов гиперповерхностей бесконечного типа следующего специального вида, а именно

$$\Gamma(r) = \{v = ur(|z|^2)\} \tag{1}$$

Любая такая гиперповерхность имеет в своем стабилизаторе два поля

$$X_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(iz\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{и} \quad X_2 = 2\,\mathrm{Re}\left(w\frac{\partial}{\partial w}\right), \tag{2}$$

которым соответствуют две однопараметрические подгруппы:

$$(z \to e^{it_1} z, \quad w \to w) \quad \text{и} \quad (z \to z, \quad w \to t_2 w).$$

Эти коммутирующие поля образуют подалгебру в $\mathrm{aut}_0\, \Gamma(r)_0$. Наша цель выяснить, для каких вещественно аналитических функций $r(t)$ гиперповерхность $\Gamma(r)$ допускает какие либо еще поля, кроме этих двух.

Гиперповерхность эквивалентна гиперплоскости в том и только том случае, когда $r = const$. В этом случае алгебра Ли бесконечномерна. Проверку невырожденности вне прямой $w = 0$ удобно проводить следующим образом. Запишем наше уравнение в виде

$$\mathrm{Im} \ln w = \mathrm{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) = \mathrm{arctg}(r(|z|^2)),$$

тогда после замены $(z \to z, \quad w \to \ln w)$ уравнение принимает вид $v = \mathrm{arctg}(r(|z|^2) = \phi(|z|^2)$. На этот прием, в свое время, любезно обратил мое внимание А.В.Лобода. После чего нетрудно показать, что определитель Леви, после замены $|z|^2 = t$, оказывается пропорционален выражению $t\phi''(t) + \phi'(t)$. Приравнивая его к нулю и решая получившееся дифференциальное уравнение, мы видим, что неособыми в нуле решениями являются только постоянные, а это означает постоянство и функции $r(t) = \operatorname{tg}(\phi(t))$.

Будем далее предполагать, что $r(t)$ не постоянна. Можно также предполагать, что $r(0) = 0$. Действительно, уравнение $v = u(r_0 + r(|z|^2))$ запишем как $\operatorname{Im}((1 - ir_0)w) = ur(|z|^2)$. Тогда после замены $w \to (1 - ir_0)w$ уравнение принимает вид

$$v = u\tilde{r}(|z|^2) = u\frac{r(|z|^2)}{1 + |r_0|^2 + r_0 r(|z|^2)}.$$

При этом если $r(t) = r_s t^s + \dots$, то разложение $\tilde{r}$ имеет вид

$$\tilde{r}(t) = \frac{r_s}{1 + |r_0|^2} t^s + \dots$$

Предположим сначала, что $r(t)$ имеет при $t = 0$ ноль первого порядка, тогда после замены $z \to \sqrt{|r'(0)|z}$ функция принимает вид $r(t) = \sigma t + \dots$, где $\sigma = \pm 1$. Однако будет удобнее считать, что уравнение гиперповерхности записано в виде

$$\Gamma(r) = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}, \tag{3}$$

а функция $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = t + \frac{r_2}{2!}t^2 + \frac{r_3}{3!}t^3 + \dots,$$

т.е. $r'(0) = 1$. Условие, что поле

$$2\operatorname{Re}\left(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

принадлежит $\operatorname{aut}\Gamma_0$, т.е. условие касания поля гиперповерхности выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (i + r(\sigma|z|^2)g(z,w) + (-i + r(\sigma|z|^2)\bar{g}(\bar{z},\bar{w}) + \\ 2\sigma r'(\sigma|z|^2)u(\bar{z}f(z,w) + z\bar{f}(\bar{z},\bar{w})) = 0 \\ \text{при} \quad w = u(1 + ir(\sigma|z|^2)). \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что $g(0,0) = 0$. Подставляя в (4) значение $\bar{z} = 0$ и вводя обозначения $f(0,u) = a(u)$, $g(0,u) = ub(u)$, получаем

$$g(z,w) = wb(w) + 2i\sigma w\bar{a}(w)z,$$

причем $\operatorname{Im} b(u) = 0$. Обозначая $f'_z(0,u) = c(u)$, дифференцируя (4) по $\bar{z}$ и опять подствляя $\bar{z} = 0$ получаем

$$f(z,w) = a(w) + c(w)z + \sigma(2iw\bar{a}'(w) - r_2\bar{a}(w))z^2.$$

Равенство нулю коэффициентов (4) при $|z|^2$ и $|z|^4$ позволяет заключить, что

$$c(w) = \frac{wb'(w)}{2} + i\frac{r_2 b(w)}{4} + iC.$$

Вещественную константу C можно в дальнейшем положить равной нулю, т.к. ей, при равенстве нулю a и b, соответствует поле X_1. Теперь сделаем два замечания.

Первое. Подставляя в (4) полученные нами выражения для f и g, заметим, что в разложении (4) по бистепеням мономов $z^m\bar{z}^n$ отличны от нуля лишь главная диагональ, т.е. мономы бистепеней (m, m), и побочные диагонали $(m, m+1)$ и$(m+1, m)$. При этом главная диагональ зависит только от функции b, а побочные — только от функции a. Это означает, что условия на a и b независимы.

Второе. Наличие у гиперповерхности автоморфизма $w \to tw$, с любым вещественным t, приводит к тому, что если $a(w) = \sum a_j w^j$ или $b(w) = \sum b_j w^j$ — решения уравнения (4), то каждое слагаемое этих сумм — тоже. Таким образом задача сводится к поиску a-решений вида $(a(w) = Aw^m, b = 0)$ и b-решений $(a = 0, b(w) = Bw^n)$.

Ищем сначала b-решения. Поскольку B — ненулевая вещественная константа, то можно положить $B = 1$. Соответствующее поле имеет вид

$$X_b(r_2, n) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2n + ir_2}{4} zw^n \frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Положим

$$R = 1 + ir(|z|^2), \quad \phi = \arg R = \operatorname{arctg} r, \quad \text{тогда} \quad |R|^2 = 1 + r^2, \quad r = \operatorname{tg}\phi.$$

Теперь условие (4) после деления на u^{n+1} принимает вид

$$\mathrm{Re}\left(i\bar{R}R^{n+1} + 2r'(\sigma|z|^2)\sigma|z|^2\frac{2n + ir_2}{4}R^n\right) = 0$$

После замены $\sigma|z|^2$ на независимую вещественную переменную t получаем

$$(1 + r(t)^2)\sin(n\phi(t)) = r'(t)t(n\cos(n\phi(t)) - \frac{r_2}{2}\sin(n\phi(t))). \tag{5}$$

При $n = 0$ условие (5) исчезает, но получающееся поле — это комбинация двух полей вида (2), поэтому далее полагаем, что $n > 0$. Теперь (5) можно записать так

$$\frac{r'(t)t}{(1 + r(t)^2)} = \frac{1}{n - \frac{r_2}{2}\operatorname{ctg}(n \operatorname{arctg} t)} \tag{6}$$

Заметим здесь, что фигурирующее в правой части выражение $\operatorname{tg}(n \operatorname{arctg} t)$ — это рациональная функция степени n, связанная со знаменитым многочленом Чебышева.

Разложение правой части (6) имеет вид

$$t + r_2t^2 + \frac{9r_2^2 + 2r_3 - 4 + 4n^2}{12}t^3 + \ldots$$

Левая часть (6) от n не зависит, поэтому монотонная зависимость коэффициента при t^3 в правой части от n означает, что одна функция $r(t)$ не может быть решением (6) при разных положительных n.

Чтобы решить уравнение (6), нужно его рассмотреть как уравнение на функцию $\phi(t)$, записать в виде

$$\left(n\operatorname{ctg}(n\phi) - \frac{r_2}{2}\right)d\phi = \frac{dt}{t}$$

и проинтегрировать. Учитывая, что $\phi(t) = t + o(t)$, получаем неявное уравнение, определяющее функцию $\phi(t)$:

$$\sin(n\phi(t)) = nt\exp\left(\frac{r_2}{2}\phi(t)\right). \tag{7}$$

Итак, для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ и для любого $r_2 \in \mathbf{R}$ существует единственное решение (7), которое мы обозначим $r = r_b(t; r_2, n)$. При этом разложение решения $r(t) = \mathrm{tg}(\phi(t))$ имеет нужный нам вид

$$r(t) = t + \frac{r_2}{2}t^2 + \dots$$

Если $r_b(t; r_2, n) = r_b(t; \tilde{r}_2, \tilde{n})$, то, очевидно, $\tilde{r}_2 = r_2$ и, как было показано выше, $\tilde{n} = n$.

Теперь перейдем к поиску a-решений, т.е. $a(w) = Aw^m$, $A \in \mathbf{C}$, $b(w) = 0$. Им соответствуют поля вида

$$2\,\mathrm{Re}\left((Aw^m + \bar{A}w^m(2im - r_2)z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2i\bar{A}zw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

При этом выражение $\mathcal{L}$, как ряд по $(z, \bar{z})$, содержит лишь две побочные диагонали, верхнюю — члены бистепеней $(m, m+1)$ и нижнюю — члены бистепеней $(m+1, m)$. Приравниваем верхнюю диагональ к нулю, делим на $2Au^{m+1}\bar{z}$, заменяем $\sigma|z|^2$ на t, получаем

$$-r'(t)R(t)^m + (r_2 + 2im)r'(t)t\bar{R(t)}^m + |R(t)|^2\bar{R(t)} = 0,$$

что после отделения вещественной и мнимой части дает

$$\frac{1 + r(t)^2}{r'} = cos(2m\phi(t)) - r_2 t \tag{8}$$

$$\sin(2m\phi(t)) = 2mt. \tag{9}$$

Если $m = 0$, то (9) исчезает, а (8) дает уравнение, из которого для $r_2 \neq 0$ получаем

$$\phi(t) = -\frac{1}{r_2}\ln(1 - r_2 t), \tag{10}$$

а для $r_2 = 0$

$$\phi(t) = t. \tag{11}$$

Пусть теперь $m = 1, 2, 3, \dots$, тогда из (9) получаем

$$\phi(t) = \frac{1}{2m}\arcsin(2mt), \tag{12}$$

и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (2mt)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2mt)^2} - r_2 t}, \tag{13}$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $r_2 = 0$.

Итак, при $m > 0$ система (8), (9) имеет решение только при условии $r_2 = 0$, и это

$$r = r_a(t, m) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right). \tag{14}$$

Совпадения решений при разных m, очевидно, невозможны.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности совпадения a-решений и b-решений. Пусть $r_2 = 0$, тогда соотношение (7) можно решить относительно $\phi(t)$ и получить

$$\phi(t) = \frac{1}{n}\arcsin(nt),$$

что при $n = 2m$ в точности совпадает с a-решением. Итак,

$$r_a(t,m) = r_b(t,2m,0) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right). \tag{15}$$

Пусть, далее, $r_2 \neq 0$ и a-решение $\phi(t) = -\frac{1}{r_2}\ln(1-r_2t)$ является b-решением, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\phi'(t)t = \frac{1}{n\operatorname{ctg}(n\phi(t)) - \frac{r_2}{2}}. \tag{16}$$

Но приравнивая в этом соотношении коэффициенты при t^3, получаем равенство $r_2^2 = (\frac{13}{12}r_2^2 + \frac{n^2}{3})$, которое невозможно при $r_2 \neq 0$. Последняя возможность — это a-решение при $m = 0$ и $r_2 = 0$, т.е. $\phi(t) = t$. Но эта функция не удовлетворяет уравнению (16).

Если имеется биголоморфное отображение ростка одной гиперповерхности вида $v = ur(\sigma|z|^2)$, где $r'(0) = 1$, на другую такую гиперповерхность, оставляющее начало координат на месте, то, как это следует из анализа младших компонент возникающего при этом соотношения, набор (σ, r_2, r_3) инвариантен. А этого достаточно, чтобы различать все гиперповерхности, имеющие не менее, чем трехмерную алгебру автоморфизмов. Т.е. гиперповерхности могут быть эквивалентны только в случае, если они попали в один класс по размерности алгебры Ли и имеют совпадающий набор значений определяющих параметров.

Рассмотрим теперь определяющие функции , имеющие при $t = 0$ нуль кратности s, большей, чем единица. Такую гиперповерхность локально можно задать уравнением

$$v = ur(|z|^2) = u(\sigma t^s + r_{s+1}(t^s) + \ldots).$$

Подстановка в (4) значения $\bar{z} = 0$ с учетом того, что $g(0,0) = 0$, дает

$$g(z,w) = b(w)w, \text{ причем } \operatorname{Im} b(u) = 0. \tag{17}$$

Запишем f в виде

$$f(z,w) = c(w)z + \tilde{f}(z,w), \text{ где } \tilde{f}(z,w) = \sum f_j(w)w^j \text{ при } j = 0,2,3,\ldots \tag{18}$$

Подставляя это в $\mathcal{L} = 0$, видим, что пара функций (b,c) входит только в диагональные члены (т.е. бистепеней (m,m)), а $\tilde{f}$ — только в недиагональные. Равенство нулю внедиагональной части $\mathcal{L} = 0$ после деления на $2r'(|z|^2)|z|^4$ дает

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{f}(z,w)}{z}\right) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Поскольку Γ в общей точке невырождена, то обращение в ноль вещественной части мероморфной функции означает, что эта функция — мнимая константа, откуда, в силу выбора $\tilde{f}$, получаем, что $\tilde{f} = 0$. Диагональная часть — это условие на (b,c). Если $b(w) = \sum b_jw^j$, $c(w) = \sum c_jw^j$ — решение, то любая пара $b(w) = b_{n+1}w^{n+1}$, $c(w) = c_nw^n$ — тоже решение. Соответствующее поле имеет вид

$$2\operatorname{Re}\left(c_nw^nz\frac{\partial}{\partial z} + b_{n+1}w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right). \tag{19}$$

Значению $b(w) = b_0$ соответствует $c(w) = 0$, но эта пара дает известное поле $2\,\mathrm{Re}\left(b_0 w \frac{\partial}{\partial w}\right)$. Если в паре (b_{n+1}, c_n) значение $b_{n+1} = 0$, из условия $\mathcal{L} = 0$ следует, что $c_n = 0$, поэтому, будем считать, что вещественное число $b_{n+1} \neq 0$. После деления, можем полагать, что $b_{n+1} = 1$, при этом $c_n = K + iM$. В результате, после подстановки $\sigma|z|^2 = t$ соотношение принимает вид

$$(1 + r(t)^2 \sin(n\phi(t)) = 2r'(t)t(K\cos(n\phi(t)) - M\sin(n\phi(t)). \tag{20}$$

Если здесь $n = 0$, то $K = 0$ и поле приобретает вид

$$2\,\mathrm{Re}\left(iMz\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

что представляет собой комбинацию двух известных полей вида (2). Поэтому полагаем $n > 0$. Интегрируя уравнеие (20), получаем

$$2\frac{K}{n}\ln(\sin(n\phi(t))) - 2M\phi(t) = \ln(Ct), \text{ где } C = \mathrm{const},$$

или

$$\sin(n\phi(t)) = (Ct)^{\frac{n}{2K}} \exp\left(\frac{Mn}{K}\phi(t)\right).$$

Сравнивая младшие члены разложения правой и левой части, получаем

$$nt^s = C^{\frac{n}{2K}} t^{\frac{n}{2K}},$$

откуда получаем, что $K = \frac{n}{2s}$, а $C = n^{\frac{1}{s}}$. В результате чего соотношение принимает вид

$$\sin(n\phi(t)) = nt^s \exp(2Ms\phi(t)). \tag{21}$$

Поскольку функция $r(t)$, а вместе с ней и $\phi(t) = \mathrm{arctg}(r(t))$ имеет в начале координат ноль кратности s, то ϕ можно записать как $\phi(t) = \psi(t^s)$, где ψ имеет разложение

$$\psi(\tau) = \tau + \frac{\psi_2}{2!}\tau^2 + \frac{\psi_3}{3!}\tau^3 + \dots \tag{22}$$

Тогда уравнение, которое определяет ψ и соответственно r, можно записать в виде

$$\sin(n\psi(\tau)) = n\tau \exp(2Ms\psi(\tau)). \tag{23}$$

Это неявное соотношение позволяет для любого фиксированного набора $(s \geq 2, n \geq 1, M \in \mathbf{R})$ рекуррентно вычислять коэффициенты разложения $\psi = \psi(\tau, s, n, M)$:

$$\psi_2 = 4Ms, \quad \psi_3 = 36(Ms)^2 + n^2, \dots \tag{24}$$

Если в уравнении на ψ заменить $2Ms$ на $\frac{\psi_2}{2}$, то получим соотношение

$$\sin(n\psi(\tau)) = n\tau \exp\left(\frac{\psi}{2}\psi(\tau)\right), \tag{25}$$

которое в точности совпадает с уравнением (7) на ϕ при $s = 1$ и позволяет однозначно определить функцию $\psi(t) = \psi(t, s, n, \psi_2)$.

Если имеет место равенство $\psi(\tau, s_1, n_1, M_1) = \psi(\tau, s_2, n_2, M_2)$, то это означает, что $s_2 = s_1$, т.к. это кратность нуля, что $M_2 = M_1$, т.к. $\psi_2 = 4Ms$; и что $n_2 = n_1$, т.к. $\psi_3 = 36(Ms)^2 + n^2$. Нетрудно показать, что набор $(\sigma, s, \psi_2, \psi_3)$ биголоморфно инвариантен, а он различает все полученные гиперповерхности.

Итак, для любого фиксированного набора $(\sigma, s \geq 2, n \geq 1, M \in \mathbf{R})$ существует единственная гиперповерхность вида $v = ur(|z|^2)$, которая имеет **трехмерную** алгебру Ли и которая удовлетворяет данным этого набора. А именно гиперповерхность

$$v = u\,\mathrm{tg}(\sigma\psi(|z|^{2s})), \text{ где } \psi = \psi(t, s, n, \psi_2). \tag{26}$$

При этом третье поле имеет вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2n + i\psi_2}{4s} z w^n \frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Все прочие гиперповерхности вида $v = ur(|z|^2)$, где функкия r имеет при $t = 0$ ноль конечной кратности большей, чем один, имеют двумерную алгебру Ли. Гиперповерхности вида $v = ur(\sigma|z|^2)$ эквивалентны только при полном совпадении наборов параметров (σ, s, n, ψ_2).

Чтобы добиться единообразия как при $s > 1$, так и при $s = 1$, можно и исходное уравнение записывать в виде $v = ur(\sigma|z|^{2s})$, где $r(\tau) = t + \frac{r_2}{2}\tau^2 + \ldots$, тогда $r(\tau) = \mathrm{tg}(\psi(\tau))$, и при этом $\psi_2 = r_2$ и полученный результат естественно объединяется со случаем (B) при $s = 1$. Т.е. удобно считать, что этот случай содержит дополнительный параметр s, который принимает как значение $s = 1$, так и $s = 2, 3, \ldots$ и описывает все гиперповерхности с трехмерной алгеброй Ли.

3 Итоги

Гиперповерхность $\Gamma = \{v = ur(|z|^2)\}$ эквивалентна гиперплоскости в том и только том случае, когда r постоянна. В этом случае $\mathrm{aut}\,\Gamma_0$ - бесконечномерна.

Пусть σ — это параметр, который принимает два значения ± 1. Тогда все гиперповерхности указанного вида с конечномерными симметриями распадаются на четыре типа.

(AB) Пятимерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$ с

$$r(t) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right) \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3\ldots$$

Три дополнительных поля имеют вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left(mzw^{2m}\frac{\partial}{\partial z} + w^{2m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_4 = 2\,\mathrm{Re}\left(w^m(1 + 2imz^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2izw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_5 = 2\,\mathrm{Re}\left(w^m(i + 2mz^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2zw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

При этом все пять полей попали в стабилизатор, причем четыре из них обращаются в ноль на прямой $w = 0$. Это означает, что порожденные полями (X_2, X_3, X_4, X_5) преобразования оставляют каждую точку этой прямой неподвижной.

Поверхность этой серии кодируется дискретной парой (σ, m).

(**A**) Четырехмерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$ с

$$r(t) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{r_2}\ln(1 - r_2 t)\right),\ \text{где } r_2 \neq 0 \text{ или } r(t) = \operatorname{tg}(t).$$

При этом два дополнительных поля имеют вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left((1 - r_2 z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2izw\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_4 = 2\,\mathrm{Re}\left(i(1 + r_2 z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2zw\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Причем стабилизатор двумерный, порождается (X_1, X_2). Орбита начала координат — это особая прямая: $w = 0$.

Поверхность этой серии кодируется парой (σ, r_2), где r_2 - вещественный параметр.

(**B**) Трехмерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$, такие, что $r(t) = \operatorname{tg}(\phi(t^s))$, где ϕ — это решение неявного соотношения

$$\sin(n\phi(t)) = nt\exp\left(\frac{r_2}{2}\phi(t)\right)$$

при условии, что либо $s > 1$, либо n — нечетное положительное число, либо $r_2 = 0$. При этом третье поле имеет вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2n + ir_2}{4s}zw^n\frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

и содержится в стабилизаторе, который в этом случае совпадает с полной алгеброй.

Поверхность этой серии кодируется дискретным набором (σ, s, n) и вещественным параметром r_2.

(**O**) Все прочие гиперповерхности такого вида имеют двумерную алгебру Ли, оба поля лежат в стабилизаторе.

Таким образом, всегда имеет место оценка

$$\dim \operatorname{aut}\Gamma_0 \leq 5\ ,\ \text{причем если } r'(0) = 0\ , \text{то} \dim \operatorname{aut}\Gamma_0 \leq 3.$$

Такая же оценка остается и для стабилизаторов

$$\dim \operatorname{aut}_0\Gamma_0 \leq 5\ ,\ \text{причем если } r'(0) = 0\ , \text{то} \dim \operatorname{aut}_0\Gamma_0 \leq 3.$$

Гиперповерхности из списков (AB), (A), (B) могут быть эквивалентны только при полном совпадении набора определяющих параметров.

Наличие серии гиперповерхностей (AB) с пятимерной алгеброй показывает, что наличие пятимерного стабилизатора еще не означает, что росток сферичен. Но если вопрос задать иначе: *«Верно ли, что полную восьмимерную алгебру имеет только сфера?»*, то ответа на него у нас нет.

Все поля из алгебры $\operatorname{aut}\Gamma$ являются полиномиальными и, тем самым, определены во всем пространстве $\mathbf{C}^2$. Соответствующие дифференциальные уравнения интегрируются в многозначных элементарных функциях. Причем во всех случаях, за исключением X_4 и X_5 в (AB) это действие дается явным выражением, а для этих полей действие определяется из неявного уравнения в элементарных функциях.

Смена знака σ не отражается на алгебре Ли, т.е.

$$\operatorname{aut}\{v = u(|z|^2)\} = \operatorname{aut}\{v = u(-|z|^2)\}$$

и эти гиперповерхности — две разных орбиты действия одной локальной группы.

Все гиперповерхности серий (AB) и (A) сферичны вне прямой вырождения $w = 0$. Все гиперповерхности серии (B) в точке общего положения однородны и попадают, тем самым, в список Э.Картана.

(AB) — это дискретная серия и таким образом она нуль-мерна, (A) и (B) содержат однопараметрические семейства, тип (O) имеет бесконечную размерность.

И последнее. Эти четыре типа гиперповерхностей поразительно напоминают известную классификацию людей по группам крови: (O), (A), (B), (AB). Следует отметить, что, как и в случае с гиперповерхностями типа (AB), группа крови (AB) является самой редкой. А если к четырем классам добавить наш параметр σ, который, как и резус-фактор Rh, принимает значение $\pm$, то аналогия становится полной.

4 Ситуация в $\mathbf{C}^3$

Если Γ — вещественная гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$, то что можно сказать о размерности $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$? Если росток Леви-невырожденный, то как это следует из [2] эта размерность не превосходит 15. Поэтому даже если росток вырожден, но представляющая его гиперповерхность Леви-невырождена в общей точке, а у нас есть 16 полей, то они обязаны быть линейно зависимыми. Т.е. мы получаем, что и в этом случае размерность не выше 15-ти. И вообще, если речь идет о полной алгебре, то оценку размерности можно проводить в точке общего положения. Причем если у нас есть хотя бы 5 независимых полей, то в точках, где они линейно независимы, как касательные вектора, гиперповерхность локально однородна. Т.е. если мы интересуемся ростками с автоморфизмами размерности 5 и выше, то можно говорить только об однородных (в точке общего положения) ростках. Если при этом в общей точке есть несферичность (т.е. неэквивалентность одной их двух невырожденных гиперквадрик), то, как показал Лобода [7], размерность не превосходит 8. Если в общей точке форма Леви однородной гиперповерхности имеет вырождение ранга один, то такой росток попадает в список Фелса и Каупа [8], и размерность не превосходит 10. Если форма Леви имеет ранг ноль (если на открытом подмножестве — значит, и повсюду), то гиперповерхность локально эквивалентна гиперплоскости и ее автоморфизмы бесконечномерны.

Итак, альтернатива такова: либо размерность бесконечна и это гиперплоскость, либо она не выше 15-ти.

Алгебру Ли размерности 15 имеют обе гиперквадрики, т.е.

$$\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} w = |z_1|^2 - |z_2|^2$$

Стабилизатор каждой гиперквадрики имеет размерность 10.

Единственная невырожденная несферическая гиперповерхность из списка Лободы, имеющая 8-мерные автоморфизмы, это

$$v = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_1|^4$$

— поверхность Винкельмана. Ее стабилизатор имеет размерность 3.

Световой конус:

$$(\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_2)$$

— единственная гиперповерхность из списка Фелса и Каупа, имеющая 10-мерные автоморфизмы. Она имеет 5-мерный стабилизатор.

Можно задать ряд вопросов.

- Существуют ли ростки со стабилизаторами размерностей от 11 до 15?
- Верно ли, что если стабилизатор 10-мерный, то росток сферичен?
- Верно ли, что что полную 15-мерную алгебру имеют только сферические ростки?

Если гиперповерхность имеет конечный тип, то ее уравнение можно записать в виде

$$\Gamma = \{\operatorname{Im} w = P_m(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(m+1)\}, \tag{27}$$

где P — ненулевая однородная форма степени m от своих 4 переменных без гармонических членов, а $O(m+1)$ — это члены веса $m+1$ и выше. Гиперповерхность

$$Q = \{\operatorname{Im} w = P_m(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\}$$

является модельной по отношению к гиперповерхностям вида (27). Имеется каноническое точное представление $\operatorname{aut}_0 \Gamma_0$ в $\operatorname{aut}_0 Q_0$. Поэтому было бы любопытно выяснить какие значения может принимать размерность $\operatorname{aut}_0 Q_0$ для различных форм P_m, каково ее максимально возможное значение и на каких формах реализуется этот максимум.

Эта работа была завершена в Канберре, в Национальном австралийском университете, куда автор был любезно приглашен профессором А.Исаевым. Во время работы над статьей автор имел полезные обсуждения с А.Исаевым и И.Коссовским, за что он им искренне благодарен. Когда эта работа готовилась к печати, автору стало известно, что проф. Ламель из Венского университета также готовит публикацию по гиперповерхностям бесконечного типа в $\mathbf{C}^2$. Было бы интересно сравнить его результаты с теми, что получены в этой работе.

Список литературы

[1] *Poincare H*, Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1907, p. 185–220.

[2] *Chern S.S., Moser J.K.*, Real hypersurfaces in complex manifold // Acta Math., 1974, v.133, № 3–4, p.219–271.

[3] *Cartan E.*, Sur la geometrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes // Ann. Math. Pura Appl., 1932, v. (4) 11, p.17–90 (Oeuvres II, 2, 1231–1304).

[4] *Белошапка В.К.*, О голоморфных преобразованиях квадрики // Мат. сборник, 1991, т. 182, № 2, с. 203–219.

[5] *Ершова А.Е.*, Автоморфизмы вырожденных модельных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^2$. Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, курсовая работа, 1996.

[6] *Kollar M.*, Normal forms for hypersurfaces of finite type in $\mathbf{C}^2$ // Mathematical Research Letters, 2005, v. 12, p. 897–910.

[7] *Лобода А. В.*, О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$ // Функц. анализ и его прил., 1999, т. 33, № 1, с. 68–71.

[8] *Fels G., Kaup W.*, Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 // Acta Math., 2008, v. 201, № 1, p. 1–82.

Модули гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, $1 \le p \le \infty$[1]

Потапов М.К.[2], Симонов Б.В.[3]

В работе систематизированы основные свойства модулей гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, $1 \le p \le \infty$. Доказательства этих свойств основаны на конструктивной характеристике модуля гладкости.

В работе [1] систематизированы свойства модулей гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, где $1 < p < \infty$. В этой работе систематизируются основные свойства модулей гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, где $1 \le p \le \infty$. Подчеркнем, что приводимые ниже доказательства этих свойств основаны на конструктивной характеристике модуля гладкости.

1 Определения и вспомогательные утверждения

Обозначим через:

- L_p, $1 \le p \le \infty$,− множество 2π−периодических функций одной переменной x, которые

  для $1 \le p < \infty$ измеримы и $||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

  а для $p = \infty$ непрерывны и $||f||_p = \max\limits_{0 \le x \le 2\pi} |f(x)|$;

- L_p^0− множество функций $f \in L_p$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$;

- $s_n(f)$− частичную сумму ряда Фурье функций $f \in L_p$, то есть

$$s_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt;\ n = 0, 1, 2, ...;$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00175а) и программы поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-32-52-2010.1).

[2]Потапов Михаил Константинович, mkpotapov@mail.ru, профессор кафедры теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Симонов Борис Витальевич, simonov-b2002@yandex.ru, доцент, Волгоградский государственный технический университет.

- $V_l(f)$– сумму Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f(x)$, то есть

$$V_0(f) = s_0(f),\ V_l(f) = \frac{1}{l}\big(s_l(f) + ... + s_{2l-1}(f)\big),\ l = 1, 2, ...;$$

- $f^{(\rho)}$– производную в смысле Вейля функции $f(x)$ порядка ρ ($\rho > 0$);

- $E_n(f)_p$– наилучшее приближение функции $f \in L_p$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка не выше, чем n ($n = 0, 1, 2, ...$)), то есть $E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n} ||f - T_n||_p$;

- $W_p^{(\alpha)}$– множество функций $f \in L_p^0$ таких, что их производные в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_p^0$.

Для функции $f \in L_p$ определим разность положительного порядка α следующим образом:

$$\Delta_h^\alpha(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h),$$

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$.
Обозначим через $\omega_\alpha(f, \delta)_p$– модуль гладкости положительного порядка α, то есть

$$\omega_\alpha(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} ||\Delta_h^\alpha(f)||_p.$$

K-функционалом функции $f \in L_p^0$ будем называть величину

$$K(f, \delta, \alpha, p) = \inf_{g \in W_p^{(\alpha)}} \big[||f - g||_p + \delta^\alpha ||g^{(\alpha)}||_p\big].$$

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta)$ и $G(f, \delta)$ будем писать, что $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f и δ, такая, что $F(f, \delta) \leq CG(f, \delta)$. Если одновременно $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$ и $G(f, \delta) \ll F(f, \delta)$, то будем писать, что $F(f, \delta) \asymp G(f, \delta)$.

Лемма 1.1. [2] *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \leq p \leq \infty, n = 0, 1, 2, ...$ *Тогда*

$$||V_n(f)||_p \ll ||f||_p.$$

Лемма 1.2. [3] *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} = 0.$$

Лемма 1.3. [3] *Пусть* $f \in L_p^0,\ g \in L_p^0,\ 1 \leq p \leq \infty,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$ *Тогда*
(a) $\Delta_h^\alpha(f + g) = \Delta_h^\alpha(f) + \Delta_h^\alpha(g)$;
(b) $\Delta_h^\alpha \Delta_h^\beta(f)) = \Delta_h^{\alpha+\beta}(f)$;
(c) $||\Delta_h^\alpha(f)||_p \ll ||f||_p$.

Лемма 1.4. [3] *Пусть* $1 \leq p \leq \infty,\ \alpha > 0,\ T_n-$ *тригонометрический полином порядка не выше, чем* n $(n \in N)$. *Тогда*

(a) *для любого* $h:\ 0 < |h| \leq \frac{\pi}{n}$, *справедливо неравенство*

$$||\Delta_h^\alpha T_n||_p \ll n^{-\alpha}||T_n^{(\alpha)}||_p;$$

(b) *справедливо неравенство*

$$||T_n^{(\alpha)}||_p \ll n^\alpha||\Delta_{\frac{\pi}{n}}^\alpha T_n||_p.$$

Лемма 1.5. [2] *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \leq p \leq \infty,\ k \in N,\ n = 0, 1, \ldots.$ *Тогда*

$$||f - V_n(f)||_p \ll E_n(f)_p \ll \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p.$$

Лемма 1.6. [4] Пусть $f \in L_p^0,\ 1 \leq p \leq \infty,\ \alpha > 0,\ m = 0, 1, \ldots.$ Тогда

$$||V_{2^{m+1}}(f) - V_{2^m}(f)||_p \ll 2^{-m\alpha}||V_{2^{m+1}}^{(\alpha)}(f) - V_{2^m}^{(\alpha)}(f)||_p.$$

Лемма 1.7. [3] *Пусть* $T_n(x)-$ *тригонометрический полином порядка* n $(n = 1, 2, \ldots),\ 1 \leq p \leq \infty$. *Тогда*

$$||T_n^{(\alpha)}||_p \ll (n+1)^\alpha||T_n||_p.$$

2 Конструктивная характеристика модуля гладкости

Теорема 2.1. *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \leq p \leq \infty,\ \alpha > 0,\ n \in N$. *Тогда*

$$\omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2n-1}\right)_p \asymp n^{-\alpha}||V_n^{(\alpha)}(f)||_p + ||f - V_n(f)||_p. \tag{2.1}$$

Доказательство. Применяя свойства нормы, для любых h и $n \in N$ имеем

$$||\Delta_h^\alpha(f)||_p \leq ||\Delta_h^\alpha(V_n(f))||_p + ||\Delta_h^\alpha(f - V_n(f))||_p = J_1 + J_2.$$

Применяя лемму 1.3 (c), получим, что

$$J_2 \ll ||f - V_n(f)||_p.$$

Применяя лемму 1.4 (a), для любых h таких, что $0 < |h| \leq \frac{\pi}{2n-1}$, получим, что

$$J_1 \ll n^{-\alpha}||V_n^{(\alpha)}(f)||_p.$$

Следовательно, для любых h $(0 < |h| \leq \frac{\pi}{2n-1})$, имеем

$$||\Delta_h^\alpha(f)||_p \ll n^{-\alpha}||V_n^{(\alpha)}(f)||_p + ||f - V_n(f)||_p.$$

Отсюда и следует оценка сверху в соотношении (2.1).

Докажем теперь оценку снизу в соотношении (2.1).

Применяя лемму 1.5, имеем

$$A_1 = ||f - V_n(f)||_p \ll \omega_{[\alpha]+1}\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p.$$

Применяя свойства модуля гладкости натурального порядка, получим, что

$$A_1 \ll \omega_{[\alpha]+1}\left(f, \frac{\pi}{2n-1}\right)_p.$$

Применяя лемму 1.3 (b) и (c), получаем, что

$$A_1 \ll \sup_{|h|\le\frac{\pi}{2n-1}} ||\Delta_h^{[\alpha]+1-\alpha}\big(\Delta_h^\alpha(f)\big)||_p \ll \sup_{|h|\le\frac{\pi}{2n-1}} ||\Delta_h^\alpha(f)||_p = \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2n-1}\right)_p.$$

Применяя лемму 1.4 (b), имеем

$$A_2 = ||V_n^{(\alpha)}(f)||_p \ll n^\alpha ||\Delta^\alpha_{\frac{\pi}{2n-1}}(V_n(f))||_p.$$

Применяя лемму 1.1, получим

$$A_2 \ll n^\alpha ||(V_n \Delta^\alpha_{\frac{\pi}{2n-1}}(f))||_p \ll n^\alpha ||\Delta^\alpha_{\frac{\pi}{2n-1}}(f)||_p \ll n^\alpha \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2n-1}\right)_p.$$

Таким образом, имеем

$$||f - V_n(f)||_p + n^{-\alpha}||V_n^{(\alpha)}(f)||_p = A_1 + n^{-\alpha}A_2 \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2n-1}\right)_p.$$

И тем самым доказана оценка снизу в соотношении (2.1).
Теорема 2.1 доказана. □

Отметим, что теорема 2.1 содержится в работах [4]-[5].

3 Эквивалентность модуля гладкости и K-функционала

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \le p \le \infty,\ \alpha > 0,\ 0 < \delta \le \pi$. *Тогда*

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p \asymp K(f,\delta,\alpha,p). \tag{3.1}$$

Доказательство. Для любого $\delta \in (0,\pi]$ найдется натуральное число n такое, что $\frac{\pi}{2n+1} < \delta \le \frac{\pi}{2n-1}$. Если $f \in L_p^0$, то $V_{n+1}(f) \in W_p^{(\alpha)}$. Поэтому

$$K(f,\delta,\alpha,p) \ll ||f - V_{n+1}(f)||_p + \delta^\alpha ||V_{n+1}^{(\alpha)}(f)||_p \ll$$

$$\ll ||f - V_{n+1}(f)||_p + (n+1)^{-\alpha}||V_{n+1}^{(\alpha)}(f)||_p.$$

Применяя теорему 2.1, а затем определение модуля гладкости, отсюда получаем, что

$$K(f,\delta,\alpha,p) \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2n+1}\right)_p \ll \omega_\alpha(f,\delta)_p,$$

и тем самым доказана оценка снизу в соотношении (3.1).

Теперь докажем оценку сверху в соотношении (3.1).

Рассмотрим любую функцию $g \in W_p^{(\alpha)}$. Тогда, применяя лемму 1.3 (a), имеем

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p \ll \omega_\alpha(f-g,\delta)_p + \omega_\alpha(g,\delta)_p = I_1 + I_2.$$

Применяя лемму 1.3 (c), получим, что

$$I_1 \ll ||f-g||_p.$$

Теперь оценим I_2. Для любого $\delta \in (0,\pi]$ найдется целое натуральное число m такое, что $\frac{\pi}{2^{m+2}-1} < \delta \le \frac{\pi}{2^{m+1}-1}$.

Рассмотрим $I_3 = \omega_\alpha\left(g, \frac{\pi}{2^{m+1}-1}\right)_p$.

Применяя лемму 1.3 (a) и (c), имеем

$$I_3 \ll \omega_\alpha\left(g - V_{2^m}(g), \frac{\pi}{2^{m+1}-1}\right)_p + \omega_\alpha\left(V_{2^m}(g), \frac{\pi}{2^{m+1}-1}\right)_p \ll$$

$$\ll ||g - V_{2^m(g)}||_p + \sup_{|h| \le \frac{\pi}{2^{m+1}-1}} ||\Delta_h^\alpha(V_{2^m}(g))||_p = i_{21} + i_{22}.$$

Применяя лемму 1.4 (a), а затем лемму 1.1, для всех h таких, что $0 < |h| \le \frac{\pi}{2^{m+1}-1}$, получим, что

$$i_{22} \ll 2^{-m\alpha}||V_{2^m}^{(\alpha)}(g)||_p = 2^{-m\alpha}||V_{2^m}(g^{(\alpha)})||_p \ll 2^{-m\alpha}||g^{(\alpha)}||_p.$$

Применяя леммы 1.6 и 1.1, получим, что

$$i_{21} \ll \sum_{\nu=m}^{\infty} ||V_{2^\nu}(g) - V_{2^{\nu+1}}(g)||_p \ll \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} ||\big(V_{2^\nu}(g) - V_{2^{\nu+1}}(g)\big)^{(\alpha)}||_p \ll$$

$$\ll \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} ||\big(V_{2^\nu}(g^{(\alpha)}) - V_{2^{\nu+1}}(g^{(\alpha)})\big)||_p \ll 2^{-m\alpha}||g^{(\alpha)}||_p.$$

Объединяя оценки для i_{21} и i_{22}, имеем

$$I_3 \ll 2^{-m\alpha}||g^{(\alpha)}||_p.$$

Так как по определению модуля гладкости

$$\omega_\alpha(g,\delta)_p \ll \omega_\alpha\left(g, \frac{\pi}{2^{m+1}-1}\right)_p,$$

то получим, что

$$I_2 \ll 2^{-m\alpha}||g^{(\alpha)}||_p \ll \delta^\alpha ||g^{(\alpha)}||_p.$$

Объединяя оценки для I_1 и I_2, имеем

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p \ll ||f-g||_p + \delta^\alpha ||g^{(\alpha)}||_p.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любых функций $g \in W_p^{(\alpha)}$, то из него следует неравенство

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p \ll K(f,\delta,\alpha,p),$$

и тем самым доказана оценка сверху в соотношении (3.1).

Теорема 3.1 доказана. □

Отметим, что теорема 3.1 содержится в работах [6], [8].

4 Основные свойства модуля гладкости

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in L_p^0,\ g \in L_p^0,\ 1 \le p \le \infty,\ f(x)$ *имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x,\ \beta > \alpha > 0,\ k \in N,\ n = 0, 1, \ldots.$ *Тогда*

(1) $\omega_\alpha(f, 0)_p = 0,$

(2) $\omega_\alpha(f + g, \delta)_p \ll \omega_\alpha(f, \delta)_p + \omega_\alpha(g, \delta)_p,$

(3) $\omega_\alpha(f, \delta)_p \ll \omega_\alpha(f, t)_p,$ *если* $0 < \delta < t,$

(4) $\frac{\omega_\alpha(f,t)_p}{t^\alpha} \ll \frac{\omega_\alpha(f,\delta)_p}{\delta^\alpha},$ *если* $0 < \delta < t \le \pi,$

(5) $\omega_\alpha(f, \lambda\delta)_p \ll (\lambda + 1)^\alpha \omega_\alpha(f, \delta)_p,$ *если* $\lambda > 0,$

$$(6) \quad E_n(f)_p \ll \omega_\alpha\big(f, \tfrac{1}{n+1}\big)_p \ll \tfrac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha-1} E_{\nu-1}(f)_p, \tag{4.1}$$

(7) $\omega_\beta(f, \delta)_p \ll \omega_\alpha(f, \delta)_p,$ *если* $\delta > 0,$

(8) $\frac{\omega_\alpha(f,\delta)_p}{\delta^\alpha} \ll \frac{\omega_\beta(f,\delta)_p}{\delta^\beta},$ *если* $0 < \delta \le \pi,$

(9) $2^{-\alpha n} ||V_{2^n}^{(\alpha)}(f)||_p \ll \omega_\alpha\big(f, \frac{1}{2^n}\big)_p \ll \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} 2^{-\alpha\nu} ||V_{2^\nu}^{(\alpha)}(f)||_p,$

(10) $|a_k| + |b_k| \ll \omega_\alpha\big(f, \frac{1}{k}\big)_p \ll k^{-\alpha} \sum\limits_{\nu=1}^{k} \big(|a_\nu| + |b_\nu|\big)\nu^\alpha + \sum\limits_{\nu=k+1}^{\infty} |a_\nu| + |b_\nu|.$

Доказательство. Свойства (1), (2) и (3) следуют из лемм 1.2 и 1.3 (а) и определения модуля гладкости. Докажем свойство (4).

Применяя теорему 3.1, имеем

$$\frac{\omega_\alpha(f, t)_p}{t^\alpha} \asymp \frac{K(f, t, \alpha, p)}{t^\alpha} \ll \frac{K(f, \delta, \alpha, p)}{\delta^\alpha} \asymp \frac{\omega_\alpha(f, \delta)_p}{\delta^\alpha},$$

что и доказывает справедливость свойства (4).

Свойство (5) следует из свойств (3) и (4).

Докажем свойство (6). Сначала рассмотрим случай, когда $n \ge 1$, тогда либо $n = 2m$, либо $n = 2m - 1$, где $m \in N$. Поэтому из определения $E_n(f)_p$ следует, что

$$J = E_n(f)_p \ll E_{2m-1}(f)_p \ll ||f - V_m(f)||_p.$$

Применяя теорему 2.1, имеем

$$J \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2m - 1}\right)_p.$$

Применяя свойство (4) модуля гладкости, получим, что

$$J \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{n + 1}\right)_p,$$

и тем самым в этом случае левое из неравенств (4.1) доказано.

Теперь рассмотрим случай $n = 0$. Из определения $E_n(f)_p$ и свойств нормы функции следует, что

$$A = E_0(f)_p \ll ||f - V_0(f)||_p \ll ||f - V_1(f)||_p + ||V_1(f) - V_0(f)||_p = A_1 + A_2.$$

Так как $V_0(f) = S_0(f) = 0, V_1(f) = S_1(f)$ и $V_1^{(2k)}(f) = (-1)^k V_1(f)$, то $A_2 = ||V_1^{(2k)}(f)||_p$, где $2k > \alpha$ $(k \in N)$.

Поэтому
$$A \ll ||f - V_1(f)||_p + ||V_1^{(2k)}(f)||_p.$$

Применяя теорему 2.1, имеем

$$A \ll \omega_{2k}(f, \pi)_p.$$

Применяя теперь сначала лемму 1.3 (a) и (c), а затем свойство (4) модуля гладкости, получим, что

$$\omega_{2k}(f, \pi)_p = \sup_{|h| \le \pi} ||\Delta_h^{2k-\alpha}(\Delta_h^{\alpha}(f))||_p \ll \sup_{|h| \le \pi} ||\Delta_h^{\alpha}(f)||_p = \omega_\alpha(f, \pi)_p \ll \omega_\alpha(f, 1)_p.$$

И тем самым и в этом случае левое из неравенств (4.1) доказано.

Теперь докажем правое из неравенств (4.1).

Для любого $n = 0, 1, ...$ найдется целое неотрицательное число m такое, что $2^{m+1} - 1 \le n + 1 < 2^{m+2} - 1$. Применяя свойство (3) модуля гладкости, а затем теорему 2.1, имеем

$$J = \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2^{m+1} - 1}\right)_p \ll ||f - V_{2^m(f)||_p} + 2^{-m\alpha}||V_{2^m}^{(\alpha)}(f)||_p = j_1 + j_2.$$

Применяя лемму 1.5, получим, что

$$j_1 \ll E_{2^m}(f)_p.$$

Так как $V_0(f) = 0$, то

$$A_2 = ||V_{2^m}^{(\alpha)}(f)||_p \ll \sum_{\mu=0}^{m} ||V_{2^\mu}^{(\alpha)}(f) - V_{[2^{\mu-1}]}^{(\alpha)}(f)||_p.$$

Применяя лемму 1.7, имеем

$$A_2 \ll \sum_{\mu=0}^{m} 2^{\mu\alpha}||V_{2^\mu}(f) - V_{[2^{\mu-1}]}(f)||_p.$$

Применяя лемму 1.5, получим, что

$$A_2 \ll \sum_{\mu=0}^{m} 2^{\mu\alpha} E_{[2^{\mu-1}]}(f)_p.$$

Откуда следует, что
$$j_2 \ll 2^{-m\alpha} \sum_{\mu=0}^{m} 2^{\mu\alpha} E_{[2^{\mu-1}]}(f)_p.$$

Но тогда
$$J \ll 2^{-m\alpha} \sum_{\mu=0}^{m+1} 2^{\mu\alpha} E_{[2^{\mu-1}]}(f)_p \ll \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha-1} E_{\nu-1}(f)_p.$$

И тем самым правое из неравенств (4.1) доказано.

Докажем свойство (7). Применяя лемму 1.3 (a) и (c), имеем

$$\omega_\beta(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta} ||\Delta_h^{\beta-\alpha}(\Delta_h^\alpha(f))||_p \ll \sup_{|h|\le\delta} ||\Delta_h^\alpha(f)||_p = \omega_\alpha(f,\delta)_p,$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство (8). Для любого $\delta\in(0,\pi]$ существует натуральное число n такое, что $\frac{\pi}{n+1}<\delta\le\frac{\pi}{n}$. Применяя свойство (4) модуля гладкости, имеем

$$A=\frac{\omega_\alpha(f,\delta)_p}{\delta^\alpha} \ll n^\alpha \omega_\alpha\left(f,\frac{1}{n+1}\right)_p.$$

Применяя правое из неравенств (4.1), получим, что

$$A \ll \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha-1} E_{\nu-1}(f)_p.$$

Теперь, применяя левое из неравенств (4.1), имеем

$$A \ll \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha-1}\omega_\beta\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_p = \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha-\beta-1}\frac{\omega_\beta\big(f,\frac{1}{\nu}\big)_p}{(\frac{1}{\nu})^\beta}.$$

Наконец, применяя свойства (4) и (3) модуля гладкости, получим, что

$$A \ll \frac{\omega_\beta\big(f,\frac{1}{n+1}\big)_p}{(\frac{1}{n+1})^\beta}\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu^{\alpha-\beta-1} \ll \frac{\omega_\beta\big(f,\frac{\pi}{n+1}\big)_p}{(\frac{\pi}{n+1})^\beta} \ll \frac{\omega_\beta(f,\delta)_p}{\delta^\beta},$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство (9). Левое из неравенств (9) следует из теоремы (2.1). Докажем правое неравенство. Применяя свойство (4) модуля гладкости, а затем теорему 2.1, имеем

$$J=\omega_\alpha\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_p \ll \omega_\alpha\left(f,\frac{\pi}{2^{n+1}-1}\right)_p \ll 2^{-n\alpha}||V_{2^n}^{(\alpha)}(f)||_p + ||f-V_{2^n}(f)||_p \ll$$

$$\ll 2^{-n\alpha}||V_{2^n}^{(\alpha)}(f)||_p + \sum_{\nu=n}^{\infty}||V_{2^\nu}(f)-V_{2^{\nu+1}}(f)||_p.$$

Применяя лемму 1.6, получим, что

$$J \ll 2^{-n\alpha}||V_{2^n}^{(\alpha)}(f)||_p + \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{-\nu\alpha}||V_{2^\nu}^{(\alpha)}(f)-V_{2^{\nu+1}}^{(\alpha)}(f)||_p \ll \sum_{\nu=n}^{\infty}2^{-\nu\alpha}||V_{2^\nu}^{(\alpha)}(f)||_p,$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство (10). Так как

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(x)-T_{k-1}(x)\big)\cos kx dx$$

для тригонометрического полинома T_{k-1} степени не выше, чем $k-1$, являющегося полиномом наилучшего приближения для $f(x)\in L_p$, то есть такого, что $E_{k-1}(f)_p = ||f - T_{k-1}||_p$, то $|a_k| \ll E_{k-1}(f)_p$.

Применяя свойства (6) и (4) модуля гладкости, получим, что

$$|a_k| \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{k}\right)_p.$$

Аналогично доказывается, что

$$|b_k| \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{k}\right)_p.$$

Из этих двух неравенств следует справедливость левого неравенства (10).
Теперь докажем правое. Применяя свойство 4 модуля гладкости и теорему 2.1, имеем

$$J = \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{k}\right)_p \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{\pi}{2k-1}\right)_p \ll k^{-\alpha}||V_k^{(\alpha)}(f)||_p + ||f - V_k(f)||_p = J_1 + J_2.$$

Применяя лемму 1.5, получим, что

$$J_2 \ll E_k(f)_p \ll ||f - S_k(f)||_p \ll \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |a_\nu| + |b_\nu|.$$

Очевидно также, что

$$J_1 \ll k^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{2k-1} \big(|a_\nu| + |b_\nu|\big)\nu^\alpha.$$

Из двух последних неравенств следует справедливость правого неравенства (10).
Теорема 4.1 доказана полностью. □

Отметим, что часть свойств модуля гладкости, приведенных в теореме 4.1, содержатся в работах [3] - [8].

Замечание. Используя свойства 3 и 4 модуля гладкости, можно в теореме 2.1 заменить $\omega_\alpha\big(f, \frac{\pi}{2n-1}\big)_p$ на $\omega_\alpha\big(f, \frac{1}{n}\big)_p$.

Список литературы

[1] *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.*, Модули гладкости дробных порядков функций из пространств L_p, $1 < p < \infty$ / Современные проблемы математики и механики. К 105-летию С.М.Никольского, М.: МГУ, 2011, т. 6, № 1, с. 90–110.

[2] *Зигмунд А.*, Тригонометрические ряды, М.: Мир, 1965.

[3] *Taberski R.*, Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Comment. Math. Prace Mat., 1976/77, v. 19, № 2, p. 389–400.

[4] *Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.*, Теоремы вложения в конструктивной теории приближений // Математический сборник, 2008, т. 199, № 9, с.107–146.

[5] *Симонов Б.В.*, Некоторые вопросы теории приближений и теоремы вложения. Кандидатская диссертация, Москва, 1985.

[6] *Butzer P.L., Duckhoff H., Gorlich E., Steus R.L.*, Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Can. J. Math., 1977, v. 29, p. 781–793.

[7] *Потапов М.К., Бериша М.*, Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного // Publications de L'institut Math. (Белград), 1979, т. 26(40), с. 215–228.

[8] *Simonov B., Tichonov S.*, Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness // Journal of Approximation Theory, 2010, v. 162, p. 1654–1684.

О максимальной топологии сходимости в полуупорядоченном пространстве[1]

Федоров В.М.[2]

В этой статье изучаются максимальные топологии в полуупорядоченном пространстве, определяемые порядковой, относительно равномерной и порядково ограниченной сходимостью. Эти топологии являются аффинными. Доказывается, что при условии звездной регулярности соответствующая топологическая сходимость в максимальной топологии равносильна звездной сходимости. Устанавливаются достаточные условия, при которых топологии будут линейными. Дается также описание топологий при помощи индуктивного предела.

Введение

В линейном полуупорядоченном пространстве отношение порядка служит источником различных топологий [1], вообще говоря, не согласованных с его линейной структурой. Они интересны в том смысле, что определяются при помощи отношения порядка. Среди этих топологий существует «естественная», которая является максимальной в решетке топологий по отношению к порядковой сходимости. Она называется *порядковой топологией*. Если в архимедово полуупорядоченном пространстве порядковая сходимость *звездно регулярна*, то удается установить точную связь между порядковой сходимостью и сходимостью в порядковой топологии. При этом условии порядковая топология будет хаусдорфовой в соответствующем факторпространстве.

В первом параграфе статьи вводятся основные обозначения, используемые в дальнейшем. Во втором параграфе определяются понятия *аффинной топологии* и *топологического аффинного пространства*, а также доказываются основные их свойства. В топологическом аффинном пространстве линейные операции раздельно непрерывны, однако не обязаны быть непрерывными по совокупности переменных. В этой топологии определяются понятия *порядковой факторзвездности* и *топологической ограниченности*, а также устанавливается их критерий.

В третьем параграфе в линейном полуупорядоченном пространстве вводится понятия *порядковой* и *относительно равномерной* сходимости, а также устанавливаются основные их свойства. При помощи теоремы 1 в каждом линейном пространстве сходимости можно определить *максимальную аффинную топологию*, как сильнейшую топологию, для которой всякая сходящаяся сеть топологически сходится, а также *минимальную аффинную топологию*, как слабейшую топологию, для которой всякая топологически сходящаяся

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 09-01-00175.

[2]Федоров Владимир Михайлович, vferdorov@rambler.ru, доцент кафедры теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

сеть сходится. Первая топология слабее второй и мы исследуем в основном первую топологию порядковой сходимости. Сходимость в этой топологии, вообще говоря, не совпадает со звездной порядковой сходимостью.

В четвертом параграфе вводится понятие *регулярности* порядковой и относительно равномерной сходимости, а также устанавливаются их критерий и основные свойства. В теореме 6 доказывается, что при условии *звездной регулярности* топологическая сходимость в максимальной топологии равносильна звездной сходимости и, следовательно, полуупорядоченное пространство в этом случае является топологическим линейным пространством соответственно в порядковой топологии или в относительно равномерной топологии.

В пятом параграфа показано, что порядково ограниченная топология в архимедово полуупорядоченном пространстве совпадает с относительно равномерной топологией. Далее мы устанавливаем, что порядково ограниченная топология архимедово полуупорядоченного пространства с порядковой единицей является полунормированной. Отсюда архимедово полуупорядоченное пространство с порождающим положительным клином, но без порядковой единицы, является индуктивным пределом полунормированных пространств. Еще одно *экстремальное свойство* порядково ограниченной топологии состоит в том, что в соответствующем факторпространстве она является сильнейшей среди всех топологий, которые являются факторзвездными.

Следующие два примера показывают, что максимальная топология порядковой сходимости может быть нехаусдорфовой и несогласованной с линейной структурой.

Пример 1 (Флойд Е.)**.** Пусть $\mathcal{B}[0,1]$ обозначает множество ограниченных измеримых функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ относительно σ-алгебы множеств, обладающих свойством Бэра, т.е. представимых в виде симметрической разности открытого множества и множества первой категории. Введем отношение полупорядка: $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in [0,1]$ за исключением множества первой категории. Тогда порядковая сходимость последовательности функций будет равносильна ее порядковой ограниченности и поточечной сходимости на отрезке $[0,1]$ за исключением множества первой категории. Докажем, что порядковая топология не является хаусдорфовой.

Пусть U_0 — открытая окрестность нуля 0 и U_1 — открытая окрестность единицы 1 в порядковой топологии пространства $\mathcal{B}[0,1]$ и $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ — множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Рассмотрим функции $f_{n,m}(x) = 1$, если $x \in (r_n - 1/m,\, r_n + 1/m)$, и $f_{n,m}(x) = 0$, если $x \notin (r_n - 1/m,\, r_n + 1/m)$. При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ эта последовательность $\{f_{n,m}\}$ монотонно сходится $f_{n,m} \searrow 0$ $(m \to \infty)$ к нулю за исключением одной точки. Поэтому найдется такое $m_1 \in \mathbb{N}$, что $f_{1,m_1} \in U_0$. Точно также $f_{1,m_1} \vee f_{2,m} \searrow f_{1,m_1}$ $(m \to \infty)$ за исключением одной точки, поэтому найдется такое $m_2 \in \mathbb{N}$, что $f_{1,m_1} \vee f_{2,m} \in U_0$, и т.д. Пусть $g_n \doteqdot \bigvee_{k=1}^{n} f_{k,m_k} \in U_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{g_n\} \subset U_0$ и монотонно сходится $g_n \nearrow 1$ $(n \to \infty)$ к единице за исключением множества первой категории. Отсюда при некотором $n \in \mathbb{N}$ имеем $g_n \in U_1$. Таким образом, любые окрестности нуля и единицы пересекаются $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ и, значит, порядковая топология пространства $\mathcal{B}[0,1]$ не является хаусдорфовой.

Пример 2 (Смолянов О.Г.)**.** Пусть $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$. Введем отношение порядка: $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Порядковая сходимость последовательности функций в этом пространстве означает равномерную сходимость и ее порядковую ограниченность. Таким образом, все функции сходящейся последовательности должны иметь носитель на одном компакте.

Докажем, что порядковая топология не согласована с линейной структурой пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi_0(x) = 1$, если $x \in [-1, 1]$, $\varphi_0(x) = 0$, если $x \notin [-2, 2]$, линейную на отрезках $[-2, -1]$ и $[1, 2]$. Определим $\psi_{n,k}(x) \doteqdot \frac{1}{n}\varphi_0(x)\sin kx$, $\eta_{n,k}(x) \doteqdot \frac{1}{k}\varphi_0(x-n)$, $\varphi_{n,k}(x) \doteqdot \psi_{n,k}(x) + \eta_{n,k}(x)$ при $n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $S = \{\varphi_{n,k}\} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R})$, $T = \{(\psi_{n,k}, \eta_{n,k})\} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathcal{K}(\mathbb{R})$ и $F(\varphi, \psi) = \varphi + \psi$ операция сложения в пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Тогда $F(T) = S$, при этом множество S порядково замкнуто в $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, а замыкание T в произведении $\mathcal{K}(\mathbb{R})\times\mathcal{K}(\mathbb{R})$ равно $\overline{T} = T \cup (0,0)$. Если бы операция сложения F была непрерывной, то $F(\overline{T}) \subset \overline{F(T)} = \overline{S} = S$. Однако, как только что доказано $F(0,0) = 0 \in F(\overline{T})$, хотя $0 \notin S$. Таким образом, отображение F не является непрерывным и, следовательно, порядковая топология не согласуется с линейной структурой пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

1 Линейные полуупорядоченные пространства

Линейное пространство $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{R}$, в котором определено *рефлексивное* и *транзитивное* отношение полупорядка $x \leqslant y$, согласованное с линейной структурой, называется *полуупорядоченным пространством.* Отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, определяет подпространство $Z \subset \boldsymbol{E}$, как множество элементов $z \in \boldsymbol{E}$, эквивалентных нулю $z \sim 0$.

Множество *положительных* элементов $x \geqslant 0$ полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ образует клин $K \subset \boldsymbol{E}$, т.е. выпуклое коническое множество, в котором Z будет наибольшим подпространством. Если клин $K \subset \boldsymbol{E}$ является *конусом*, т. е. если его наибольшее подпространство тривиально $Z = 0$, то мы получаем отношение *порядка* в пространстве $\boldsymbol{E}$, в котором, кроме того, будет выполняться аксиома *антисимметричности*: если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$. В этом случае $\boldsymbol{E}$ называется *упорядоченным* пространством (см. [2, стр. 26] и [3, стр. 258]).

Порядковым интервалом в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется множество $[x, y] \doteqdot \{z \in \boldsymbol{E} \mid x \leqslant z \leqslant y\}$. Если $x \leqslant y$ не выполняется, интервал $[x, y] = \emptyset$ будет пустым множеством. Всякий порядковый интервал $[x, y]$ является выпуклым, а интервал вида $[-x, x]$ — уравновешенным.

Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ называется *порядково ограниченным* в $\boldsymbol{E}$, если оно содержится в некотором порядковом интервале $A \subset [x, y]$. Положительный элемент $e \in K$, для которого порядковый интервал $[-e, e]$ является поглощающим множеством в $\boldsymbol{E}$, называется *порядковой единицей.*

Предложение 1. *Пусть полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ имеет положительный клин K. Положительный элемент $e \in K$ является порядковой единицей тогда и только тогда, когда он является окруженной точкой клина K.*

Действительно, если порядковый интервал $[-e, e]$ является поглощающим, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ найдется $\delta > 0$, такое, что $\lambda x \in [-e, e]$ при всех $|\lambda| < \delta$. Следовательно, имеет место неравенство $-e \leqslant \lambda x \leqslant e$ при всех $|\lambda| < \delta$. Отсюда следует, что $e + \lambda x \in K$ при всех $|\lambda| < \delta$.

С другой стороны, если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ найдется $\delta > 0$, такое, что выполняется включение $e + \lambda x \in K$ при всех $|\lambda| < \delta$, то имеют место неравенства $e + \lambda x \geqslant 0$ и $e - \lambda x \geqslant 0$ при всех $|\lambda| < \delta$. Отсюда следует включение $\lambda x \in [-e, e]$ при всех $|\lambda| < \delta$ и, следовательно, порядковый интервал $[-e, e]$ является поглощающим.

Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ называется *порядково выпуклым*, если для всех $x, y \in A$ выполняется включение $[x, y] \subset A$. Множество $\mathrm{or}(A) \doteqdot \bigcup_{x,y \in A}[x, y]$, равное пересечению всех порядково выпуклых множеств, содержащих A, называется *порядково выпуклой оболочкой* множества A.

Множество $A \subset B$ называется *крайним множеством* в множестве B линейного пространства $\boldsymbol{E}$, если из принадлежности внутренней точки отрезка $z = (1-t)x + ty \in A$, соединяющего точки $x, y \in B$, вытекает принадлежность его крайних точек $x, y \in A$. Крайние подмножества выпуклого множества называются его *гранями*. Легко видеть, что подклин $\Gamma \subset K$ является *гранью* клина K тогда и только тогда, когда из $x, y \in K$ и $x + y \in \Gamma$ следует, что $x, y \in \Gamma$.

Заметим, что линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является порядково выпуклым, когда его пересечение $\Gamma = L \cap K$ с положительным клином K является гранью этого клина. В частности, наибольшее подпространство $Z \subset K$ положительного клина K является порядково выпуклым. Очевидно, что всякое порядково выпуклое подпространство содержит наибольшее подпространство Z.

Определение 1. *Мажорантой* (*минорантой*) множества $M \subset \boldsymbol{E}$ называется такой элемент $y \in \boldsymbol{E}$, что $x \leqslant y$ ($x \geqslant y$) при всех $x \in M$. Мажоранта (миноранта) множества M называется *верхней границей* (*нижней границей*) M в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$.

Верхней $\sup(M)$ (*нижней* $\inf(M)$) *гранью* множества $M \subset \boldsymbol{E}$ называется наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) граница множества M, т.е. такая мажоранта (миноранта) $y \in \boldsymbol{E}$, что $y \leqslant z$ ($y \geqslant z$) для любой другой мажоранты (миноранты) $z \in \boldsymbol{E}$ множества M.

Заметим, что множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ может не иметь ни одной верхней (нижней) границы, т.е. может быть *неограниченным* сверху (снизу). С другой стороны, если множество ограничено сверху (снизу), то оно не всегда может иметь наименьшую (наибольшую) верхнюю (нижнюю) границу.

Определение 2. Говорят, что множество $A \subset \boldsymbol{E}$ *мажорирует* (*минорирует*) множество $B \subset \boldsymbol{E}$ в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, если для всякого $x \in B$ существуют элемент $y \in A$, такой, что выполняется неравенство $x \leqslant y$ ($y \leqslant x$).

Подпространство $\boldsymbol{E}_0 \subset \boldsymbol{E}_1$ полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}_1$ называется *мажорантным*, если для всякого $x \in \boldsymbol{E}_1$ существует $y \in \boldsymbol{E}_0$, такой, что $x \leqslant y$ (см. [4, стр. 344] и [5, стр. 301]). Подпространство $\boldsymbol{E}_0 \subset \boldsymbol{E}_1$ является мажорантным тогда и только тогда, когда оно мажорирует пространство $\boldsymbol{E}_1$. Из условия мажорирования подпространством $\boldsymbol{E}_0 \subset \boldsymbol{E}_1$ пространства $\boldsymbol{E}_1$ вытекает равенство $\boldsymbol{E}_0 + K_1 = \boldsymbol{E}_0 - K_1$. Если положительный клин $K_1 \subset \boldsymbol{E}_1$ является порождающим, то из равенства $\boldsymbol{E}_0 + K_1 = \boldsymbol{E}_0 - K_1$ следует мажорантность $\boldsymbol{E}_0$.

Определение 3. Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *архимедовым* (или архимедово полуупорядоченным), если из условий $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $nx \leqslant y$ при всех $n \in \mathbb{N}$ вытекает $x \leqslant 0$.

Всякое топологическое полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ замкнут, является архимедовым. Свойство архимедовости полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ равносильно линейной замкнутости положительного клина K, т.е. каждая прямая (или двумерная плоскость) в $\boldsymbol{E}$, пересекающая клин K, пересекает его по замкнутому промежутку (соответственно по замкнутому выпуклому множеству) (см. [6, стр. 38], [3, стр. 280]).

В свою очередь, свойство линейной замкнутости положительного клина K равносильно секвенциальной замкнутости клина в ядерно-выпуклой топологии $\boldsymbol{E}$. Поэтому полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является архимедовым тогда и только тогда, когда из неравенств $y \geqslant 0$ и $x \leqslant ty$ при некотором $t \geqslant 0$ следует $x \leqslant t_1 y$, где $t_1 = \inf\{t \geqslant 0 \mid x \leqslant ty\}$.

Заметим, что каждое порядково полное полуупорядоченное пространство является архимедово полуупорядоченным пространством. В самом деле, пусть $nx \leqslant y$ выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу порядковой полноты существует $z = \sup_{n\geqslant 1}\{nx\}$. Поэтому имеет место неравенство $z + x = \sup_{n\geqslant 1}\{(n+1)x\} \leqslant z$ и, значит, $x \leqslant 0$.

Предложение 2. *Аннулятор $(K^\circ)_\perp$ полярного* клина $K^\circ \subset \boldsymbol{E}'$ является наибольшим подпространством слабо* замкнутого клина $\overline{K}$.*

В самом деле, если элементы $\pm x \in K$, то из неравенства $\alpha(\pm x) \leqslant 0$ вытекает равенство $\alpha(x) = 0$ при всех $\alpha \in K^\circ$. Поэтому получаем включение $Z \subset (K^\circ)_\perp$. С другой стороны, если элементы $x \notin K$ или $-x \notin K$, то по теореме отделимости выпуклых множеств существует такой функционал $\alpha \in K^\circ$, что $\alpha(x) = 1$ или $\alpha(-x) = 1$. Отсюда следует $x \notin (K^\circ)_\perp$ или $-x \notin (K^\circ)_\perp$ соответственно, т. е. $(K^\circ)_\perp \subset Z$.

Предложение 3. *Аннулятор* $L^\perp$ линейной оболочки клина K является наибольшим подпространством полярного* клина K°.*

В самом деле, если функционал $\alpha \in K^\circ$ принадлежит наибольшему подпространству полярного* клина K°, то $\pm\alpha \in K^\circ$, т. е. $\pm\alpha(x) \leqslant 0$ при всех $x \in K$. Отсюда получаем, wrn $\alpha(x) = 0$ при всех $x \in K$ и, значит, $\alpha \in L^\perp$. Обратно, если $\alpha \in L^\perp$, то $\pm\alpha \in K^\circ$ и, следовательно, α принадлежит наибольшему подпространству K°.

Определение 4. Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *полурешеткой*, если любые два его элемента $x, y \in \boldsymbol{E}$ имеют верхнюю грань $\sup(x, y)$ и нижнюю грань $\inf(x, y)$.

Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *порядково полным*, если для любого порядково ограниченного сверху (снизу) множества $A \subset \boldsymbol{E}$ существует верхняя (нижняя) грань $\sup(A)$ $(\inf(A))$. Порядково полная полурешетка называется *вполне полурешеточным* пространством.

Пополнением полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ с положительным клином K называется такое порядково полное полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}_1$ с положительным клином K_1, для которого существует оператор $f_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_1$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

a) оператор f_1 инъективный, монотонный и порядково инъективный, т.е. его ядро равно $\ker(f_1) = 0$ нулю, выполняется включение $f_1(K) \subset K_1$ и имеет место равенство $f_1(Z) = Z_1$;

b) оператор f_1 погружает полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{E}_1$, т.е. если существует верхняя (нижняя) грань $x = \sup(A)$ $(y = \inf(A))$ множества $A \subset \boldsymbol{E}$, то существует верхняя (нижняя) грань множества $f_1(A) \subset \boldsymbol{E}_1$ и равна $f_1(x) = \sup f_1(A)$ $(f_1(y) = \inf f_1(A))$;

c) подпространство $\boldsymbol{E}_0 = f_1(\boldsymbol{E})$ является порядково плотным в $\boldsymbol{E}_1$, т.е. для любого $z \in \boldsymbol{E}_1$ существуют такие множества $B, C \subset \boldsymbol{E}$, что $z = \inf f_1(B) = \sup f_1(C)$.

В работе [7, стр. 130] задача пополнения была решена для полуупорядоченных пространств, т.е. доказано, что для всякого архимедово полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ существует пополнение $\boldsymbol{E}_1$, определяемое однозначно с точностью до изоморфизма полуупорядоченных пространств, сохраняющего верхние и нижние грани.

2 Топологические аффинные полуупорядоченные пространства

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ определена некоторая топология. Если аффинные операции $x \to \lambda_0 x + x_0$ и $\lambda \to \lambda x_0$ являются непрерывными по переменным $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ при всех $x_0 \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, то топология $\boldsymbol{E}$ называется согласованной с аффинной структурой [8, стр. 446].

Если, кроме того, операция умножения на число $(\lambda, x) \to \lambda x$ непрерывна в нуле $(0,0)$, то топология называется *аффинной.* Линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определена аффинная топология, называется *топологическим аффинным пространством.*

Предложение 4. *Топология $\boldsymbol{E}$ является аффинной в том и только в том случае, когда она инвариантна относительно сдвига и существует база окрестностей нуля $\mathfrak{B}_0$, состоящая из поглощающих и уравновешенных множеств.*

В самом деле, пусть топология пространства $\boldsymbol{E}$ является аффинной. Так как операция сдвига $x \to x + x_0$ является гомеоморфизмом, то топология инвариантна относительно сдвига, а так как операция растяжения $x \to \lambda_0 x$ при $\lambda_0 \neq 0$ является гомеоморфизмом, то топология инвариантна относительно растяжения и симметрии. Поскольку операция $\lambda \to \lambda x_0$ также непрерывна, то для любого $x_0 \in \boldsymbol{E}$ и каждой окрестности нуля U существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda x_0 \in U$ при всех $|\lambda| < \varepsilon$, т.е. множество U является поглощающим. Таким образом, для доказательства необходимости достаточно показать, что всякая окрестность нуля U аффинной топологии содержит некоторую уравновешенную окрестность нуля. Действительно, в силу непрерывности операции $(\lambda, x) \to \lambda x$ существует $\varepsilon > 0$ и такая окрестность нуля V, что $\lambda x \in U$ при всех $x \in V$ и $|\lambda| \leqslant \varepsilon$. Пусть $V_\varepsilon = \{\lambda x \mid x \in V, |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$, тогда имеем $\varepsilon V \subset V_\varepsilon$. Следовательно, V_ε есть окрестность нуля, $V_\varepsilon \subset U$ и является уравновешенным множеством.

Обратно, поскольку топология инвариантна относительно сдвига, то операция $x \to x + x_0$ непрерывна. Так как каждое множество $U \in \mathfrak{B}_0$ является поглощающим, то операция $\lambda \to \lambda x_0$ непрерывна. Так как каждое множество $U \in \mathfrak{B}_0$ уравновешено, то операция $(\lambda, x) \to \lambda x$ также непрерывна. Наконец, полагая $V = \mu U$, где величина μ выбрана так, что $0 < \mu|\lambda_0| < 1$, в силу уравновешенности U получим, что $\lambda_0 x \in U$ при всех $x \in V$, т.е. операция $x \to \lambda_0 x$ непрерывна.

Теорема 1. *Если система множеств $\mathfrak{U}_0$ пространства $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет условиям:*

1) *для любых U, $V \in \mathfrak{U}_0$ пересечение $U \cap V \in \mathfrak{U}_0$;*

2) *для любого $U \in \mathfrak{U}_0$ включение $U \subset V$ влечет $V \in \mathfrak{U}_0$;*

3) *для любых $U \in \mathfrak{U}_0$ и $\lambda \neq 0$ произведение $\lambda U \in \mathfrak{U}_0$;*

4) *каждое множество $U \in \mathfrak{U}_0$ является поглощающим;*

5) *для каждого $U \in \mathfrak{U}_0$ найдется ураовешенное $V \in \mathfrak{U}_0$, такое, что $V \subset U$,*

то существует максимальная (минимальная) аффинная топология в пространстве $\boldsymbol{E}$, у которой система окрестностей нуля содержится в $\mathfrak{U}_0$ (содержит $\mathfrak{U}_0$).

Если, кроме того, система множеств $\mathfrak{U}_0$ удовлетворяет еще следующему условию:

б) для каждого $U \in \mathfrak{U}_0$ найдется такое $V \in \mathfrak{U}_0$, что $V \subset U$ и $U \in \mathfrak{U}_0 + x$ при всех $x \in V$,

то существует единственная аффинная топология с системой окрестностей нуля $\mathfrak{U}_0$.

Доказательство. Так как во всякой аффинной топологии в $\boldsymbol{E}$ операция сдвига $x \to x+x_0$ является гомеоморфизмом, то можно определить систему окрестностей для любой точки $x \in \boldsymbol{E}$, полагая $\mathfrak{U}_x \doteqdot \{V \subset \boldsymbol{E} \mid V = U + x,\, U \in \mathfrak{U}_0\}$. Определим максимальную топологию $\tau_{\max}$ в $\boldsymbol{E}$, взяв в качестве открытых множеств $A \subset \boldsymbol{E}$ множества, удовлетворяющие следующему условию: для всякой точки $x \in A$ существует такое $U \in \mathfrak{U}_x$, что $U \subset A$. Тогда объединение любой системы открытых множеств является открытым множеством. В силу условия (1) пересечение любой конечной системы открытых множеств является открытым множеством. Нетрудно заметить, что при таком определении топология $\tau_{\max}$ является аффинной. Поскольку всякая окрестность нуля U в топологии $\tau_{\max}$ содержит открытую окрестность нуля, которая принадлежит $\mathfrak{U}_0$, то по условию (2) получим $U \in \mathfrak{U}_0$. Следовательно, τ_{max} — максимальная аффинная топология в пространстве $\boldsymbol{E}$, у которой система окрестностей нуля содержится в $\mathfrak{U}_0$.

Предположим теперь, что выполнено (б). В свойстве (б) утверждается, что всякая окрестность $U \in \mathfrak{U}_0$ содержит открытую окрестность $V \in \mathfrak{U}_0$, где в качестве V можно взять множество всех внутренних точек окрестности U, т.е. таких точек $y \in U$, что выполняется включение $U \in \mathfrak{U}_y$. Для каждого $U \in \mathfrak{U}_0$ рассмотрим множество $U_0 \doteqdot \{y \in U \mid U \in \mathfrak{U}_y\}$ и докажем, что U_0 непустое открытое множество топологии $\tau_{\max}$. Так как $0 \in U$, то $U_0 \neq \emptyset$. Далее, если $y \in U_0$, то $U - y \in \mathfrak{U}_0$. Поэтому в силу условия (f) существует $V \in \mathfrak{U}_0$, такая, что $U - y \in \mathfrak{U}_z$ при всех $z \in V$. Полагая $V_y = V + y$, мы получим элемент $V_y \in \mathfrak{U}_y$ и $U \in \mathfrak{U}_z$ при всех $z \in V_y$. Отсюда по определению множества U_0 мы имеем включение $V_y \subset U_0$. Таким образом, $U_0 \in \tau_{\max}$ и, следовательно, U является окрестностью нуля в топологии $\tau_{\max}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ всех аффинных топологий τ пространства $\boldsymbol{E}$, у которых система окрестностей нуля $\mathfrak{U}_0^\tau$ содержит $\mathfrak{U}_0$. Так как каждая топология τ является аффинной, то $\mathfrak{U}_0^\tau$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3), (4), (5), (б). Поэтому $\mathfrak{U}_0^\tau$ не совпадает с $\mathfrak{U}_0$, поскольку $\mathfrak{U}_0$ не удовлетворяет условию (f). Одной из таких топологий является *конечно аффинная* топология τ_a, в которой множество $A \subset \boldsymbol{E}$ открыто тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap F$ с каждой конечномерной аффинной плоскостью $F \subset \boldsymbol{E}$ является открытым множеством в единственной хаусдорфовой линейной топологии на этой плоскости F. Легко проверить, что топология τ_a аффинно инвариантна. Докажем, что операция умножения $(\lambda, x) \to \lambda x$ непрерывна в нуле $(0, 0)$.

Для каждой открытой окрестности нуля $U \in \mathfrak{U}_0^{\tau_a}$ рассмотрим множество $V \doteqdot \{v \in \boldsymbol{E} \mid [-1,1]v \subset U\}$. Тогда $V \neq \emptyset$. Докажем, что $V \in \mathfrak{U}_0^{\tau_a}$ — конечно открытая окрестность нуля. Пусть $F \subset \boldsymbol{E}$ есть некоторое конечномерное подпространство и $v \in V \cap F$. Покажем, что v будет внутренней точкой множества $V \cap F$. Так как множество $[-1,1]v \subset U \cap F$ является компактным подмножеством открытого множества в F, то существует такая открытая окрестность нуля $N \subset F$, что $[-1,1]v + N \subset U \cap F$, и в силу линейности топологии F найдется такая окрестность нуля $N_0 \subset F$, что $[-1,1]N_0 \subset N$, т.е. $[-1,1](v + N_0) \subset U \cap F$. Отсюда по определению V имеем $v + N_0 \subset V \cap F$.

Таким образом, топология τ_a является аффинной и ее база окрестностей нуля $\mathfrak{U}_0^{\tau_a}$ состоит из всех поглощающих и уравновешенных множеств пространства $\boldsymbol{E}$. Значит множество топологий $\tau \in \mathcal{T}$ удовлетворяет неравенству $\tau_{\max} \subset \tau \subset \tau_c$. Пусть $\tau_{\min}$ будет минимальной топологией из всех топологий системы $\mathcal{T}$. Элементы топологии $\tau_{\min}$ будут принадлежать каждой из топологий системы $\mathcal{T}$. Следовательно, топология $\tau_{\min}$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3), (4), (5), при этом условие (6) выполняется автоматически. Если система $\mathfrak{U}_0$ не удовлетворяет условию (6), то она не совпадает с системой окрестностей нуля топологии $\tau_{\min}$. □

Определение 5. Пусть $\boldsymbol{E}$ — линейное пространство, в котором задана аффинная топология. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ называется *ограниченным* в аффинной топологии, если для каждой окрестности нуля $U \in \mathfrak{U}_0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что включение $\lambda A \subset U$ выполняется при всех $|\lambda| < \varepsilon$.

Если аффинная топология τ_1 слабее аффинной топологии τ_2 в пространстве $\boldsymbol{E}$, т.е. $\tau_1 \subset \tau_2$, то из ограниченности множества в топологии τ_2 следует его ограниченность в топологии τ_1. Таким образом, ограниченных множеств в пространстве $(\boldsymbol{E}, \tau_1)$ больше, чем в $(\boldsymbol{E}, \tau_2)$.

Предложение 5. *Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным в топологическом аффинном пространстве $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае, когда для всякой последовательности точек $\{x_n\} \subset A$ и для любой последовательности чисел $\{\lambda_n\}$, стремящейся к нулю* $\lim \lambda_n = 0$, *предел* $\lim \lambda_n x_n = 0$ *равен нулю.*

В самом деле, если множество $A \subset \boldsymbol{E}$ ограничено и $U \in \mathfrak{U}_0$ является окрестностью нуля, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\lambda A \subset \boldsymbol{E}$ при всех $|\lambda| < \varepsilon$. Тогда найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\lambda_n| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, если $\{x_n\} \subset A$, то $\lambda_n x_n \in U$ при всех $n \geqslant N$.

Обратно, предположим, что множество $A \subset \boldsymbol{E}$ не является ограниченным. Тогда существует такая окрестность нуля $U \in \mathfrak{U}_0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ множество $\frac{1}{n} A \not\subseteq U$. Поэтому найдется такая последовательность точек $\{x_n\} \subset A$, что $\frac{1}{n} x_n \notin U$. Ясно, что последовательность $\{\frac{1}{n} x_n\}$ не сходится к нулю в топологии $\boldsymbol{E}$.

Следствие 1. *Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ ограничено в топологическом аффинном пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда всякая последовательность его точек $\{x_n\} \subset A$ ограничена.*

Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ называется *секвенциально ограниченным* в линейном пространстве сходимости $\boldsymbol{E}$, если для всякой последовательности точек $\{x_n\} \subset A$ и для любой последовательности чисел $\{\lambda_n\}$, сходящейся к нулю $\lim \lambda_n = 0$, предел в $\boldsymbol{E}$ произведения $\lim \lambda_n x_n = 0$ равен нулю. Рассмотрим в линейном пространстве сходимости $\boldsymbol{E}$ его максимальную $\tau_{\max}$ и минимальную $\tau_{\min}$ аффинные топологии, соответствующие данной сходимости (см. ниже). Тогда из секвенциальной ограниченности множества следует его ограниченность в топологии $\tau_{\max}$, а из ограниченности множества в топологии $\tau_{\min}$ следует его секвенциальная ограниченность.

Далее будем обозначать через $\mathrm{st}(A) \doteqdot \bigcup_{y \in A} [0, y] = K \cap (A - K)$ *порядковую звезду* множества $A \subset \boldsymbol{E}$ в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ будем называть *порядково звездным*, если имеет место включение $\mathrm{st}(A) \subset A$. Легко видеть, что $\mathrm{st}(A \cup B) = \mathrm{st}(A) \cup \mathrm{st}(B)$. *Порядково звездной оболочкой* множества $A \subset \boldsymbol{E}$ называется $\mathrm{sth}(A) \doteqdot (A + Z) \cup \mathrm{st}(A)$.

Определение 6. Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ задана аффинная топология и полупорядок определяется клином $K \subset \boldsymbol{E}$, у которого $Z \subset K$ является наибольшим подпространством.

Топология пространства $\boldsymbol{E}$ называется *порядково факторзвездной*, если существует такая база $\mathfrak{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ окрестностей нуля фактортопологии пространства $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/Z$, что для каждого $i \in I$ найдется такое $j \in I$, для которого выполняется включение $\mathrm{st}(U_j) \subset U_i$.

В случае, если подпространство $Z = 0$, т.е. положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ является конусом, порядково факторзвездная топология пространства $\boldsymbol{E}$ называется *порядково звездной.*

Если полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является линейным топологическим пространством, то порядковая звездность (факторзвездность) топологии $\boldsymbol{E}$ будет равносильна соответственно порядковой выпуклости (факторвыпуклости) [9, стр. 28].

Предложение 6. *Понятие порядково факторзвездной топологии в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ равносильно одному из следующих условий:*

(a) для каждой базы $\mathfrak{C} = \{V_j\}_{j\in J}$ окрестностей нуля топологии $\boldsymbol{E}$ порядково звездные оболочки $\{\mathrm{sth}(V_j) \mid j \in J\}$ составляют базу окрестностей нуля в $\widehat{\boldsymbol{E}}$;

(b) существует такая база $\mathfrak{D} = \{W_j\}_{j\in J}$ окрестностей нуля фактортопологии в $\widehat{\boldsymbol{E}}$, что выполняется включение $\mathrm{st}(W_j) \subset W_j$ при всех $j \in J$.

(c) для любых подобных сетей $S = \{s_i\}_{i\in I}$ и $T = \{t_i\}_{i\in I}$, таких, что $0 \leqslant s_i \leqslant t_i$ при всех $i \in I$, из сходимости T к нулю $\lim T = 0$ следует сходимость S к нулю $\lim S = 0$.

Пусть $\mathfrak{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ — база окрестностей нуля факторзвездной топологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$, удовлетворяющая указанному в определении условию, и $\mathfrak{C} = \{V_j\}_{j\in J}$ — произвольная база окрестностей нуля $\boldsymbol{E}$. Для любых $i, j \in I$ существует $k \in J$, такое, что $V_k + Z \subset U_i \cap U_j$. Поэтому $\mathrm{st}(V_k) \subset \mathrm{st}(U_j) \subset U_i$ и, следовательно, $\mathrm{sth}(V_k) \subset U_i$. Отсюда имеем (a). Полагая $W_j \doteqdot \mathrm{sth}(V_j)$, из (a) получим (b).

Предположим, что выполнено свойство (b), сети $S = \{s_i\}_{i\in I}$ и $T = \{t_i\}_{i\in I}$ удовлетворяют условию $0 \leqslant s_i \leqslant t_i$ при всех $i \in I$ и сеть T сходится к нулю $\lim T = 0$. Тогда для каждого $j \in J$ существует $k \in I$, такой, что $t_i \in W_j$ при всех $i \geqslant k$. Отсюда по предположению $s_i \in \mathrm{st}(W_j) \subset W_j$ при всех $i \leqslant k$. Поэтому сеть S сходится к нулю $\lim S = 0$.

Теперь предположим, что топология $\boldsymbol{E}$ не является порядково факторзвездной. Тогда для любой базы $\mathfrak{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ окрестностей нуля фактортопологии пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$ существует такое $i \in I$, что для всякого $j \in I$ не выполняется включение $\mathrm{st}(U_j) \subset U_i$. Поэтому найдутся такие точки $t_j \in U_j$ и $s_j \in \mathrm{st}(U_j) \setminus U_i$, что $0 \leqslant s_j \leqslant t_j$ при всех $j \in I$. Будем считать, что множество индексов I упорядочено отношением включения соответствующих элементов базы $\mathfrak{B}$. Тогда сеть $T = \{t_j\}_{j\in I}$ сходится к нулю $\lim T = 0$, однако сеть $S = \{s_j\}_{j\in I}$ не сходится к нулю.

Следствие 2. *Если топология полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ является факторзвездной и множество $A \subset \boldsymbol{E}$ ограничено в фактортопологии пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$, то его порядково звездная оболочка $\mathrm{sth}(A)$ ограничена в пространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$. В частности, всякий порядковый интервал $[x, y]$ является ограниченным в фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$.*

Действительно, для каждой окрестности нуля $U \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$ обозначим через $V \subset U$ уравновешенную порядково звездную окрестность нуля $U \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda A \subset V$ при всех $|\lambda| < \varepsilon$. Поэтому $\lambda \mathrm{sth}(A) = \mathrm{sgn}(\lambda)\mathrm{sth}(|\lambda|A) \subset \mathrm{sgn}(\lambda)\mathrm{sth}(V) =$

$\operatorname{sgn}(\lambda)V = V \subset U$ и, значит, порядково звездная оболочка $\operatorname{sth}(A)$ ограничена в $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Следовательно, в полунормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ топология является факторзвездной тогда и только тогда, когда порядково звездная оболочка $\operatorname{sth}(\widehat{\boldsymbol{S}})$ единичного шара $\widehat{\boldsymbol{S}} \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$ ограничена в $\widehat{\boldsymbol{E}}$.

Следствие 3. *Пусть топология τ полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ с положительным клином $K \subset \boldsymbol{E}$ является факторзвездной. Тогда топология $\overline{\tau}$, порожденная замкнутыми окрестностями нуля, является факторзвездной в пространстве $\boldsymbol{E}$, которое полуупорядочено замкнутым положительным клином $\overline{K} \subset \boldsymbol{E}$.*

Выберем базу $\mathfrak{D} = \{V_j\}_{j \in J}$ окрестностей нуля фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$, состоящую из порядково звездных множеств. Тогда $\overline{K} \cap (\overline{V}_j - \overline{K}) \subset \overline{\operatorname{st}(V_j)} \subset \overline{V}_j$. Следовательно, система $\overline{\mathfrak{D}} = \{\overline{V}_j\}_{j \in J}$ замкнутых порядково звездных множеств относительно замкнутого клина $\overline{K} \subset \boldsymbol{E}$ образуют базу окрестностей нуля фактортопологии по подпространству $\overline{Z}$. Таким образом, топология является факторзвездной относительно замкнутого клина.

Определение 7. Топологическое линейное (аффинное) пространство $\boldsymbol{E}$, в котором структура линейного полуупорядоченного пространства определяется замкнутым клином $K \subset \boldsymbol{E}$, называется *топологическим линейным (аффинным) полуупорядоченным* пространством или просто топологическим полуупорядоченным пространством, если нет путаницы. В этом случае говорят, что топология в $\boldsymbol{E}$ согласуется со структурой линейного полуупорядоченного пространства.

Пусть $\boldsymbol{E}^*$ ($\boldsymbol{E}'$) обозначает (соответственно топологически) *сопряженное пространство*, т.е. множество всех линейных (непрерывных) функционалов на пространстве $\boldsymbol{E}$.

В сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$ ($\boldsymbol{E}'$) вводится отношение *сопряженного полупорядка* по правилу: $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$ при всех $x \in K$, и определяется *сопряженный клин* $K^* = -K^\circ$ ($K' = -K^\circ$) всех линейных (непрерывных) положительных функционалов, где поляры $K^\circ \subset \boldsymbol{E}^*$ ($\boldsymbol{E}'$) берутся относительно двойственности $\langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}^* \rangle$ ($\langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}' \rangle$). Таким образом, в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$ ($\boldsymbol{E}'$) естественным путем определяется структура (топологического) линейного полуупорядоченного пространства. При этом подпространство $\boldsymbol{E}^o = K^* - K^* \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *порядково сопряженным* к пространству $\boldsymbol{E}$.

Для того чтобы успешно применять двойственность при исследовании полуупорядоченных пространств $\boldsymbol{E}$, требуется достаточно много положительных функционалов, а именно, чтобы $\boldsymbol{E}^o$ являлось тотальным на $\widehat{\boldsymbol{E}}$, т.е. порядково сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^o$ разделяло точки $\widehat{\boldsymbol{E}}$. В этом случае говорят, что линейные пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{E}^o$ находятся в двойственности $\langle \widehat{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{E}^o \rangle$. Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ будем называть *порядково регулярным*, если оно является архимедово полуупорядоченным и его порядково сопряженное $\boldsymbol{E}^o$ тотально на $\widehat{\boldsymbol{E}}$.

Предложение 7. *Порядковая регулярность $\boldsymbol{E}$ равносильна одному из следующих условий:*

a) положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ секвенциально замкнут в некоторой аффинной топологии (в том числе локально выпуклой) и порядково сопряженное $\boldsymbol{E}^o$ тотально на $\widehat{\boldsymbol{E}}$;

b) полупорядок пространства $\boldsymbol{E}$ архимедов и его слабая топология $\sigma(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}^o)$ является порядково факторзвездной.

Для доказательства (a) нужно показать, что пересечение клина $K \cap M$ с конечномерным подпространством M является секвенциально замкнутым в единственной хаусдорфовой топологии, относительно которой M является топологическим линейным пространством [3, стр. 34].

Можно считать, что $\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}}(M \cap K) = n$. Выберем линейно независимые элементы $e_1, \ldots, e_n \in M \cap K$. Каждая внутренняя точка $y \in \Delta_n$ симплекса с вершинами $0, e_1, \ldots, e_n$ является внутренней точкой пересечения $M \cap K$. Если $x \in \overline{M \cap K}$, то $z = (1 - 1/n)x + y/n$ является внутренней точкой $M \cap K$. Поэтому $-nx \leqslant (y - x)$ и, значит, $x \geqslant 0$.

Если выполнено условие (a), то полупорядок архимедовый. Поскольку $\boldsymbol{E}^o$ тотально на $\widehat{\boldsymbol{E}}$, то $\widehat{\boldsymbol{E}}' = \boldsymbol{E}^o$ относительно слабой топологии и в силу следствия 6 [9, стр. 33] пространство $\boldsymbol{E}$ является слабо порядково факторзвездным. Обратно, из слабой порядковой факторзвездности вытекает равенство $\widehat{\boldsymbol{E}}' = \boldsymbol{E}^o$ и, следовательно, пространство $\boldsymbol{E}^o$ тотально на $\widehat{\boldsymbol{E}}$.

Следствие 4. *Всякое локально выпуклое полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является регулярно полуупорядоченным.*

Так как клин $K \subset \boldsymbol{E}$ замкнут, то пространство $\boldsymbol{E}$ будет архимедовым. В силу предложения 2 аннулятор подпространства $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(K') = K' - K' \subset \boldsymbol{E}^o = K^* - K^*$ равен $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(K')_{\perp} = Z$. Отсюда по теореме о биполяре линейная оболочка $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(K')$ слабо* плотна в $\widehat{\boldsymbol{E}}' = Z^{\perp}$. Таким образом, подпространство $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(K')$ и, тем более, пространство $\boldsymbol{E}^o$, являются тотальными на $\widehat{\boldsymbol{E}}$.

Определение 8. Множество $D \subset \boldsymbol{E}$ называется *направлением* по возрастанию (по убыванию) в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, если для любых $x, y \in D$ существует такой элемент $z \in D$, что $x, y \leqslant z$ (соответственно $x, y \geqslant z$).

Направление $D \subset \boldsymbol{E}$ называется *сходящимся* в топологии пространства $\boldsymbol{E}$ к элементу $x_0 \in \boldsymbol{E}$, если для любой окрестности нуля $U \subset \boldsymbol{E}$ найдется такой элемент $y \in D$, что $D_y \subset U + x_0$, где $D_y \doteqdot \{x \in D \mid x \geqslant y\}$ обозначает *сечение* множества D, направленного по возрастанию.

В топологическом полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ предел $\lim D$ направления $D \subset \boldsymbol{E}$, а также верхняя $\sup M$ и нижняя $\inf M$ грани множества $M \subset \boldsymbol{E}$, если они существуют, то определяются по модулю Z, что обозначается символом $(\mathrm{mod}\ Z)$.

Предложение 8. *Если направление по возрастанию $D \subset \boldsymbol{E}$ в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ сходится относительно некоторой топологии, в которой положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ замкнут, к элементу $x_0 = \lim D$, то его верхняя грань равна* $\sup D = x_0$ $(\mathrm{mod}\ Z)$.

В самом деле, если $x_1 \in \boldsymbol{E}$ является мажорантой направления D, то $y \leqslant x \leqslant x_1$ при всех $x \in D_y$ и $y \in D$. Поскольку для любого сечения D_y выполняется включение $x_0 \in \overline{D}_y$ [16, стр. 104] и положительный клин замкнут, то $y \leqslant x_0 \leqslant x_1$. Поэтому $x_0 = \sup D$ $(\mathrm{mod}\ Z)$.

Следующая теорема *о монотонной сходимости* в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ представляет собой абстрактный вариант классической *теоремы Дини* [10, стр. 166], согласно которой всякое направление в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$ непрерывных функций на компакте X, сходящееся поточечно к непрерывной функции, сходится равномерно. Ее можно вывести из классической теоремы Дини, используя теорему об изоморфизме локально выпуклого полуупорядоченного пространства некоторому подпространству $\boldsymbol{C}(X)$. Однако существует ее прямое доказательство при помощи теоремы отделимости выпуклых множеств.

Теорема 2. *Предположим, что локально выпуклое полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является порядково факторзвездным. Тогда, если направление $D \subset \boldsymbol{E}$ сходится в слабой топологии $\sigma(\widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\boldsymbol{E}}')$, то оно сходится в топологии факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$.*

Доказательство. В силу доказанного выше предложения 8, мы можем предполагать, что D направлено по убыванию и $\lim D = 0$, где $D \subset K$. Если утверждение этой теоремы не верно, то найдется выпуклая окрестность нуля U фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$, не содержащая сечений D. Так как топология порядково факторвыпукла [9, стр. 29], то U можно считать порядково выпуклой.

Если $y \in D \cap U$, то выполняется включение $D_y \doteqdot \{x \in D \mid 0 \leqslant x \leqslant y\} \subset U$. Поэтому пересечение $D \cap U = \emptyset$ пусто. Кроме того, $(D + K) \cap U = \emptyset$ пусто. В самом деле, если $y \in (x + K) \cap U$ и $x \in D$, то $[0, y] \subset U$ в силу порядковой выпуклости окрестности U. Так как $0 \leqslant x \leqslant y$, то $x \in U$ и мы пришли к противоречию с нашим предположением выше.

Докажем, что $D + K$ выпукло. Если $x, y \in D$, то по условию найдется $z \in D$ такой, что $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$. Отсюда следует $(x + K) \cup (y + K) \subset z + K$, т. е. множество $D + K$ является объединением выпуклых множеств, направленных по включению, и, следовательно, выпукло. По теореме отделимости существует замкнутая гиперплоскость, разделяющая выпуклые множества $D + K$ и U, что противоречит слабой сходимости направления D. $\square$

Следствие 5. *Предположим, что локально выпуклое полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является порядково факторзвездным и задано такое направление D по возрастанию, что существует верхняя грань $\sup D = x_0$.*

Тогда, если выполняется равенство $\sup f(D) = f(x_0)$ для всех положительных функционалов $f \in K'$, то существует равномерный предел $\lim f(D) = f(x_0)$ на всяком равностепенно непрерывном подмножестве $A \subset \widehat{\boldsymbol{E}}'$.

Действительно, в силу следствия 6 [9, стр. 33] выполняется равенство $\widehat{\boldsymbol{E}}' = K' - K'$. Поэтому слабая сходимость направления $D \to x_0$ равносильна соотношению $\sup f(D) = f(x_0)$ при всех $f \in K'$. Отсюда по теореме 2 направление сходится $D \to x_0$ в фактортопологии пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Так как множество $A \subset \widehat{\boldsymbol{E}}'$ является равностепенно непрерывным, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая симметричная окрестность нуля $U \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$, что $f(U) < \varepsilon$ при всех $f \in A$. Поэтому в силу сходимости направления $D \to x_0$ существует такое сечение D_y, что $f(x_0) - f(D_y) < \varepsilon$ при всех $f \in A$. Таким образом, предел $\lim f(D) = f(x_0)$ является равномерным на всяком равностепенно непрерывном подмножестве $A \subset \widehat{\boldsymbol{E}}'$.

Нетрудно заметить, что утверждение этого следствия равносильно утверждению теоремы 2. Следующее предложение является частичным обращением утверждения предложения 8.

Предложение 9. *Пусть локально выпуклое полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является полурефлексивным и порядково факторзвездным. Тогда для любого порядково (или топологически) ограниченного направления $D \subset \boldsymbol{E}$ по возрастанию существует верхняя грань $x_0 = \sup D$ и направление сходится к элементу $x_0 = \lim D$ в фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$.*

Так как $\sup D = \sup D_x$ при любом $x \in D$, то достаточно показать, что у сечения D_x существует верхнюю грань. Если элемент $z \in \boldsymbol{E}$ является верхней границей D, то имеет место включение $D_x \subset [x, z]$, и, поэтому, в силу следствия 1 [9, стр. 29] сечение D_x является ограниченным в фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Отсюда $f(D_x)$ является направлением Коши в $\mathbb{R}$ при всех $f \in K'$.

Поскольку согласно следствию 6 [9, стр. 33] порядковая факторзвездность $\boldsymbol{E}$ влечет равенство $\widehat{\boldsymbol{E}}' = K' - K'$, то сечение D_x является слабой направленностью Коши относительно двойственности $\langle \widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\boldsymbol{E}}' \rangle$. А так как по условию полурефлексивности пространство $\boldsymbol{E}$ является ограниченно слабо полным [3, стр. 183], то существует слабый предел $x_0 = \lim D_x$. Применяя теперь предложение 8, получаем равенство $x_0 = \sup D_x$, Таким образом, из теоремы 2 следует, что предел $x_0 = \lim D_x$ существует в фактортопологии $\widehat{\boldsymbol{E}}$.

3 Максимальная топология порядковой и относительно равномерной сходимости

Сетью $S = \{s_i\}_{i \in I}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется функция $S : I \to \boldsymbol{E}$, заданная на направленном множестве индексов I и принимающая значения $S(i) = s_i \in \boldsymbol{E}$ при всех $i \in I$ (см. [11, стр. 40] и [1, стр. 279]). Это свойство сети S обозначается далее через $S \subset \boldsymbol{E}$.

Определение 9. Сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ называется *порядково ограниченной* в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее некоторое сечение $S_k = \{s_i\}_{i \geqslant k}$ порядково ограничено в $\boldsymbol{E}$.

Сеть S называется *возрастающей* (*убывающей*), если функция $S : I \to \boldsymbol{E}$, определенная на направленном множестве I, является возрастающей (соответственно убывающей), т.е. имеет место неравенство $s_i \leqslant s_j$ $(s_i \geqslant s_j)$ при всех $i \leqslant j$.

Будем говорить, что множество A *мажорирует* $A \succ S$ (*минорирует* $A \prec S$) сеть S, если для каждого $a \in A$ найдется такой индекс $i_a \in I$, что $s_i \leqslant a$ $(s_i \geqslant a)$ при всех $i \geqslant i_a$.

Сеть S называется *порядково сходящейся* (или *o-сходящейся*) в пространстве $\boldsymbol{E}$ к точке $\lim S = x$, если существует направление A по убыванию, мажорирующее сеть S, и направление B по возрастанию, минорирующая сеть S, такие, что $\inf A = \sup B = x \pmod Z$ (см. [11, стр. 55] [4, стр. 42], [5, стр. 41] и [6, стр. 39]).

Сеть S называется *относительно равномерно сходящейся* (или *r-сходящейся*) в $\boldsymbol{E}$ к точке $\lim S = x$, если существует положительный элемент $a \in K$ и направление положительных чисел по убыванию $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, имеющее нижнюю грань $\inf \Lambda = 0$, причем такие, что сеть Λa мажорирует сеть $S - x$, а сеть $-\Lambda a$ минорирует сеть $S - x$. Элемент $a \in K$ называют *регулятором сходимости* сети S, а r-сходимость сети в полуупорядоченной линейной решетке чаще всего называется *сходимостью с регулятором* (см. [1, стр. 473], [4, стр. 167], [5, стр. 82]).

Заметим, что в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ всякая возрастающая и убывающая сети являются соответственно направлениями по возрастанию и по убыванию. При этом сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ o-сходится к точке $x \in \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда существует положительное направление $D \subset K$ по убыванию, имеющее нижнюю грань $\inf(D) = 0$, такое, что D мажорирует сеть $S - x$ и $-D$ минорирует сеть $S - x$. В самом деле, для доказательства необходимости достаточно взять в качестве направления $D = A - B$, где направления A и B взяты из определения o-сходимости, тогда $\inf(D) = \inf(A - x) + \inf(x - B) = 0$. Для доказательства достаточности полагаем $A = x + D$ и $B = x - D$, тогда условия мажорирования и минорирования сети S будут выполнены.

Следовательно, если полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является полурешеткой, то условие o-сходимости сети S к точке $x \in \boldsymbol{E}$ равносильно тому, что положительное направление D, имеющее нижнюю грань $\inf(D) = 0$, мажорирует сеть $S - x$.

Если полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является порядково полным, то можно ввести понятие *верхнего* $\overline{\lim}\, S$ и *нижнего* $\underline{\lim}\, S$ порядкового предела порядково ограниченной сети $S = \{s_i\}_{i \in I}$, полагая

$$\overline{\lim}\, S \doteqdot \inf_{k \in I}\{\sup S_k\}\,, \quad \underline{\lim}\, S \doteqdot \sup_{k \in I}\{\inf S_k\}\,.$$

где $S_k = \{s_i\}_{i \geqslant k}$ — сечения сети S. Ясно, что сеть S в полном полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ o-сходится тогда и только тогда, когда она порядково ограничена в $\boldsymbol{E}$ и верхний и нижний пределы совпадают $\overline{\lim} S = \underline{\lim} S \pmod Z$.

Предложение 10. *Для того чтобы возрастающая (убывающая) сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ порядково сходилась к элементу $x \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала верхняя (нижняя) грань этой сети и $\sup S = x$ ($\inf S = x$)* $\pmod Z$.

Если сеть $S = \{s_i \mid i \in I\}$ возрастает и сходится к s_0, то существуют направление A по убыванию, мажорирующее сеть S, и направление B по возрастанию, минорирующее сеть S, и такие, что будут иметь место равенства $\inf A = \sup B = x \pmod Z$.

Тогда для любого $a \in A$ существует $i_a \in I$, такое, что $s_i \leqslant a$ при всех $i \geqslant i_a$. Но для любого $i \in I$ найдется $j \geqslant i, i_a$, а потому $s_i \leqslant s_j \leqslant a$ при всех $i \in I$ и $a \in A$. Отсюда вытекает, что $s_i \leqslant s_0$. Далее, если $x \geqslant s_i$ при всех $i \in I$, то, ясно, что $x \geqslant b$ при всех $b \in B$, а потому $x \geqslant s_0$. Таким образом, доказано, что $x = \sup S \pmod Z$. Обратное очевидно.

Предложение 11. *Если сети $S = \{s_i\}_{i \in I}$ и $R = \{r_j\}_{j \in J}$ порядково сходятся соответственно к x и y, при этом сеть S минорирует сеть R (или R мажорирует сеть S), то $x \leqslant y$. В частности, предел порядково сходящейся сети является единственным по модулю* $\pmod Z$.

Пусть направление A по убыванию мажорирует сеть R и направление B по возрастанию минорирует сеть S, при этом $\inf A = y$ и $\sup B = x \pmod Z$. Тогда для любого $a \in A$ найдется такой индекс $j_a \in J$, что $r_j \leqslant a$ при всех $j \geqslant j_a$, и для любого $b \in B$ найдется такой индекс $i_b \in I$, что $s_i \geqslant b$ при всех $i \geqslant i_b$. Кроме того, существует такой индекс $j_b \in J$, что $s_{i_b} \leqslant r_j$ при всех $j \geqslant j_b$. Следовательно, для всяких $a \in A$ и $b \in B$ найдутся такие индексы $i_b \in I$ и $j_b \in J$, что $b \leqslant s_{i_b} \leqslant r_{j_b} \leqslant a$. Таким образом, имеем $b \leqslant a$ при всех $a \in A$ и $b \in B$. Отсюда $x \leqslant y$.

Предложение 12. *Если в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ сети S_1, $S_2 \subset \boldsymbol{E}$ порядково сходятся и число $\lambda \in \mathbb{R}$, то*

$$\lim\, S_1 + \lim\, S_2 = \lim\,(S_1 + S_2)\,, \quad \lambda \lim S_1 = \lim(\lambda S_1) \pmod Z\,.$$

По условию направления A_1 и A_2 по убыванию мажорируют сети $S_1 = \{s^1_{i_1} \mid i_1 \in I_1\}$ и $S_2 = \{s^2_{i_2} \mid i_2 \in I_2\}$ соответственно, а направления B_1 и B_2 по возрастанию минорируют сети S_1 и S_2 соответственно, и при этом $\inf A_1 = \sup B_1$ и $\inf A_2 = \sup B_2$.

Тогда сумма убывающих направлений $A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 \mid (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2\}$ мажорирует сумму сетей $S_1 + S_2 = \{s^1_{i_1} + s^2_{i_2} \mid (i_1, i_2) \in I_1 \times I_2\}$, а сумма возрастающих направлений $B_1 + B_2 = \{b_1 + b_1 \mid (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2\}$ минорирует сумму сетей $S_1 + S_2$, и имеет место равенство $\pmod Z$

$$\inf(A_1 + A_2) = \inf_{(a_1, a_2) \in (A_1 \times A_2)} (a_1 + a_2) = \inf_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} (a_1 + a_2) =$$

$$\sup_{b_1 \in B_1} \sup_{b_2 \in B_2} (b_1 + b_2) = \sup_{(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2} (b_1 + b_2) = \sup(B_1 + B_2)\,.$$

Здесь в произведении $I_1 \times I_2$ направленных множеств определен канонический полупорядок, т.е. по определению $(i_1, i_2) \leqslant (j_1, j_2)$, если выполняются оба неравенства $i_1 \leqslant j_1$ и $i_2 \leqslant j_2$.

Пусть $\lambda > 0$ положительно и убывающее направление A_1 мажорирует S_1, а возрастающее направление B_1 минорирует S_1, при этом $\inf A_1 = \sup B_1 \pmod Z$. Тогда λA_1 мажорирует λS_1, а λB_1 минорирует λS_1, и имеет место равенство $\inf(\lambda A_1) = \sup(\lambda B_1) \pmod Z$. Аналогичное доказательство в случае $\lambda < 0$. Таким образом, доказано равенство соответствующих пределов.

Предложение 13. *Если полупорядок $\boldsymbol{E}$ является архимедовым и существует верхняя (нижняя) грань $\sup A$ ($\inf A$) множества $A \subset \mathbb{R}$, то $\sup(Ax) = (\sup A)x$ ($\inf(Ax) = (\inf A)x$) $\pmod Z$ при всех $x \in K$.*

Предположим, что множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань $a_0 = \sup A$. Тогда $ax \leqslant a_0 x$ при всех $a \in A$ и $x \in K$. С другой стороны, если $ax \leqslant y$ при всех $a \in A$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $a \in A$, что $a_0 - 1/n \leqslant a$, и, значит, $(a_0 - 1/n)x \leqslant y$. Отсюда $n(a_0 x - y) \leqslant x$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в силу свойства архимедовости полупорядка получим $a_0 x \leqslant y$, т. е. $\sup(Ax) = a_0 x$. В частности, из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *В архимедово упорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ всякая r-сходящаяся сеть является o-сходящейся к тому же пределу.*

Пример 3. Введем в комплексное двумерное пространство $\mathbb{C}^2$ следующее отношение полупорядка: $(z_1, z_2) \leqslant (w_1, w_2)$, если $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} w_1$, либо $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} w_1$ и $\operatorname{Re} z_2 \leqslant \operatorname{Re} w_2$. Тогда $\mathbb{C}^2$ становится полуупорядоченным пространством, при этом в нем любые два элемента сравнимы. Так как $(1/n, 0) \geqslant (0, 1)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\inf(1/n, 0) > 0$ и, значит, условие архимедовости в предложении 13 является существенным.

Предложение 14. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — архимедово полуупорядоченное пространство, в котором положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ порождающий. Тогда если сети $\Lambda \subset \mathbb{R}$ и $S \subset \boldsymbol{E}$ являются порядково сходящимися, то выполняется равенство $(\lim \Lambda)(\lim S) = \lim(\Lambda S) \pmod Z$.*

Поскольку по условию положительный клин K является порождающим, т.е. $\boldsymbol{E} = K - K$, то можно считать, что сети Λ и S порядково ограничены сверху элементами $c > 0$ и $r \in K$ соответственно. Тогда, полагая $\lim \Lambda = \lambda_0$, $\lim S = s_0$, а затем применяя равенство

$$\lim \Lambda S = \lim(c - \Lambda)(r - S) - cr + \lambda_0 r + c s_0\,,$$

мы сведем доказательство утверждения к случаю, когда $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ и $S \subset K$. Заметим, что в этом равенстве мы использовали предложения 12 и 13.

Предположим, что убывающее направление U мажорирует сеть $\Lambda = \{\lambda_j \mid j \in J\}$, а возрастающее направление V минорирует сеть Λ, и выполняется равенство $\inf U = \sup V = \lambda_0$. Пусть убывающее направление A мажорирует сеть $S = \{s_i \mid i \in I\}$, а возрастающая направление B минорирует сеть S, и выполняется равенство $\inf A = \sup B = s_0 \pmod Z$. Здесь, если направление V или направление B не являются положительными, то все их неположительные элементы можно заменить нулями. Тогда, используя положительность этих направлений, нетрудно проверить, что убывающее направление UA мажорирует сеть

$\Lambda S = \{\lambda_j s_i \mid (j,i) \in J \times I\}$, а возрастающее направление VB минорирует сеть ΛS. Кроме того, в силу предложения 13 отсюда мы имеем следующие соотношения:

$$\inf(UA) = \inf_{(u,a)\in U\times A}(ua) = \inf_{u\in U}\inf_{a\in A}(ua) = \inf U \inf A = \lambda_0 s_0 =$$

$$= \sup V \sup B = \sup_{v\in V}\sup_{b\in B}(vb) = \sup_{(v,b)\in V\times B}(vb) = \sup(VB) \pmod Z .$$

Таким образом, мы получили равенство $\lim \Lambda S = \lambda_0 s_0 \pmod Z$.

Определение 10. Говорят, что в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ определена сходимость, если задан класс сходящихся сетей и для каждой сходящейся сети $S \subset \boldsymbol{E}$ определен ее предел $\lim S \in \boldsymbol{E}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

a) предел $\lim S$ всякой сходящейся сети $S \subset \boldsymbol{E}$ является единственным по модулю $(\mathrm{mod}\ Z)$ некоторого заданного подпространства $Z \subset \boldsymbol{E}$;

b) стационарная сеть $S = \{s_i \mid i \in I\}$, где $s_i = s_0 \in \boldsymbol{E}$ при всех $i \in I$, является сходящейся и ее предел равен $\lim S = s_0 \pmod Z$;

c) всякая подсеть $T \subset S$ сходящейся сети $S \subset \boldsymbol{E}$ является сходящейся и имеет тот же предел $\lim T = \lim S \pmod Z$.

Тогда $\boldsymbol{E}$ называется *пространством сходимости* по сетям. Если, кроме того, сходимость в пространстве $\boldsymbol{E}$ обладает свойствами непрерывности линейных операций, т.е.

d) $\lim(\Lambda S) = (\lim \Lambda)(\lim S) \pmod Z$ для всех сходящихся сетей $S \subset \boldsymbol{E}$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}$;

e) $\lim(S+T) = \lim S + \lim T \pmod Z$ для всех сходящихся сетей S, $T \subset \boldsymbol{E}$,

то $\boldsymbol{E}$ называется *линейным пространством сходимости* по сетям. Обычно слово «линейный» опускается, в виду того, что свойства (d) и (e) очевидно выполнены.

Теорема 3. *В каждом архимедово полуупорядоченном пространстве* $\boldsymbol{E}$*, в котором положительный клин является порождающим, линейные операции сложения и умножения на число непрерывны относительно o-сходящихся (r-сходящихся) сетей, т.е. пространство* $\boldsymbol{E}$ *является линейным пространством o-сходящихся (r-сходимости) по сетям.*

Доказательство. В силу предложений 12 и 14 o-сходимость (r-сходимость) в $\boldsymbol{E}$ согласуется со структурой линейного пространства, т.е. линейные операции в $\boldsymbol{E}$ являются непрерывными относительно o-сходящихся (r-сходящихся) сетей. При этом в силу предложения 11 положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ замкнут относительно o-сходимости (r-сходимости). □

Определение 11. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ называется *o-замкнутым* (*r-замкнутым*) в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, если для всякой сети $S \subset \boldsymbol{E}$, o-сходящейся (r-сходящейся) к некоторой точке x и имеющей подсеть в этом множестве A, следует, что $x \in A$ [1, стр. 289].

Множество $\overline{A} \subset \boldsymbol{E}$ называется *o-замыканием* (*r-замыканием*) множества $A \subset \boldsymbol{E}$, если оно является наименьшим o-замкнутым (r-замкнутым) множеством, содержащим A.

Дополнение $B = \boldsymbol{E} \setminus A$ к o-замкнутому (r-замкнутому) множеству $A \subset \boldsymbol{E}$ мы будем называть *o-открытым* (*r-открытым*) множеством в $\boldsymbol{E}$.

Топология τ_o в пространстве $\boldsymbol{E}$, образованная всеми o- открытыми множествами, называется *порядковой топологией* (или *o-топологией*). Топология τ_r, образованная всеми r-открытыми множествами, называется *относительно равномерной топологией* (или *r-топологией*).

Порядковая топология τ_o в решеточно упорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ совпадает с топологией упорядочения, определенной в [5, стр. 46] и [6, стр. 40]. Понятие относительно равномерной сходимости использовалось Мором [12] и Канторовичем [13], а относительно равномерная топология τ_r полуупорядоченного пространства определена здесь. Биркгофф [1, стр.475] и Гордон [14, стр. 419] называют относительно равномерной порядково ограниченную топологию Намиоки [15], определенную ниже. Эти топологии являются *максимальными* в следующем смысле.

Теорема 4. *Топология τ_o (τ_r) в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ является сильнейшей из всех топологий τ в пространстве $\boldsymbol{E}$, для которых всякая o-сходящаяся (r-сходящаяся) сеть $\boldsymbol{E}$ сходится в топологии τ к тому же пределу.*

Доказательство. Докажем теорему для топологии τ_o (для τ_r все полностью аналогично). Если $A = \bigcap A_i$ является пересечением o-замкнутых множеств $A_i \in \tau_o$, то всякая o-сходящаяся сеть $S \subset A$ имеет предел $\lim S \in A_i$, принадлежащий всем множествам A_i, и, значит, этот предел принадлежит $\lim S \in A$, т.е. пересечение замкнуто в o- топологии пространства $\boldsymbol{E}$.

Пусть теперь $A = A_1 \cup A_2$ является объединением порядково замкнутых множеств $A_1, A_2 \subset \boldsymbol{E}$. Если порядково сходящаяся сеть $S \subset A$ имеет подсеть $S_1 \subset A_1$, то ее предел будет принадлежать $\lim S = \lim S_1 \in A_1 \subset A$ по условию замкнутости A_1. Если такой подсети в S не существует, то некоторое сечение этой сети содержится в множестве A_2, а тогда мы получим $\lim S \in A_2 \subset A$ в силу замкнутости A_2. Тем самым доказана замкнутость объединения A.

Таким образом, τ_o является топологией в пространстве $\boldsymbol{E}$, при этом в силу предложения 11 положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ и всякий порядковый интервал $[x, y] \subset \boldsymbol{E}$ являются замкнутыми множествами τ_o. В частности, замыканием каждой точки $x_0 \in \boldsymbol{E}$ является наибольшее подпространство Z положительного клина K, так как $[x, x] = Z$.

Предположим теперь, что порядково сходящаяся сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ к точке $s_0 = \lim S$ не сходится к этой точке в порядковой топологии τ_o. Тогда существует открытая окрестность $U \in \tau_o$ этой точки s_0, что для некоторой подсети $S_1 \subset S$ выполняется включение $S_1 \in \boldsymbol{E} \setminus U$. Так как S_1 является подсетью сети S, то она порядково сходится к s_0 и, следовательно, множество $\boldsymbol{E} \setminus U$ не является порядково замкнутым. Таким образом, мы получили противоречие.

Докажем, что τ_o является сильнейшей топологией в пространстве $\boldsymbol{E}$. В самом деле, пусть всякая порядково сходящаяся сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ сходится в топологии τ к тому же пределу, т.е. множество порядково сходящихся сетей содержится в множестве сетей, сходящихся в топологии τ. Тогда любое замкнутое множество в топологии τ будет порядково замкнутым [16, стр. 97] и, следовательно, топология τ будет слабее порядковой топологии τ_o. Аналогично доказывается утверждение для относительно равномерной топологии τ_r. $\square$

Определение 12. Сеть $T = \{t_j\}_{j \in J}$ называется *подсетью* сети $S = \{s_i\}_{i \in I}$ и обозначается это через $T \subset S$, если существует такое отображение $\varphi : J \to I$, что $t_j = s_{\varphi(j)}$ при всех $j \in J$, и для каждого индекса $i \in I$ найдется такой индекс $k \in J$, что $\varphi(j) \geqslant i$ при всех $j \geqslant k$.

Сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве сходимости $\boldsymbol{E}$ называется $*$*сходящейся* (звездно сходящейся) к точке $x \in \boldsymbol{E}$, если всякая ее подсеть $T \subset S$ имеет подсеть $R \subset T$, которая сходится к $x = \lim T$.

Таким образом, в полуупорядоченном пространстве мы можем рассматривать $*o$-сходимость, определенную для o-сходимости, и $*r$-сходимость, определенную для r-сходимости.

Следствие 7. *В каждом архимедово полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, в котором положительный клин является порождающим, линейные операции сложения и умножения на число непрерывны относительно $*o$-сходящихся ($*r$-сходящихся) сетей, т.е. пространство $\boldsymbol{E}$ является пространством $*o$-сходимости ($*r$-сходимости) по сетям.*

Доказательство этого следствия вытекает из теоремы 3 и следующего замечания. Если пространства X, Y, Z являются пространствами сходимости по сетям и функция $f : X \times Y \to Z$ непрерывна относительно заданных сходимостей, то она будет непрерывной также относительно $*$сходимостей [1, стр. 288]. Действительно, пусть заданные сети $S = \{s_i\}_{i \in I}$ и $T = \{t_j\}_{j \in J}$ будут $*$сходиться соответственно к $x \in X$ и $y \in Y$. Рассмотрим некоторую подсеть $G = \{g_l\}_{l \in L}$ сети $F = \{f(s_i, t_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$, где $G(l) = g_l = f(s_{i(l)}, t_{j(l)})$ при всех $l \in L$. Тогда сеть $S_1 = \{s_{i(l)}\}_{l \in L}$ является подсетью сети S, а сеть $T_1 = \{t_{j(l)}\}_{l \in L}$ является подсетью сети T, которые по условию имеют подсети $S_2 = \{s_{i(l_n)}\}_{n \in N}$ и $T_2 = \{t_{j(l_m)}\}_{m \in M}$, сходящиеся соответственно к точкам x и y. Поэтому сеть $H = \{h_{n,m}\}_{(n,m) \in N \times M}$, где $H(n, m) = h_{n,m} = f(s_{i(l_n)}, t_{j(l_m)})$ при всех $(n, m) \in N \times M$, является подсетью сети G и по условию непрерывности функции f сходится к точке $f(x, y)$.

Предложение 15. *В полуупорядоченном пространсте $\boldsymbol{E}$ всякая сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ $*o$-сходящаяся ($*r$-сходящаяся) к точке $x \in \boldsymbol{E}$ сходится в топологии τ_o (τ_r) к той же точке x.*

В самом деле, согласно теореме 4 достаточно показать, что если в сети S всякая подсеть имеет такую подсеть, которая сходится к точке x в топологии τ_o (τ_r), то S сходится в этой топологии. Предположим обратное, т.е. сеть S не сходится в топологии τ_o (τ_r). Тогда существует окрестность $O_x \in \tau_o$ (τ_r) точки x и некоторая подсеть $R \subset S$, которая не содержит элементов, принадлежащих окрестности O_x. Следовательно, в сети R нет ни одной подсети, сходящейся к точке x в топологии τ_o (τ_r), что противоречит условию.

Заметим, что множество всех сетей $S \subset \boldsymbol{E}$, сходящихся в порядковой топологии τ_o, вообще говоря, больше, чем множество всех порядково сходящихся* сетей. Иначе можно сказать, что множество порядково сходящихся* сетей пространства $\boldsymbol{E}$, вообще говоря, недостаточно для определения замыкания множества $A \subset \boldsymbol{E}$ в порядковой топологии τ_o.

Ясно, что порядковое замыкание $\overline{A}$ множества $A \subset \boldsymbol{E}$ должно содержать все порядковые пределы сетей $S \subset A$. Однако простым присоединением к множеству A всех таких пределов нельзя получить порядково замкнутое множество. Для того чтобы построить $\overline{A}$, нужно образовать трансфинитную последовательность множеств, включая в каждое следующее множество A_α всевозможные порядковые пределы сетей $S \subset \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ из предыдущих множеств. Тогда $\overline{A}$ совпадает с объединением $\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, где γ — начальный трансфинит мощности, большей, чем мощность пространства $\boldsymbol{E}$. Поэтому сходимость в топологии τ_o, вообще говоря, не совпадает с порядковой сходимостью. Совпадение имеет место только тогда, когда выполняются *законы $*$сходимости* и *повторного предела* (см. [17, стр. 280], [18, стр. 802], [19, стр. 360]).

4 Характеристика регулярности сходимости в полуупорядоченном пространстве

Специальное понятие *регулярности* K-пространств $\boldsymbol{E}$ (т.е. полных решеток) счетного типа было введено Л. В. Канторовичем, которое оказалось равносильно так называемому *закону диагональной последовательности* (см. [4, стр. 163]), примененному к последовательности o-сходящихся последовательностей, т.е. для всякой двойной последовательности

$\{x_{nm}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, имеющей повторный o-предел $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{nm} = x$, существует диагональная подпоследовательность $\{x_{n,m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, имеющая rnr же o-предел $\lim_{n\to\infty} x_{n\,m_n} = x$.

В следующем определении o-регулярности рассматриваются произвольные полуупорядоченные пространства и сети вместо последовательностей. В общем случае, определение регулярности Канторовича не равносильно o- регулярности и даже одно не следует из другого. Совпадение возможно лишь в частных случаях для решеточных пространств счетного типа.

Определение 13. Пусть $\boldsymbol{E}$ является пространством сходимости по сетям. Сходимость в $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет *закону $*$сходимости* (закону звездной сходимости), если всякая $*$сходящаяся сеть является сходящейся, т.е. когда $*$сходимость сети равносильна ее сходимости.

Говорят, что сходимость в пространстве $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет *закону повторного предела*, если для всякой сети $\{S_i\}_{i\in I}$ сходящихся сетей $S_i = \{s_{i,j}\}_{j\in J_i}$, для которых существует повторный предел $\lim_i \lim S_i = x$, диагональная сеть $S : I \times \prod_{i\in I} J_i \to \boldsymbol{E}$ сходится к точке x, где диагональная сеть равна $S(i,\alpha) \doteqdot s_{i,\alpha(i)}$ и $\alpha \in \prod_{i\in I} J_i$ — элемент произведения направленных множеств.

Сходимость в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *регулярной*, если она удовлетворяет закону повторного предела. В случае регулярности o-сходимости или r-сходимости полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ называется соответственно *o-регулярным* или *r-регулярным*, а в случае регулярности $*o$-сходимости или $*r$-сходимости полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ называется соответственно *$*o$-регулярным* или *$*r$-регулярным*.

Сходимость в топологическом пространстве всегда удовлетворяет закону звездной сходимости. В самом деле, предположим, что сеть S $*$сходится к точке x. Если сеть S не сходится к точке x, то существует окрестность U точки x и некоторая подсеть T, которая не имеет элементов, принадлежащих этой окрестности U. Следовательно, сеть T не имеет подсетей, сходящихся к точке x. Нетрудно проверить также, что сходимость в любом топологическом пространстве удовлетворяет закону повторного предела [11, стр. 43].

Заметим, что если закон звездной сходимости не выполняется в пространстве сходимости, то всегда можно расширить класс сходящихся сетей, заданных первоначально, присоединив к нему все $*$сходящиеся сети. Эта операция называется *операцией насыщения* сходимости. Нетрудно показать, что повторная операция насыщения не расширяет класса сходящихся сетей.

Теорема 5. *Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является o-регулярным ($*o$-регулярным) тогда и только тогда, когда для всякой сети $\{A_i\}_{i\in I}$ положительных направлений $A_i \subset K$ по убыванию, у которых $\inf A_i = 0$, диагональная сеть $A : I \times \prod_{i\in I} A_i \to \boldsymbol{E}$ будет o-сходиться ($*o$-сходится) к нулю, где $A(i,a) \doteqdot a(i)$ и $a \in \prod_{i\in I} A_i$ — элемент произведения направлений.*

Доказательство. Необходимость. Пусть o-сходимость ($*o$-сходимость) является регулярной. Рассмотрим в качестве сети сходящихся сетей сеть $\{A_i\}_{i\in I}$ направлений $A_i \subset K$ по убыванию, у которых нижняя грань $\inf A_i = 0$. В силу предложения 10 направления A_i будут o-сходиться к нулю и, тем более, они будут $*o$-сходиться к нулю. Поэтому повторный o-предел ($*o$-предел) существует и равен $\lim_i \lim A_i = 0$ нулю. Таким образом, по предположению диагональная сеть $A : I \times \prod_{i\in I} A_i \to \boldsymbol{E}$, $A(i,a) \doteqdot a(i)$, где $i \in I$ и $a \in \prod_{i\in I} A_i$, o-сходится ($*o$-сходится) к нулю.

Достаточность. Пусть задана сеть $\{S_i\}_{i\in I}$ o-сходящихся сетей $S_i = \{s_{ij}\}_{j\in J_i}$, для которых существует повторный o-предел $\lim S_i = x_i$ и $\lim x_i = x$. Обозначим через A_i такое положительное направление по убыванию, у которого нижняя грань $\inf A_i = 0$, при этом A_i мажорирует сеть $S_i - x_i$ и $-A_i$ минорирует сеть $S_i - x_i$. Тогда по условию теоремы диагональная сеть $A(i,a) = a(i)$, где $i \in I$ и $a \in \prod_{i\in I} A_i$, будет o-сходиться к нулю. Так как сеть A мажорирует диагональную сеть $S(i,\alpha) - x$ и $-A$ минорирует сеть $S(i,\alpha) - x$, где $i \in I$ и $\alpha \in \prod_{i\in I} J_i$, то выполняются свойства мажорирования $A \succ S - x$ и минорирования $-A \prec S - x$. Следовательно, диагональная сеть S o-сходится в пространстве $\boldsymbol{E}$ и ее o-предел равен $\lim S = x$.

Установим теперь регулярность $*o$-сходимости. Пусть далее $T = \{t_l\}_{l\in L}$ является подсетью диагональной сети $S(i,\alpha)$. Тогда существует такое отображение $\varphi : L \to I \times \prod_{i\in I} J_i$, что $t_l = s_{\varphi(l)}$. Пусть $\varphi(l) = (i_l, \alpha_l)$, где $\alpha_l = \{\alpha_l(i)\}_{i\in I}$. Обозначим далее через

$$I' = \{i \in I \mid i = i_l\,,\, \varphi(l) = (i_l,\alpha_l)\,,\, l \in L\}\,, \quad J_i' = \{j \in J_i \mid j = \alpha_l(i)\,,\, \varphi(l) = (i_l,\alpha_l)\,,\, l \in L\}\,.$$

По условию подсети для каждого индекса $i \in I$ найдется такой индекс $k \in L$, что $i_l \geqslant i$ при всех $l \geqslant k$, и для каждого индекса $j \in J_i$ найдется такой индекс $k_i \in J_i$, что $\alpha_l(i) \geqslant j$ при всех $l \geqslant k_i$. В частности, подмножество $I' \subset I$ является конфинальным в множестве I и подмножество $J_i' \subset J_i$ является в направленном множестве J_i при всех $i \in I$.

Следовательно, сеть $S_i' = \{s_{i,\alpha_l(i)}\}_{l\in L}$ является подсетью в сети S_i. Далее по предположению $*o$-сходимости сети S_i существует подсеть $R_i = \{r_{n_i}\}_{n_i\in N_i}$ сети S_i', o-сходящаяся к точке $\lim R_i = x_i$ при всех $i \in I$, где $r_{n_i} = s_{i,\alpha_{l_{n_i}}}$ при всех $n_i \in N_i$. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ является подсетью сети $\{x_{i_l}\}_{l\in L}$, o-сходящейся к точке $\lim y_n = x$, где $y_n = x_{i_{l_n}}$ при всех $n \in N$. Тогда по доказанному выше диагональная сеть R сетей $\{R_{i_{l_n}}\}_{n\in N}$ o- qundhrq к точке x и является подсетью сети T. $\square$

Аналогично доказанному критерию o-регулярности ($*o$-регулярности) в теореме 5 получим критерий r-регулярности ($*r$-регулярности).

Следствие 8. *Полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является r-регулярным ($*r$-регулярным) тогда и только тогда, когда для всякой сети положительных элементов $\{a_i\}_{i\in I} \subset K$ и для всякой сети направлений по убыванию $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ положительных чисел $\Lambda_i \subset \mathbb{R}_+$, у которых нижняя грань $\inf \Lambda_i = 0$, диагональная сеть $A : I \times \prod_{i\in I} \Lambda_i \to \boldsymbol{E}$ r-сходится ($*r$-сходится) к нулю, где $A(i,\alpha) \doteqdot \alpha(i)a_i$ и $\alpha \in \prod_{i\in I} \Lambda_i$ — элемент произведения направлений.*

Рассмотрим свойства o-регулярных ($*o$-регулярных) полуупорядоченных пространств.

Предложение 16 (об устойчивости сходимости)**.** *Если сеть $S = \{s_i\}_{i\in I}$ в полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$ o-сходится ($*o$-сходится) к нулю $\lim S = 0$, то для любой последовательности чисел $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ сеть $T : \mathbb{N} \times I^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{E}$, определенная по формуле $T(n,\alpha) = \lambda_n s_{\alpha(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$, имеет o-предел ($*o$-предел) $\lim T = 0$.*

Действительно, так как при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ o-предел ($*o$-предел) $\lim \lambda_n S = 0$ равен нулю, то по условию o-регулярности ($*o$-регулярности) диагональная сеть $T : \mathbb{N} \times I^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{E}$, равная $T(n,\alpha) = \lambda_n s_{\alpha(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a \in A^{\mathbb{N}}$, имеет o-предел ($*o$-предел) $\lim T = 0$.

Предложение 17 (об аннулировании сети)**.** *В архимедово полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$, какова бы ни была сеть $S = \{s_i\}_{i\in I} \subset \boldsymbol{E}$ и последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, сходящаяся к нулю $\lim \lambda_n = 0$, сеть $T : I \times \mathbb{N}^I \to \boldsymbol{E}$, определенная по формуле $T(i,\alpha) = \lambda_{\alpha(i)} s_i$, где $i \in I$ и $\alpha \in \mathbb{N}^I$, имеет o-предел ($*o$-предел) $\lim T = 0$.*

Поскольку в силу архимедовости o-предел ($*o$-предел) $\lim \lambda_n s_i = 0$ равен нулю при каждом фиксированном индексе $i \in I$, то по условию o-регулярности ($*o$-регулярности) диагональная сеть $T : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^I \to \boldsymbol{E}$, которая определяется по формуле $T(i, \alpha) = \lambda_{\alpha(i)} s_i$, где $i \in I$ и $\alpha \in \mathbb{N}^I$, имеет o-предел ($*o$-предел) $\lim T = 0$.

Предложение 18 (о сходимости с регулятором)**.** *Сеть $S \subset \boldsymbol{E}$ в архимедово полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$ o-сходится ($*o$-сходится) к точке $\lim S = x_0$ тогда и только тогда, когда она r-сходится ($*r$-сходится) к точке $\lim S = x_0$.*

Пусть направление по убыванию $A \subset \boldsymbol{E}$ мажорирует сеть $S - x_0$, а направление по возрастанию $-A$ минорирует сеть $S - x_0$, и имеет нижнюю грань $\inf A = 0$. Также как в предложении 16 построим диагональную сеть $B : \mathbb{N} \times A^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{E}$, равную $B(n, a) = n\, a_n$, где $a \in A^{\mathbb{N}}$, которая имеет o-предел $\lim B = 0$. Следовательно, сеть B порядково ограничена в $\boldsymbol{E}$, т.е. найдется сечение $B_{(m,b)}$, где $m \in \mathbb{N}$ и $b \in A^{\mathbb{N}}$, такое, что $B_{(m,b)} \subset [0, c]$ при некотором $c \in K$. Поэтому выполняется неравенство $a_n \leqslant \frac{1}{n} c$ при всех $n \geqslant m$ и $a \leqslant b$. Так как последовательность $a = \{a_n\} \subset A$, то она мажорирует сеть $S - x_0$, а последовательность $-a$ минорирует сеть $S - x_0$. Поэтому $\{-\frac{1}{n} c\}$ мажорирует $S - x_0$, а $\{-\frac{1}{n} c\}$ минорирует сеть $S - x_0$. Таким образом, из o-сходимости сети к x_0 следует ее r-сходимость к x_0. Обратное утверждение очевидно. Из доказаного утверждения для o-сходимости легко получить доказательство для $*o$-сходимости.

Следствие 9. *Всякое архимедово полуупорядоченное o-регулярное ($*o$-регулярное) пространство $\boldsymbol{E}$ является r-регулярным ($*r$-регулярным).*

Из доказательства предложения 18 нетрудуо заметить, что в архимедово полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$ для всякой o-сходящейся ($*o$-сходящейся) сети $S = \{s_i\}_{i \in I}$ к точке $\lim S = x_0$ существует такая подпоследовательность $x_n = s_{i_n}$, которая r-сходится ($*r$-сходится) к точке $\lim x_{i_n} = x_0$. Поэтому o-сходимость ($*o$-сходимость) является секвенциальной в каждом архимедовом o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$.

Кроме того, само утверждение предложения 18 было получено из свойства устойчивости o-сходимости ($*o$-сходимости), доказанного в предложении 17. Поскольку r-сходимость ($*r$-сходимость) является устойчивой, то получается, что o-сходимость ($*o$-сходимость) совпадает с r-сходимостью ($*r$-сходимостью) тогда и только тогда, когда она устойчива.

Предложение 19 (об общем регуляторе сходимости)**.** *В архимедово полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$ какова бы ни была сеть $\{S_i\}_{i \in I}$ o- сходящихся ($*o$-сходящихся) сетей $S_i = \{s_{ij}\}_{j \in J_i} \subset \boldsymbol{E}$, существует общий регулятор для r-сходимости ($*r$-сходимости) этих сетей.*

В самом деле, применяя предложение 18, для любого $i \in I$ и для всякой o-сходящейся сети $S_i = \{s_{ij}\}_{i \in J_i}$ к точке $x_i \in \boldsymbol{E}$ существует $c_i \in K$, такое, что последовательность $\{\frac{1}{n} c_i\}$ мажорирует сеть $S_i - x_i$, а последовательность $\{-\frac{1}{n} c_i\}$ минорирует сеть $S_i - x_i$. В силу предложения 17 об аннулирующей сети, диагональная сеть $T : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^I \to \boldsymbol{E}$, которая определяется по формуле $T(i, \alpha) = \frac{1}{\alpha(i)} c_i$, где $(i, \alpha) \in I \times \mathbb{N}^I$, имеет o-предел $\lim T = 0$. Следовательно, сеть T порядково ограничена в $\boldsymbol{E}$, т.е. существует сечение $T_{(i,\alpha)}$, такое, что $T_{(i,\alpha)} \subset [0, c]$ при некотором $c \in K$, где $(i, \alpha) \in I \times \mathbb{N}^I$. Теперь для каждого $\varepsilon > 0$ выберем индекс $l_i = l_i(\alpha, \varepsilon) \in J_i$ настолько большим, чтобы $s_{ij} - x_i \in \frac{\varepsilon}{\alpha(i)} [-c_i, c_i]$ при всех $j \geqslant l_i$. Тогда имеем $s_{ij} - x_i \in \varepsilon[-c, c]$ при всех $j \geqslant l_i$.

Заметим, что доказательство этого предложения 19 опирается только на предложения 17 об аннулирующей сети и 18 о сходимости с регулятором, которые являются следствиями o-регулярности ($*o$-регулярности). Верно и обратное, т.е. если в архимедово полуупорядоченном o-регулярном ($*o$-регулярном) пространстве $\boldsymbol{E}$ существует общий регулятор для сети $\{S_i\}_{i\in I}$ o-сходящихся ($*o$-сходящихся) сетей S_i, то архимедово полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является o-регулярным ($*o$-регулярным).

Хаусдорфово топологическое линейное пространство X обычно называется *регулярным*, если для всякой окрестности U любой точки $x \in X$ существует замкнутая окрестность $\overline{V}$ этой точки x, содержащаяся в U. Всякое топологическое линейное пространство регулярно. Биргхофф Г. [11, стр. 44] доказал, что хаусдорфово топологическое линейное пространство является регулярным тогда и только тогда, когда для любой сети $\{S_i\}_{i\in I}$ топологически сходящихся сетей $S_i = \{s_{ij}\}_{j\in J_i}$ к точкам $x_i = \lim S_i$, для которых существует диагональный топологический предел $\lim T = x$, где $T(i,\alpha) = s_{i,\alpha(i)}$, $(i,\alpha) \in I \times \prod_{i\in I} J_i$, существует также топологический предел $\lim x_i = x$.

В этом утверждении рассматривается топологическая сходимость. Как известно топологическая сходимость удовлетворяет закону звездной сходимости и закону повторного предела. Келли [17, стр. 280] доказал обратное утверждение: если в пространстве сходимости $\boldsymbol{E}$ выполняется закон звездной сходимости и закон повторного предела, то сходимость совпадает со сходимостью относительно максимальной топологии, в которой множество $A \subset \boldsymbol{E}$ замкнуто в том и только в том случае, если для всякой сети S, сходящейся к некоторой точке x и имеющей подсеть в этом множестве A, следует, что $x \in A$.

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — архимедово полуупорядоченное пространство, в котором положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ порождающий. Тогда пространство $\boldsymbol{E}$ является $*o$-регулярным ($*r$-регулярным) тогда и только тогда, когда $*o$-сходимость ($*r$-сходимость) совпадает со сходимостью относительно o-топологии τ_o (r-топологии τ_r).*

Доказательство. В самом деле, если в качестве сходимости в пространстве $\boldsymbol{E}$ рассмотреть $*o$-сходимость ($*r$-сходимость), то $\boldsymbol{E}$ становится пространством сходимости, в котором будет выполнен закон звездной сходимости. В силу свойства $*o$-регулярности ($*r$-регулярности) в этом пространстве будет выполнен также закон повторного предела. Таким образом, в силу теоремы Келли $*o$- сходимость ($*r$-сходимость) совпадает со сходимостью относительно o- топологии τ_o (r-топологии τ_r). Обратно, если $*o$-сходимость ($*r$-сходимость) совпадает со сходимостью относительно o-топологии τ_o (r- топологии τ_r), то топологическая сходимость относительно o-топологии τ_o (r-топологии τ_r) будет удовлетворять закону повторного предела и, следовательно, пространство $\boldsymbol{E}$ будет $*o$-регулярным ($*r$- регулярным). □

Следствие 10. *Всякое $*o$-регулярное ($*r$-регулярное) архимедово полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ порождающий, является топологическим линейным пространством.*

В самом деле, если архимедово полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является $*o$-регулярным ($*r$-регулярным), то согласно теоремы 6 $*o$-сходимость ($*r$-сходимость) совпадает со сходимостью относительно o-топологии (r-топологии). Кроме того, в силу следствия 7 линейные операции сложения и умножения на число в пространстве $\boldsymbol{E}$ будут непрерывны относительно $*o$- сходящихся ($*r$-сходящихся) сетей. Следовательно, они будут непрерывны относительно o-топологии (r-топологии).

5 Порядково ограниченная топология в полуупорядоченном пространстве

Пусть $\boldsymbol{E}$ — полуупорядоченное пространство. Обозначим через τ_b сильнейшую аффинную топологию в $\boldsymbol{E}$, относительно которой всякий порядковый интервал топологически ограничен. Сильнейшая локально выпуклая топология, удовлетворяющая указанному условию, называется *порядково ограниченной топологией* [15]. Мы также будем использовать это название для τ_b. Базу $\mathfrak{B}_0^{\tau_b}$ окрестностей нуля порядково ограниченной топологии τ_b составляют уравновешенные множества $U \subset \boldsymbol{E}$, поглощающие всякиий порядковый интервал $[a,b] \subset \boldsymbol{E}$, т.е. для каждого $[a,b] \subset \boldsymbol{E}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda[a,b] \subset U$ при всех $|\lambda| < \varepsilon$.

Пусть $\boldsymbol{E}^b$ обозначает порядково ограниченное сопряженное пространство, т.е. множество всех линейных непрерывных функционалов относительно топологии τ_b. Фактортопология $\widehat{\tau}_b$ в $\widehat{\boldsymbol{E}}$ будет хаусдорфофой, если $\boldsymbol{E}^b$ разделяет точки $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Множество ограничено в топологии τ_b в том и только в том случае, когда оно порядково ограничено. Следовательно, если $U \subset \boldsymbol{E}$ является уравновешенным множеством, поглощающим всякое ограниченное множество в топологии τ_b, то тем более оно поглощает всякий порядковый интервал и, значит, является окрестность нуля. Таким образом, τ_b является борнологической аффинной топологией.

Теорема 7. *В архимедово полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ порядково ограниченная топология τ_b совпадает с относительно равномерной топологией τ_r, т.е. $\tau_b = \tau_r$.*

Доказательство. Пусть некоторая сеть $S = \{s_i\}_{i\in I}$ r-сходится к нулю. Тогда существует $a \in K$ и направление положительных чисел по убыванию $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}_+$, такие, что $s_i \in \lambda_i[-a,a]$. Пусть $U \subset \boldsymbol{E}$ является окрестностью нуля в топологии τ_b, тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda[-a,a] \subset U$ при всех $|\lambda| < \varepsilon$. Выберем $k \in I$ так, чтобы $0 < \lambda_i < \varepsilon$ при всех $i \geqslant k$. Отсюда получим включение $s_i \in U$ при всех $i \geqslant k$. Таким образом, сеть S сходится к нулю в топологии τ_b. Так как τ_r является максимальной топологией, то топология τ_b слабее τ_r.

С другой стороны, докажем, что всякий порядковый интервал $[a,b] \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в топологии τ_r. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset [a,b]$. Не ограничивая общности утверждения, мы можем предполагать, что a и b принадлежат линейной оболочке клина $K - K$. Поэтому $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$, где a_1, a_2, b_1, $b_2 \in K$. Пусть $c = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$, тогда $\{x_n\} \subset [-c,c]$ и, следовательно, для любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, имеющей предел $\lim \lambda_n = 0$, получим $\lambda_n x_n \in \lambda_n[-c,c]$ и r-предел $\lim \lambda_n x_n = 0$ равен нулю. Отсюда предел $\lim \lambda_n x_n = 0$ равен нулю в топологии τ_r и, значит, множество $[a,b]$ ограничено в топологии τ_r. Так как τ_b является максимальной топологией, то она сильнее τ_r. $\square$

Предложение 20. *Линейный функционал $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ непрерывен в топологии τ_b в том и только в том случае, когда он ограничен на каждом порядковом интервале.*

В самом деле, пусть $f \in \boldsymbol{E}^b$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность нуля $U \in \mathfrak{U}_0^{\tau_b}$, что $|f(U)| < \varepsilon$. Для любого порядкового интервала $[a,b] \subset \boldsymbol{E}$ найдется такое $\delta > 0$, что $\lambda[a,b] \subset U$ при всех $|\lambda| \leqslant \delta$. Следовательно, $f([a,b]) < \varepsilon/\delta$. Обратно, если f ограничен на всяком порядковом интервале, то прообраз $f^{-1}(-1,1)$ является уравновешенным множеством, поглощающим всякий порядковый интервал. Следовательно, множество $f^{-1}(-1,1)$ является окрестностью нуля в топологии τ_b.

Предложение 21. *Если полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$ является произведением $\boldsymbol{E} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i$ конечного числа полуупорядоченных пространств $\boldsymbol{E}_i$, то порядково ограниченная топология в $\boldsymbol{E}$ является произведением соответствующих порядково ограниченных топологий пространств $\boldsymbol{E}_i$.*

Докажем, что проекция $P_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_1$ является топологическим гомоморфизмом относительно соответствующих порядково ограниченных топологий. Заметим, что P_1 является положительным линейным оператором и $P_1([a,b]) = [P_1(a), P_1(b)]$ для любого порядкового интервала $[a,b]$. Следовательно, если множество $U \subset \boldsymbol{E}$ уравновешено и поглощает всякий порядковый интервал, то этими же свойствами обладает его прообраз $P_1^{-1}(U)$. Таким образом, оператор P_1 непрерывен относительно порядково ограниченных топологий. С другой стороны, если $[a_1, b_1] \subset \boldsymbol{E}_1$, то $[a_1, b_1] \times \{0\}$ есть порядковый интервал в $\boldsymbol{E}$. Поэтому если $U \subset \boldsymbol{E}$ уравновешенная окрестность нуля, то $P_1(U)$ является уравновешенным и поглощает порядковый интервал $[a_1, b_1]$.

Порядково ограниченную топологию легче всего анализировать, когда $\boldsymbol{E}$ является архимедово полуупорядоченным пространством с порядковой единицей. Для удобства формулировок мы будем использовать следующую терминологию.

Определение 14. Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ называется *порядково суммируемой* в полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$, если существует o-предел частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ *имеет тип* $\boldsymbol{\ell}_1$, если существует положительный элемент $e \in K$ и такие положительные числа $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ и $x_n \in \lambda_n[-e, e]$.

Теорема 8. *Пусть $\boldsymbol{E}$ является архимедовым полуупорядоченным пространством с порядковой единицей $e \in K$. Тогда пространство $(\boldsymbol{E}, \tau_b)$ является полунормированным и имеет сильнейшую фактортопологию, относительно которой $\boldsymbol{E}$ является локально выпуклым и порядково факторзвездным пространством. При этом пространство $(\boldsymbol{E}, \tau_b)$ в том и только в том случае является метрически полным, когда всякая положительная последовательность $\{x_n\} \subset K$ типа $\boldsymbol{\ell}_1$ порядково суммируема.*

Доказательство. Введем функционал Минковского p_e порядкового интервала $[-e, e]$. Топология τ_e, порожденная полунормой p_e, сильнее топологии τ_b, поскольку интервал $[-e, e]$ ограничен в топологии τ_b. С другой стороны, топология τ_e слабее топологии τ_b, так как по определению порядковой единицы интервал $[-e, e]$ поглощает все порядковые интервалы $[x, y]$ и, следовательно, является окрестностью нуля в топологии τ_b. Таким образом, пространство $\boldsymbol{E}$ становится полунормированным пространством и $\tau_e = \tau_b$.

Поскольку полунорма p_e порядково выпукла, то топология $\boldsymbol{E}$ является порядково факторвыпуклой и, следовательно, порядково факторзвездной. С другой стороны, если некоторая локально выпуклая топологии τ является факторзвездной, то согласно следствию [9, стр. 29] каждый порядковый интервал ограничен в фактортопологии $\widehat{\tau}$ и поэтому эта топология слабее τ_b. Чтобы доказать замкнутость клина K, заметим, что e является внутренней точкой единичного шара $[0, 2e]$ и, значит внутренней точкой K. Если $x \in \overline{K}$, то $y = (1 - 1/n)x + e/n$ есть внутренняя точка K [3, стр. 53]. Поэтому $-nx \leqslant (e - x)$ и из условия архимедовости следует, что $x \geqslant 0$.

Пусть положительная последовательность $\{x_n\} \subset K$ имеет тип $\boldsymbol{\ell}_1$, т.е. $x_n \leqslant \lambda_n e$, где $\lambda_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Тогда получим $p_e(s_n - s_m) \leqslant \sum_{n=m+1}^{n} \lambda_k$, где $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} x_k$. Отсюда, если $\boldsymbol{E}$ метрически полно, то существует o-предел $s = \lim s_n \pmod{Z}$. Обратно, для всякой фундаментальной последовательности найдется подпоследовательность $\{x_n\}$, такая, что $p_e(x_{n+1} - x_n) \leqslant \lambda_n$. Тогда $x_{n+1} - x_n \in \lambda_n[-e, e]$ и $z_n \doteqdot \lambda_n e - (x_{n+1} - x_n) \in K$. Поэтому, для того чтобы доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, достаточно установить сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Так как $z_n \leqslant 2\lambda_n e$, то по предположению существует o-предел $u = \lim u_n$ и в силу предложения 8 существует верхняя грань $u = \sup\{u_n\} \in K$, где $u_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Поскольку имеют место неравенства

$$0 \leqslant u - u_m = \sup_n \sum_{k=m+1}^{m+n} z_k \leqslant 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k e\,,$$

то $\lim p_e(u - u_m) \leqslant 2\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k$ и, следовательно, указанный ряд сходится в топологии τ_b. □

Следствие 11. *Если $\boldsymbol{E}$ есть архимедово полуупорядоченное пространство, обладающее порядковой единицей $e \in K$, то оно порядково регулярно и $\boldsymbol{E}^b = \boldsymbol{E}^o$.*

В самом деле, свойство регулярности полупорядка в $\boldsymbol{E}$ вытекает из следствия 4. Поскольку по теореме 8 полунормированное пространство $(\boldsymbol{E}, p_e)$ является порядково факторзвездным, то применяя лемму [9, стр. 30], получим равенство $\boldsymbol{E}^b = K^* - K^* = \boldsymbol{E}^o$.

Следствие 12. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — банахово полуупорядоченное пространство с порядковой единицей $e \in K$. Тогда фактортопология $\widehat{\boldsymbol{E}}$ совпадает с порядково ограниченной топологией τ_b тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{E}$ порядково факторзвездно.*

Действительно, поскольку клин K замкнут в $\boldsymbol{E}$, то полупорядок в $\boldsymbol{E}$ архимедовый. Если топология факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$ совпадает с τ_b, то по теореме 8 пространство $\boldsymbol{E}$ является порядково факторзвездным. Обратно, если $\boldsymbol{E}$ является порядково факторзвездным, то согласно теореме 8 топология факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$ слабее топологии τ_b. Кроме того, пространство $\boldsymbol{E}$ является бочечным. Поэтому, поскольку порядковый интервал $[-e, e] \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$ является бочкой, то он будет окрестностью нуля и, следовательно, топология $\widehat{\boldsymbol{E}}$ совпадает с τ_b.

Примерами для применения последнего следствия являются пространства $\boldsymbol{C}(X)$, $\boldsymbol{L}_\infty(X)$ или, более общо, всякое банахово полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором норма порядково факторвыпукла и положительный клин K имеет непустую внутренность. В силу предложения 1 любая внутренняя точка $e \in K$ положительного клина топологического аффинного полуупорядоченного пространства $\boldsymbol{E}$ является порядковой единицей и, наоборот, всякая порядковая единица $e \in K$ оказывается внутренней точкой положительного клина в топологии τ_b. Тем не менее, большинство полуупорядоченных пространств, встречающихся в анализе, не содержат порядковую единицу, как, например, бесконечномерные пространства $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $1 \leqslant p < \infty$ [20, стр. 771]. Так что описание топологии τ_b подобно теореме 8 далеко не всегда применимо.

Рассмотрим архимедово полуупорядоченное пространство $\boldsymbol{E}$, положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ которого является порождающим, и для каждого $e \in K$ обозначим через

$$\boldsymbol{E}_e \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \mid -ne \leqslant x \leqslant ne\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-e, e]$$

полуупорядоченное подпространство, наделенное порядковой ограниченной топологией τ_b. Тогда пространство $\boldsymbol{E}_e$ полунормировано единичным шаром $[-e, e]$. Система этих подпространств $\{\boldsymbol{E}_e \mid e \in K\}$ направлена по включению. При этом, если $e_1, e_2 \in K$ и существует $c > 0$, такое, что $e_1 \leqslant ce_2$, то имеет место непрерывное вложение $\boldsymbol{E}_{e_1} \subset \boldsymbol{E}_{e_2}$.

Определим в $\boldsymbol{E}$ *топологию индуктивного предела*, как сильнейшую топологию, которой можно наделить пространство $\boldsymbol{E}$, причем так, чтобы все вложения $\boldsymbol{E}_e \subset \boldsymbol{E}$, $e \in K$, были непрерывны.

Теорема 9. *Пусть в архимедово полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ положительный клин $K \subset \boldsymbol{E}$ порождающий, множество $C \subset K$ направлено по возрастанию и мажорирует клин K. Тогда пространство $(\boldsymbol{E}, \tau_b)$, наделенное порядково ограниченной топологией τ_b, является топологическим аффинным пространством, топология которого совпадает с топологией индуктивного предела полунормированных пространств $\{\boldsymbol{E}_e \mid e \in C\}$.*

Доказательство. В силу определения индуктивного предела достаточно показать, что τ_b является сильнейшей аффинной топологией, для которой непрерывны все вложения $\boldsymbol{E}_e \subset \boldsymbol{E}$. Если U является уравновешенной окрестностью нуля в топологии τ_b, то она поглощает все порядковые интервалы вида $[-e, e]$, где $e \in C$. Отсюда $U \cap \boldsymbol{E}_e$ является окрестностью нуля в подпространстве $\boldsymbol{E}_e$ и, значит, будет окрестностью нуля в топологии индуктивного предела. Следовательно, индуктивная топология сильнее топологии τ_b. С другой стороны, по определению множества $C \subset K$ всякий порядковый интервал $[x, y] \subset \boldsymbol{E}$ содержится в некотором интервале вида $n[-e, e]$, где $e \in C$ и $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $[x, y]$ поглощается всякой окрестностью нуля в топологии индуктивного предела. Таким образом, порядковые промежутки ограничены в топологии индуктивного предела и, следовательно, она слабее топологии τ_b. □

Следствие 13. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — архимедово полуупорядоченное пространство, в котором положительный клин K порождающий. Тогда пространство $(\boldsymbol{E}, \tau_b)$, наделенное порядково ограниченной топологией τ_b, является порядково факторзвездным.*

Для доказательства применяем теорему 9 и затем используем определение топологии индуктивного предела. Тогда базу окрестностей нуля в порядково ограниченной топологии τ_b можно задать системой таких уравновешенных множеств $U \subset \boldsymbol{E}$, что $U = \bigcup_{e \in C} \lambda_e[-e, e]$, где $\lambda_e \in \mathbb{R}_+$. Для доказательства порядковой факторзвездности пространства $\boldsymbol{E}$ в силу предложения 6 (b) достаточно показать, что $\mathrm{st}(U) \subset U$. Если $x \in \mathrm{st}(U) = K \cap (U - K)$, то найдется такой $y \in U \cap K$ и $e \in C$, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \lambda_e e$. Отсюда следует включение $x \in U$.

Заметим, что топология τ_b в факторпространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$ в том случае будет хаусдорфовой, если порядковое сопряженное $\boldsymbol{E}^o$ тотально на $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Например, если $\boldsymbol{E}$ порядково регулярно. Однако даже в этом случае указанный выше индуктивный предел, вообще говоря, не является строгим индуктивным пределом, т. е. при вложении $\boldsymbol{E}_{e_1} \subset \boldsymbol{E}_{e_2}$ топология подпространства $\boldsymbol{E}_{e_1}$, вообще говоря, строго сильнее индуцированной топологии из пространства $\boldsymbol{E}_{e_2}$.

Так, например, рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L}_p(X)$, $p > 0$, канонический полупорядок, т.е. $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ п. в. на измеримом множестве $Y \subset X$ положительной меры. Тогда применяя следствие 13 получим, что $\boldsymbol{L}_p(X)$ является порядково факторзвездным и, следовательно, будет порядково факторвыпуклым в порядково ограниченной топологии τ_b. Выберем две функции так, чтобы имело место неравенство $0 \leqslant f \leqslant g$, причем f — существенно ограничена, а g — существенно неограничена на множестве Y. Тогда топология $\boldsymbol{E}_f$ строго сильнее индуцированной топологии $\boldsymbol{E}_g$.

Предложение 22. *Пусть в архимедово полуупорядоченном пространстве $\boldsymbol{E}$ определена аффинная топология τ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) фактортопология $\widehat{\tau}$ совпадает с порядково ограниченной топологией τ_b;

b) *факторнтопология* $\widehat{\tau}$ *является сильнейшей аффинной топологией в пространстве* $\widehat{\boldsymbol{E}}$, *которая является порядково факторзвездной;*

Для доказательства (b) заметим, что в силу следствия 13 порядково ограниченная топология τ_b является порядково факторзвездной. Кроме того, в силу следствия 2 для всякой аффинной топологии τ в пространстве $\boldsymbol{E}$, которая является порядково факторзвездной, все порядковые интервалы топологически ограничены в факторпространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Так как по определению τ_b является сильнейшей топологией, для которой все порядковые интервалы будут топологически ограниченными, то τ_b сильнее топологии $\widehat{\tau}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Список литературы

[1] *Биркгоф Г.*, Теория решеток. М: Наука, 1984.

[2] *Бурбаки Н.*, Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.

[3] *Шефер Х.*, Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

[4] *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.*, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[5] *Вулих Б. З.*, Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Наука, 1961.

[6] *Бурбаки Н.*, Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.

[7] *Федоров В. М.*, Характеристика полуупорядоченных пространств, допускающих положительные и мажорируемые продолжения операторов // Современные проблемы математики и механики. К 105-летию С. М. Никольского. Изд. МГУ, 2011, т. 6, № 1, с. 126–142.

[8] *Klee V.L.*, Convex sets in linear spaces // Duke Math. J., 1951, v. 18, p. 443–466.

[9] *Федоров В. М.*, Факторнормальные клинья полуупорядоченных пространств // Вестн. МГУ сер. 1, Матем. Механ, 2008, № 4, с. 26–36

[10] *Рудин У.*, Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.

[11] *Birkhoff G.*, Moore-Smith convergence in general topology // Ann. of Math., 1937, v. 38, № 1, p. 39–56.

[12] Moore E.H., On the faundations of the theory of linear integral equations // Bull. Am. Math. Soc., 1912, v. 18, p. 334–362.

[13] *Канторович Л. В.*, Линейные полуупорядоченные пространства // Матем. сб., 1937, v. 2, № 44, с. 121–168.

[14] *Gordon H.*, Relative uniform convergence // Math. Ann., 1964, v. 153, p. 418–427.

[15] *Namioka I.*, Partially ordered linear topological spaces // Memors Am. Math. Soc., 1957, v. 24, Am. Math. Soc. Providence.

[16] *Келли Дж.*, Общая топология. М.: Наука, 1981.

[17] *Kelley J.*, Convergence in topology // Duke Math. J., 1950, v. 17, p. 277–283.

[18] *Урысон П.С.*, Труды по топологии и другим областям математики. М: Гостехиздат, 1951. Том II.

[19] *Соболев С. Л.*, Введение в теорию кубатурных формул. М: Наука, 1974.

[20] *Klee V.L.*, The support property of a convex set in linear normed space // Duke Math. J., 1948, v. 15, p. 767–772.

РАЗДЕЛ 3

Теоретическая механика и мехатроника

Роль и значение П.Л.Чебышева в развитии прикладной механики

В целом ряде работ отечественных и иностранных исследователей П.Л.Чебышев рассматривается в первую очередь как выдающийся русский математик. Гораздо меньше изучена его роль в развитии прикладной механики и теории механизмов. Чебышеву принадлежит заслуга научной постановки и решения ряда задач, касающихся одной из самых трудных проблем теории механизмов — проблемы синтеза (проектирования и конструирования) механизмов. Значительную долю своих усилий он потратил на синтез шарнирных механизмов и на создание их теории. Особенное внимание он уделял усовершенствованию параллелограмма Уатта — механизма, служащего для превращения кругового движения в прямолинейное. Этот основной для паровых двигателей и других машин механизм был весьма несовершенен и давал вместо прямолинейного движения криволинейное. Такая подмена одного движения другим вызывала вредные сопротивления, портившие и изнашивавшие машину. Многие поколения инженеров пробовали бороться с этим дефектом, но существенных результатов добиться не смогли. П.Л.Чебышев взглянул на дело с новой точки зрения и поставил вопрос так: создать механизмы, в которых криволинейное движение возможно меньше отклонялось бы от прямолинейного, и определить при этом наивыгоднейшие размеры частей машины. С помощью специально разработанного им аппарата теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, он показал возможность решения задачи о приближенно-прямолинейном движении с любой степенью приближения к этому движению. На основе разработанного им метода он дал ряд новых конструкций приближенно-направляющих механизмов.

Изучая траектории, описываемые отдельными точками звеньев шарнирно-рычажных механизмов, П.Л.Чебышев останавливается на траекториях, форма которых является симметричной. Изучая свойства этих симметричных траекторий (шатунных кривых), он показывает, в частности, что можно шарнирными механизмами воспроизвести вращательное движение с различным направлением вращения около двух осей, причем указанные механизмы не будут ни параллелограммами, ни антипараллелограммами. Один из таких механизмов, получивший в дальнейшем название парадоксального, является до сих пор предметом удивления всех техников и специалистов. Передаточное отношение между ведущим и ведомым валами в этом механизме может меняться в зависимости от направления вращения ведущего вала.

П.Л.Чебышев создал ряд так называемых механизмов с остановками. В этих механизмах, широко применяемых в современном автоматостроении, ведомое звено совершает прерывистое движение, причем отношение времени покоя ведомого звена ко времени его движения должно изменяться в зависимости от технологических задач, поставленных перед механизмом.

Используя свои механизмы, П.Л.Чебышев построил знаменитую стопоходящую машину, имитирующую своим движением движение животного; он построил так называемый гребной механизм, который имитирует движение весел лодки, самокатное кресло, дал оригинальную модель сортировальной машины и других механизмов. До сих пор мы с изумлением наблюдаем за движением этих механизмов и поражаемся богатой технической интуиции П.Л.Чебышева.

Научное наследство П.Л.Чебышева в области теории механизмов содержит такое богатство идей, которое представляет великого математика подлинным новатором техники.

О движении твердого тела, состоящего из двух дисков, по горизонтальной плоскости[1]

Ицкович М.О.[2], Кулешов А.С.[3]

В работе рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух дисков одинакового радиуса, соединенных перпендикулярно друг другу. Данное тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается ее двумя точками. В предположении, что движение тела происходит без проскальзывания, построены траектории точек касания на плоскости. Отмечены случаи, когда эти траектории можно построить лишь численно, а когда удается указать их уравнения в явном виде. Найдены также положения равновесия на плоскости и получены условия их устойчивости.

Введение

Значительную часть творческого наследия П.Л. Чебышева составляют работы, посвященные исследованию кинематики различных механизмов [1, 2]. Изначальной задачей, которую рассматривал Чебышев, было построение плоского шарнирного механизма, переводящее движение одного шарнира по окружности в движение другого шарнира по прямой, т.е. спрямляющего механизма.

Задача построения механизма, осуществляющего некоторое заданное движение, т.е. задача синтеза механизмов часто содержит несовместимые условия. Ввиду этого, задача построения механизма, выполняющего заданное движение, может быть решена с известными ограничениями лишь приближенно.

Разрабатывая приближенные аналитические методы синтеза механизмов, П.Л. Чебышев расширил методы математического анализа и указал способы построения функций, осуществляющих наилучшее приближение в указанном им смысле. Построенный им механизм с траекторией ведомого шарнира, на некотором участке не сильно уклоняющейся от отрезка (так называемый механизм Чебышева), имеет всего одну степень свободы.

Рассматриваемая в данной работе механическая система также имеет одну степень свободы. Данная система состоит из двух однородных дисков одинакового радиуса, соединенных перпендикулярно друг другу. Полученное таким образом твердое тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается ее двумя

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00322.

[2]Ицкович Михаил Олегович, m1shok7@mail.ru, студент кафедры теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Кулешов Александр Сергеевич, kuleshov@mech.math.msu.su, akule@pisem.net, доцент кафедры теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

точками. В предположении, что движение тела происходит без проскальзывания, построены траектории точек касания на плоскости. Найдены положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

1 Постановка задачи

Рассмотрим два одинаковых круглых диска радиуса R. На каждом из дисков отметим один из диаметров, а затем соединим эти диски перпендикулярно друг другу так, чтобы отмеченные диаметры образовывали единую ось симметрии (Рис. 1). Полученное таким образом твердое тело всегда будет иметь две точки касания с горизонтальной плоскостью. Пусть расстояние между центрами дисков равно 2Δ.

Рис. 1: Тело, состоящее из двух дисков.

Ранее в работах [3]-[6] рассматривался так называемый олоид – частный случай описанного твердого тела, для которого $2\Delta = R$. Другими словами, для олоида окружность одного диска проходит через центр другого. Были получены траектории точек касания олоида с плоскостью.

Несмотря на то, что данная система имеет всего одну степень свободы, ее движение является весьма необычным и нуждается в исследовании. Ниже сформулированы основные факты из кинематики и дифференциальной геометрии, которые будут использоваться нами в дальнейшем.

2 Основные теоретические факты

Репер Френе и его угловая скорость. Натуральные уравнения кривой. При изучении задачи о движении точки по криволинейной траектории часто используется естественный трехгранник – репер Френе, с началом в движущейся точке, образованный единичным вектором касательной к траектории $\boldsymbol{\tau}$, главной нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и бинормалью $\boldsymbol{\beta}$. Для производных этих векторов справедливы формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = k\dot{s}\boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} = -k\dot{s}\boldsymbol{\tau} + æ\dot{s}\boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = -æ\dot{s}\boldsymbol{\nu}. \tag{1}$$

Здесь s – натуральный параметр, $k = k(s)$ – кривизна кривой (траектории точки), $æ = æ(s)$ – кручение кривой.

Из курса механики известно, что производные единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ любого подвижного базиса удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i], \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость данного базиса. Поэтому формулы Френе (1) также можно представить в виде уравнений Пуассона (2); для вектора угловой скорости репера Френе $\boldsymbol{\Omega}$ (его еще называют вектором Дарбу) получим выражение:

$$\boldsymbol{\Omega} = k\dot{s}\boldsymbol{\beta} + æ\dot{s}\boldsymbol{\tau}.$$

В частности, если траектория движущейся точки – плоская, то $æ = 0$ и

$$\boldsymbol{\Omega} = k\dot{s}\boldsymbol{\beta}. \tag{3}$$

В этом случае введем неподвижную систему координат Oxy в плоскости, содержащей кривую. Пусть радиус-вектор движущейся точки относительно введенной системы координат имеет вид:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(s) = x(s)\boldsymbol{e}_x + y(s)\boldsymbol{e}_y,$$

Обозначим через $\alpha(s)$ угол между касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к данной кривой

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{e}_y$$

и единичным вектором $\boldsymbol{e}_x$ оси Ox. Поскольку $\boldsymbol{\tau}(s)$ – единичный вектор, то его проекции на оси Ox и Oy равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ соответственно. С другой стороны

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{e}_y,$$

и поэтому

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha. \tag{4}$$

Более того, в соответствии с первой формулой Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = (-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\boldsymbol{e}_y)\,\frac{d\alpha}{ds}\boldsymbol{\nu} = k(s)\boldsymbol{\nu},$$

следовательно

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s). \tag{5}$$

Таким образом, по заданной кривизне кривой $k = k(s)$ можно построить параметрические уравнения этой кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$.

Теорема сложения угловых скоростей. Пусть твердое тело движется относительно некоторой неподвижной системы координат. Можно рассматривать движение твердого тела как сложное: тело движется относительно некоторой подвижной системы координат которая, в свою очередь, известным образом движется относительно неподвижной системы координат. Абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}}$ твердого тела называется угловая скорость твердого тела относительно неподвижной системы координат, относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ твердого тела – угловая скорость твердого тела относительно подвижной системы координат. Переносной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}}$ называется угловая скорость подвижной системы координат относительно неподвижной.

Теорема. [7] *Абсолютная угловая скорость твердого тела равна сумме переносной и относительной угловых скоростей:*

$$\boldsymbol{\omega}^{абс} = \boldsymbol{\omega}^{пер} + \boldsymbol{\omega}^{отн}.$$

Угловая скорость катящейся пластинки. Пусть по неподвижной плоской кривой, заданной натуральным параметром s и имеющей кривизну $K(s)$, катится без проскальзывания пластинка, граница которой задана тем же натуральным параметром s и имеет кривизну $k(s)$. Будем считать, что закон изменения натурального параметра со временем известен: $s = s(t)$.

Лемма 1. *Угловая скорость пластинки при ее движении по неподвижной кривой равна:*

$$\boldsymbol{\omega} = (K - k)\,\dot{s}\boldsymbol{e}_z, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{e}_z$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости движения.

Доказательство. Воспользуемся теоремой сложения угловых скоростей. Свяжем с неподвижной кривой систему координат $Oxyz$, с подвижной кривой – систему координат $A\xi\eta z$ и будем следить за движением репера Френе $P\boldsymbol{\tau\nu e}_z$ с началом в точке касания P кривых относительно каждой из этих систем (Рис. 2).

Относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ репер Френе $P\boldsymbol{\tau\nu e}_z$ вместе с точкой касания P движется по неподвижной кривой, следовательно, его абсолютная угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}} = K(s)\dot{s}\boldsymbol{e}_z$ (см. формулу (3)). Относительно подвижной системы координат $A\xi\eta z$ репер Френе вместе с точкой касания P движется по подвижной кривой,и, следовательно, его относительная угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} = k\dot{s}\boldsymbol{e}_z$. Переносная угловая скорость – это угловая скорость подвижной системы координат относительно неподвижной, то есть, в данном случае, это и есть искомая угловая скорость подвижной кривой. Таким образом, по теореме сложения угловых скоростей получаем

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{абс}} - \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} = K(s)\dot{s}\boldsymbol{e}_z - k(s)\dot{s}\boldsymbol{e}_z = (K - k)\dot{s}\boldsymbol{e}_z$$

что и требовалось доказать. □

Касание плоскости двумя точками. Пусть по неподвижной горизонтальной плоскости движется твердое тело, состоящее из двух соединенных между собой пластинок. Предположим, что в каждый момент времени твердое тело имеет касание с плоскостью в двух точках A и B и скорости этих точек тела равны нулю (то есть, движение происходит без проскальзывания). Пусть кривизна границы первой пластинки в точке касания A равна $k(s)$ и закон движения точки A по границе пластинки задан: $s = s(t)$.

Лемма 2. *Кривизна $K(s)$ траектории точки касания A на неподвижной плоскости связана с кривизной границы пластинки формулой*

$$K = k\cos\varphi, \tag{7}$$

где φ – угол наклона пластинки к горизонтальной плоскости.

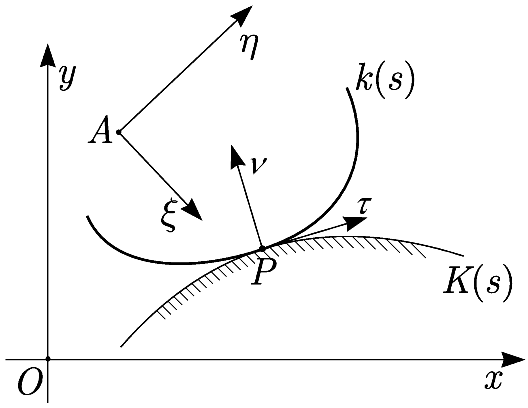


Рис. 2: Кинематика плоскопараллельного движения пластинки.

Доказательство. Введем три системы координат: $O\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$ – неподвижная система координат с вектором $\boldsymbol{e}_z$, перпендикулярным плоскости, по которой движется пластинка; $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}$ – репер Френе границы пластинки в точке A и $A\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{e}_z$ – репер Френе траектории точки касания на неподвижной плоскости (Рис. 3).

Поскольку движение твердого тела происходит без проскальзывания, и тело касается опорной плоскости в точках A и B, то можно утверждать, что вектор угловой скорости тела коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$. Нам понадобится даже более слабый вывод: вектор угловой скорости целиком принадлежит опорной плоскости

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\tau_1}\boldsymbol{\tau}_1 + \omega_{\nu_1}\boldsymbol{\nu}_1. \tag{8}$$

С другой стороны, по теореме сложения угловых скоростей

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость пластинки относительно неподвижного репера $O\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ – угловая скорость пластинки относительно репера $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}$, а $\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}}$ – угловая скорость репера $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}$ относительно неподвижного репера $O\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$. Относительная угловая скорость пластинки равна угловой скорости репера Френе $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}$ относительно пластинки, взятой с противоположным знаком (см. (3), (6)):

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = -k\dot{s}\boldsymbol{e}_{\beta}.$$

Переносная угловая скорость в свою очередь может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} = \boldsymbol{\omega}_1^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}_1^{\text{отн}},$$

где $\boldsymbol{\omega}_1^{\text{отн}}$ – угловая скорость репера $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\beta}$ относительно репера $A\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{e}_z$, а $\boldsymbol{\omega}_1^{\text{пер}}$ – угловая скорость репера $A\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{e}_z$ относительно неподвижного репера $O\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$.

Поскольку единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ совпадают, то $\boldsymbol{\omega}_1^{\text{отн}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_1$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{\beta}$ или угол наклона пластинки к неподвижной плоскости; $\boldsymbol{\omega}_1^{\text{пер}}$ – это угловая скорость репера Френе $A\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{e}_z$ при движении по траектории точки касания на плоскости, то есть $\boldsymbol{\omega}_1^{\text{пер}} = K\dot{s}\boldsymbol{e}_z$, где K – кривизна траектории точки касания на плоскости. Окончательно получаем следующее выражение для угловой скорости пластинки:

$$\boldsymbol{\omega} = K\dot{s}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_1 - k\dot{s}\boldsymbol{\beta}.$$

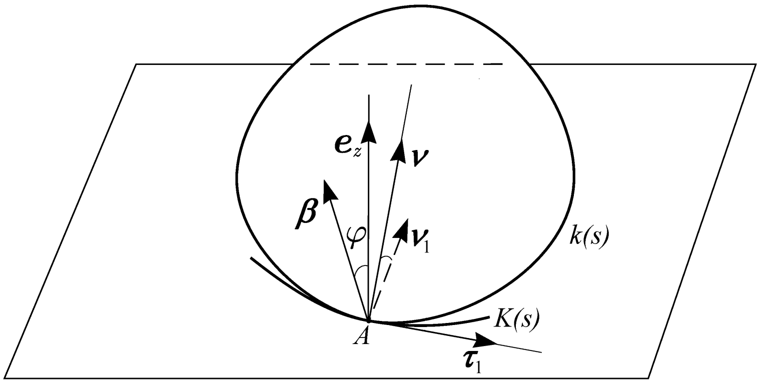


Рис. 3: К доказательству Леммы 2.

Учитывая, что

$$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\nu}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{\beta}_1 \cos\varphi$$

окончательно получаем:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_1 + k\dot{s}\sin\varphi\boldsymbol{\nu}_1 - k\dot{s}\cos\varphi\boldsymbol{e}_z + K\dot{s}\boldsymbol{e}_z.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (8) для той же самой угловой скорости, убеждаемся, что компонента угловой скорости вдоль вектора $\boldsymbol{e}_z$ должна обращаться в нуль

$$K - k\cos\varphi = 0$$

откуда и следует требуемое равенство. □

3 Движение тела, состоящего из двух дисков

Основные системы координат. Пусть твердое тело, составленное из двух одинаковых дисков, движется по неподвижной горизонтальной плоскости. Введем систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с движущимся телом. Начало системы $Gx_1x_2x_3$ совпадает с центром масс G тела, ось Gx_2 является осью симметрии и проходит через центры дисков, составляющих тело. Ось Gx_3 перпендикулярна плоскости первого диска, а ось Gx_1 перпендикулярна плоскости второго диска. Единичные векторы этой системы координат обозначим $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (Рис. 4).

Пусть A и B – точки касания тела с горизонтальной плоскостью. Положение точки A будем определять углом θ между отрицательным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_1 первой окружности в точку A. Заметим, что угол θ связан простейшей формулой с натуральным параметром s – длиной дуги окружности диска: $s = R\theta$. Положение точки B будем определять углом ψ между положительным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_2 второй окружности в точку B (Рис. 4). Тогда радиус-вектор точки A может быть записан следующим образом:

$$\overrightarrow{GA} = \boldsymbol{r}_1 = R\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - (\Delta + R\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_2,$$

а радиус-вектор точки B имеет вид:

$$\overrightarrow{GB} = \boldsymbol{r}_2 = (\Delta + R\cos\psi)\,\boldsymbol{e}_2 - R\sin\psi\boldsymbol{e}_3.$$

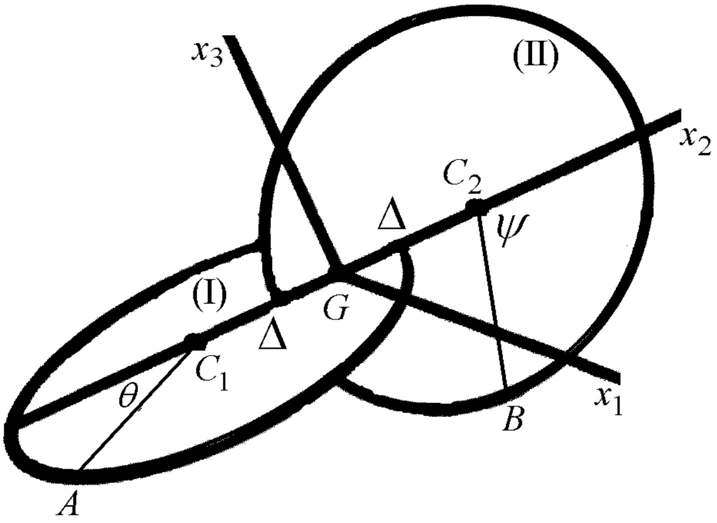


Рис. 4: Подвижная система координат и основные переменные задачи.

При движении тела по горизонтальной плоскости три вектора $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $(\boldsymbol{r}_1)'_\theta$ и $(\boldsymbol{r}_2)'_\psi$ должны лежать в этой плоскости. Соответствующее условие можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} -R\sin\theta & 2\Delta + R\cos\theta + R\cos\psi & -R\sin\psi \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ 0 & -R\sin\psi & -R\cos\psi \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого условия находится связь между двумя параметризациями

$$\cos\psi = -\frac{R\cos\theta}{R + 2\Delta\cos\theta}. \tag{9}$$

Если ввести теперь безразмерный параметр $p = \Delta/R$, то соотношение (9) можно переписать в виде:

$$\cos\psi = -\frac{\cos\theta}{1 + 2p\cos\theta}. \tag{10}$$

Отметим, что по физическому смыслу задачи параметр p должен изменяться в пределах $p \in (0, +\infty)$.

Используя равенство (10), можно выразить радиус-вектор точки B через переменную θ:

$$\overrightarrow{GB} = R\left(\frac{p + (2p^2 - 1)\cos\theta}{1 + 2p\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_2 - \frac{R\sqrt{(1 + (2p-1)\cos\theta)\,(1 + (2p+1)\cos\theta)}}{1 + 2p\cos\theta}\boldsymbol{e}_3. \tag{11}$$

Можно показать, что выражение (11) имеет смысл, только если $\cos\theta$ изменяется в пределах

$$\cos\theta \in \left[-\frac{1}{(2p+1)},\, 1\right],$$

то есть будем накладывать следующие ограничения на введенные параметры θ и ψ:

$$-\arccos\left(-\frac{1}{(2p+1)}\right) \le \theta \le \arccos\left(-\frac{1}{(2p+1)}\right),$$

$$-\arccos\left(-\frac{1}{(2p+1)}\right) \le \psi \le \arccos\left(-\frac{1}{(2p+1)}\right).$$

Легко видеть, что в силу специфической конструкции тела эти предположения выполняются.

Траектории точек контакта. Запишем уравнение неподвижной плоскости, по которой движется тело, в системе координат $Gx_1x_2x_3$. Пусть X, Y, Z – координаты произвольной точки этой плоскости относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$. Тогда уравнение плоскости можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} X-R\sin\theta & Y+R\left(\cos\theta+p\right) & Z \\ -R\sin\theta & \dfrac{2pR\left(1+2p\cos\theta+\cos^2\theta\right)}{1+2p\cos\theta} & -\dfrac{R\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}}{1+2p\cos\theta} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=0$$

или, после некоторых упрощений,

$$-\sin\theta X+\cos\theta Y+\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}Z+R\left(1+p\cos\theta\right)=0.$$

Единичный вектор

$$\boldsymbol{n}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}\boldsymbol{e}_1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}\boldsymbol{e}_2+$$

$$+\frac{\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}}{\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}\boldsymbol{e}_3.$$

является нормальным вектором к этой плоскости. Следовательно, угол наклона первой пластинки к плоскости движения может быть записан в виде:

$$\cos\varphi=\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3\right)=\frac{\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}}{\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}.$$

Радиус кривизны окружности в любой ее точке равен $k=1/R$. Поэтому, используя (7), мы можем вычислить кривизну траектории точки контакта A на неподвижной плоскости:

$$K=\frac{\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}}{R\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}.$$

После того, как найдено выражение для кривизны K можно найти параметрические уравнения траектории точки A на неподвижной плоскости. Для этого введем неподвижную систему координат $Oxyz$. Начало O этой системы совпадает с точкой касания первого диска с неподвижной плоскостью при $\theta=0$. Ось Ox направлена по касательной к окружности первого диска при $\theta=0$, ось Oz перпендикулярна плоскости движения. Ось Oy образует правую тройку с осями Ox и Oz. Пусть α – угол между касательным вектором к траектории точки A и осью Ox. Тогда по формуле (5)

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{Rd\theta}=K\left(\theta\right),\quad \text{то есть}\quad \frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{\sqrt{\left(1+(2p-1)\cos\theta\right)\left(1+(2p+1)\cos\theta\right)}}{\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+2p\cos\theta\right)^2}}.$$

Интегрирование данного уравнения позволяет найти зависимость $\alpha = \alpha(\theta)$. Используя эту зависимость и формулы (4), можно получить зависимости $x_A = x_A(\theta)$ и $y_A = y_A(\theta)$. Тем самым, задача определения траектории точки A на неподвижной плоскости будет решена.

К сожалению, найти явную зависимость $\alpha = \alpha(\theta)$ не удается, так как соответствующий неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{(1+(2p-1)\cos\theta)\,(1+(2p+1)\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + (1+2p\cos\theta)^2}}$$

при произвольном p не выражается через известные функции. Поэтому построение траекторий точек A и B касания тела с плоскостью производилось численно при различных значениях параметра p. На Рис. 5-6 представлены траектории точек A и B при $p = 1/2$ и $p = 1$. На этих рисунках нижняя кривая представляет собой траекторию точки A, а верхняя кривая – траекторию точки B.

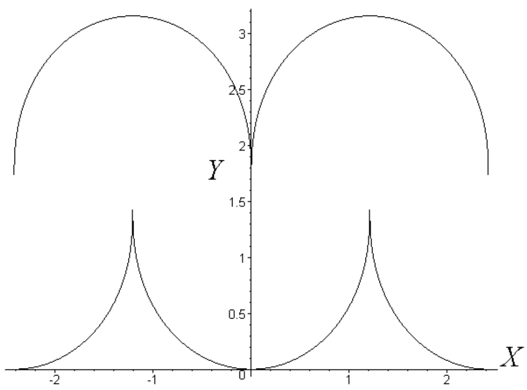


Рис. 5: Траектории точек касания тела с плоскостью при $p = 1/2$.

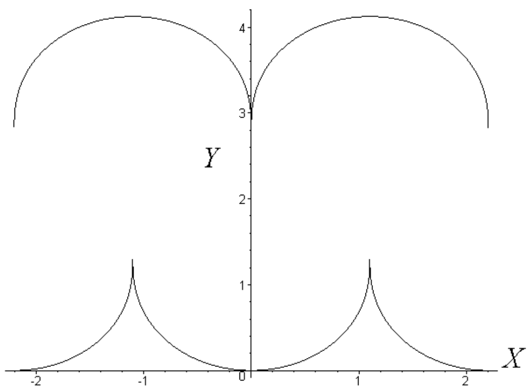


Рис. 6: Траектории точек касания тела с плоскостью при $p = 1$.

Отметим, что при некоторых значениях параметра p интеграл (12) можно выразить через известные функции. В частности, при $p = 1/2$ (т.е. в случае олоида) интеграл (12) выражается через элементарные функции и мы получаем (см. [5, 6])

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}}\right),$$

$$x_A(\theta)=\frac{2R\sqrt{3}}{9}\left(\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1+2\cos\theta}\right),$$

$$y_A(\theta)=\frac{8R\sqrt{3}}{9}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{2R\sqrt{3}}{9}\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),\quad -\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}.$$

Для точки B:

$$x_B(\theta)=\frac{2R\sqrt{3}}{9}\left(\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}}\right)-\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{(1+\cos\theta)}\sqrt{1+2\cos\theta}\right),$$

$$y_B(\theta)=\frac{7R\sqrt{3}}{9}+\frac{2R\sqrt{3}}{9\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}-\frac{2R\sqrt{3}}{9}\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),\quad -\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}.$$

При $p=1/\sqrt{2}$ интеграл (12) выражается через эллиптические функции.

Положения равновесия тела на плоскости. Их устойчивость. Используя выражения для радиуса-вектора $\overrightarrow{GA}$ точки A и вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости движения, легко получить выражение для потенциальной энергии V тела, составленного из двух дисков. Действительно,

$$V=Mgz_G=-Mg\left(\overrightarrow{GA}\cdot\boldsymbol{n}\right)=MgR\frac{(1+p\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta+(1+2p\cos\theta)^2}}.$$

Критические точки потенциальной энергии соответствуют положениям равновесия рассматриваемой системы. Производная функции V имеет вид:

$$V'=MgR\frac{(2p^2-1)\sin\theta\cos\theta}{\left(\sin^2\theta+(1+2p\cos\theta)^2\right)^{3/2}}.$$

Следовательно, система имеет два положения равновесия: $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$. Знак второй производной функции V, вычисленной в положении равновесия, определяет характер устойчивости данного равновесия. Для значения $\theta=0$ имеем:

$$V''\Big|_{\theta=0}=\frac{MgR\,(2p^2-1)}{(1+2p)^3}.$$

Следовательно, положение равновесия $\theta=0$ устойчиво, если $2p^2-1>0$ и неустойчиво при $2p^2-1<0$. Аналогично, для положения равновесия $\theta=\pi/2$ получаем:

$$V''\Big|_{\theta=\pi/2}=-\frac{MgR}{2\sqrt{2}}\left(2p^2-1\right)$$

откуда следует, что положение $\theta=\pi/2$ устойчиво, если $2p^2-1<0$ и неустойчиво, если $2p^2-1>0$.

Случай $2p^2-1=0$, т.е. $p=1/\sqrt{2}$ соответствует безразличному положению равновесия. Центр масс тела в этом случае при движении будет все время находиться на постоянной высоте.

4 Заключение

В данной работе получены параметрические уравнения траекторий точек касания тела,состоящего из двух дисков, с горизонтальной плоскостью. Найдены все положения тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Список литературы

[1] *Чебышев П.Л.*, Полное собрание сочинений в 5 т. Т.4. Теория механизмов. М.-Л.: Академия наук СССР, 1948. 255 с.

[2] *Чебышев П.Л.*, Избранные труды. М.: Академия наук СССР, 1955. 929 с.

[3] *Schatz P.*, Rhythmusforschung und Technik. Verlag Freies Geistesleben. Stuttgart, 1998. 196 p.

[4] *Dirnbök H., Stachel H.* The Development of the Oloid // Journal of Geometry and Graphics, 1997, v. 1, p. 105–118.

[5] *Kuleshov A.S., Hubbard M., Peterson D.L., Gede G.*, On the motion of the Oloid toy // Proceedings of XXXIX International Summer School-Conference APM 2011. Saint-Petersburg: IPME. P. 275–282.

[6] *Кулешов А.С.*, О движении олоида по горизонтальной плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4, часть 2, с. 191–192.

[7] *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.*, Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 430 с.

Об особенностях равновесий критических систем

Самсонов В.А.[1], Селюцкий Ю.Д.[2], Михалев А.А.[3]

Рассматриваются кинематические цепи, для которых множество виртуальных перемещений одной или нескольких точек является пустым. Показано, что такие механизмы обладают «мертвыми» положениями — положениями равновесия, не зависящими от направления действия силы, приложенной к одной из этих точек. Рассмотрены также механизмы с особенностью другого типа, в которых ранг матрицы Якоби системы связей уменьшается на единицу в одной или нескольких изолированных точках конфигурационного многообразия при критическом значении одного из параметров связей. Показано, что перестройка конфигурационного многообразия механизма в окрестности особой точки пространства обобщенных координат при прохождении параметром критического значения, представляющая с точки зрения теории машин и механизмов «переход» с одной сборки механизма на другую, топологически описывается перестройками Морса.

Введение

Понятия *связи* и *виртуальные перемещения* входят в число основных и традиционных понятий аналитической механики. Тем не менее, не все их особенности подверглись анализу. Частично они обсуждались в [1]-[4].

Одной из проблем созданного еще трудами П.Л. Чебышева синтеза механизмов является проблема «особых положений», в которых конфигурационное многообразие механизма обладает самопересечением при некоторых — критических — значениях параметров связей. Такие механизмы принято называть критическими, вырожденными, обладающими неопределенностью движений звеньев. Изменяя во время синтеза параметры механизма, независимо от размера шага, можно «проскочить» особые положения и получить механизм, область движения которого и, как следствие, его свойства и динамика меняются кардинальным образом. Механизмы с положениями, в которых наблюдается неопределенность движений звеньев, достаточно часто встречаются на практике, например, известны различные типы кривошипно-ползунного механизма с указанными свойствами.

В математической основе вырождения совокупности связей механизмов при определенных значениях параметров лежат критические точки семейств гладких функций, зависящих от параметров — предмет широкого исследования теории бифуркаций и теории особенностей.

[1]Самсонов Виталий Александрович, samson@imec.msu.ru, профессор, глав. науч. сотр. лаб. навигации и управления НИИ механики МГУ.

[2]Селюцкий Юрий Дмитриевич, seliutski@imec.msu.ru, доцент, старш. науч. сотр. лаб. навигации и управления НИИ механики МГУ.

[3]Михалев Алексей Александрович, alexey_mih@inbox.ru, к.ф.-м.н.

В настоящей работе исследованы две основные задачи для механизмов с одной и более степенями свободы: наличие положений равновесия в окрестности особого положения и их бифуркация; перестройка конфигурационного многообразия. Кроме того, рассмотрены особенности задачи равновесия плоской кинематической цепи.

1 Особенности задачи равновесия кинематической цепи.

Кинематические цепи являются объектом изучения теории машин и механизмов, в которой для их анализа были разработаны и используются специальные методы. Применение методов аналитической механики для исследования этих объектов позволяет выявить и объяснить некоторые интересные особенности их поведения.

1.1 Описание системы.

Рассмотрим систему твердых тел, которая совершает плоскопараллельное движение и может быть представлена в виде n-звенной кинематической цепи с закрепленными концами. Обозначим узлы цепи через O_i $(i = 0, ..., n)$, причем узлы O_0 и O_n неподвижны. Примем, что каждое тело-звено соединено с последующим и предыдущим в узлах цилиндрическими шарнирами, а крайние звенья O_0O_1 и $O_{n-1}O_n$ могут вращаться вокруг неподвижных осей O_0 и O_n. Введем в плоскости движения систему координат O_0xy, ось абсцисс которой направим вдоль линии неподвижных шарниров O_0O_n (рис. 1). Будем считать, что система находится под действием единственной силы $\mathbf{F}$, приложенной в шарнире O_k.

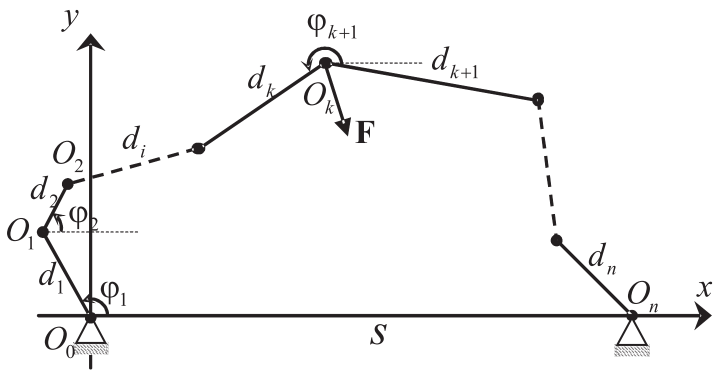


Рис. 1: Кинематическая цепь с закрепленными концами

Введем следующие обозначения: s — длина O_0O_n, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор $\mathbf{O_0O}_i$, d_i — длина i-го звена, φ_i — угол между i-ым звеном и осью Ox.

Связи, наложенные на систему, имеют вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \cos\varphi_i = s \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \sin\varphi_i = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где s предполагаем не равным нулю. Связи (1) выделяют в пространстве $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ многообразие M допустимых положений системы, размерность которого в общем случае равна

$(n-2)$. Пусть точка P:$(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ принадлежит многообразию M. Тогда в малой окрестности этой точки уравнения виртуальных перемещений имеют следующий вид: $G\delta\varphi = 0$, где

$$G = \begin{pmatrix} d_1 \sin\varphi_1 & ... & d_n \sin\varphi_n \\ d_1 \cos\varphi_1 & ... & d_n \cos\varphi_n \end{pmatrix}, \qquad \delta\varphi = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ ... \\ \delta\varphi_n \end{pmatrix}$$

В общем случае $\mathrm{rank}\,(G) = 2$, и множество виртуальных перемещений в окрестности точки P принадлежат касательному пространству TR^{n-2}. В случае $\mathrm{rank}\,(G) = 1$ система становится критической и требует дополнительного исследования. Для того, чтобы $\mathrm{rank}\,(G) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_i = \pi m_i\,,\ m_i \in Z,\ \ i \in 1, ..., n$, (цепь $O_0O_1O_2...O_n$ целиком лежит на прямой O_0O_n).

1.2 Равновесия системы

Найдем «мертвые» положения, в которых $\delta\mathbf{r}_k = 0$.

Утверждение 1. *Пусть P:*$(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in M$ *— некритическое положение системы, тогда*

$$\delta\mathbf{r}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi_i = \varphi_1 + \pi m_i\,,\ m_i \in Z,\ i = 1, ..., k \\ \varphi_j = \varphi_{k+1} + \pi m_j\,,\ m_j \in Z, j = k+1, ..., n \end{cases} \tag{2}$$

Геометрически условия (2) означают, что звенья первой части цепи лежат на одной прямой, а звенья второй части — на другой (рис. 2). При этом точка O_k приложения силы $\mathbf{F}$ находится на пересечении этих прямых.

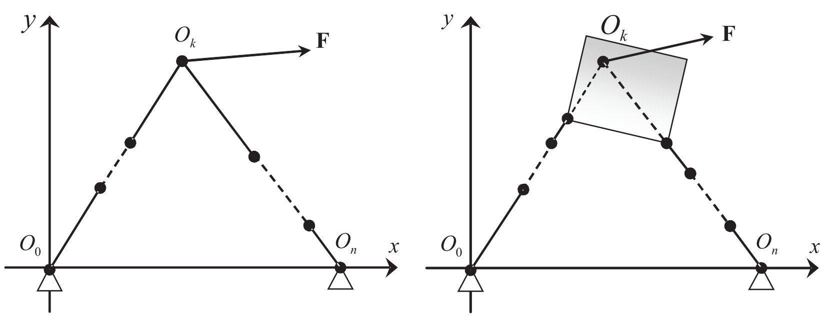


Рис. 2: «Мертвые» положения равновесия

Докажем сформулированное утверждение.

Достаточность:

Обозначим через x_k, y_k координаты вектора $\mathbf{r}_k$: $x_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i \cos\varphi_i$, $y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i \sin\varphi_i$. Из первой строки (2) следует, что $\delta\mathbf{r}_k \perp OO_k$:

$$\delta x_k = -\sum_{i=1}^{k} d_i \sin\varphi_i \delta\varphi_i = -\left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{m_i} d_i \delta\varphi_i\right) \sin\varphi_1 \tag{3}$$

$$\delta y_k = \sum_{i=1}^{k} d_i \cos\varphi_i \delta\varphi_i = \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{m_i} d_i \delta\varphi_i\right) \cos\varphi_1 \tag{4}$$

Из второй строки (2) следует, что $\delta \mathbf{r}_k \perp O_k O_n$:

$$\delta x_k = \sum_{i=k+1}^{n} d_i \sin\varphi_i \delta\varphi_i = \left(\sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{m_i} d_i \delta\varphi_i\right) \sin\varphi_{k+1} \tag{5}$$

$$\delta y_k = -\sum_{i=k+1}^{n} d_i \cos\varphi_i \delta\varphi_i = -\left(\sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{m_i} d_i \delta\varphi_i\right) \cos\varphi_{k+1} \tag{6}$$

В то же время, из условия некритичности точки P следует, что $\varphi_1 \neq \varphi_{k+1} + \pi m\,,\ m \in Z$. Следовательно, $\delta \mathbf{r}_k = 0$. Необходимость: В силу некритичности системы $\exists\, i \in \overline{1,k},\ j \in \overline{k+1,n}$: $\sin(\varphi_i - \varphi_j) \neq 0$. Следовательно, система уравнений, эквивалентная (2):

$$\begin{cases} d_i \sin\varphi_i \delta\varphi_i + d_j \sin\varphi_j \delta\varphi_j = -\sum\limits_{v \neq i,j} d_v \sin\varphi_v \delta\varphi_v \\ d_i \cos\varphi_i \delta\varphi_i + d_j \cos\varphi_j \delta\varphi_j = -\sum\limits_{v \neq i,j} d_v \cos\varphi_v \delta\varphi_v \end{cases} \tag{7}$$

имеет единственное решение относительно $\delta\varphi_i$, $\delta\varphi_j$. Без ограничения общности можно считать, что $\sin(\varphi_1 - \varphi_{k+1}) \neq 0$. Примем в качестве независимых перемещений $\delta\varphi_v$ ($v \neq 1, k+1$). Тогда:

$$\delta \mathbf{r}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 + ... + d_k \sin\varphi_k \delta\varphi_k = 0 \\ d_1 \cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + ... + d_k \cos\varphi_k \delta\varphi_k = 0 \\ d_{k+1} \sin\varphi_{k+1} \delta\varphi_{k+1} + ... + d_n \sin\varphi_n \delta\varphi_n = 0 \\ d_{k+1} \cos\varphi_{k+1} \delta\varphi_{k+1} + ... + d_n \cos\varphi_n \delta\varphi_n = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \tag{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=2}^{k} d_i \sin(\varphi_i - \varphi_1) \delta\varphi_i = 0 \\ \sum\limits_{i=k+2}^{n} d_i \sin(\varphi_i - \varphi_{k+1}) \delta\varphi_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_i = \varphi_1 + \pi m_i\,,\ m_i \in Z,\ i = 1, ..., k \\ \varphi_j = \varphi_{k+1} + \pi m_j\,,\ m_j \in Z, j = k+1, ..., n \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Замечание 1. Если условия (2) выполняются для $k = 1$ ($k = n-1$), то положение равновесия сохраняется и в том случае, когда сила $\mathbf{F}$ приложена не к точке O_1 (O_{n-1}), а к произвольной точке тела OO_1 ($O_{n-1}O_n$).

1.3 Волновой ветродвигатель С.Д. Стрекалова

Рассмотрим систему типа «волнового ветродвигателя С.Д. Стрекалова» [4, 5]. Система представляет собой кривошипно-коромысловый механизм, состоящий из маховика OP, двух стержней PA и AB и пластины. Маховик может вращаться вокруг неподвижной оси O, шарнир B неподвижен, а пластина прикреплена к стержню PA в точке A и составляет с этим стержнем угол β (рис. 3). Движение механизма осуществляется в горизонтальной плоскости. Система находится в потоке воздуха, скорость $\mathbf{V}$ которого на бесконечности постоянна и перпендикулярна прямой OB. Предположим, что воздействие

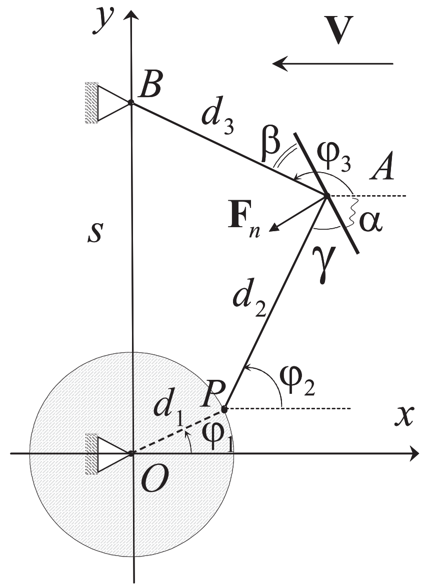


Рис. 3: Волновой ветродвигатель С.Д. Стрекалова

потока на пластину сводится к силе $\mathbf{F_n}$, приложенной в точке A и направленной перпендикулярно плоскости пластины (нормальная сила). Введем следующим обозначения: s — длина OB, d_1, d_2, d_3 — длины стержней, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор $\mathbf{OA}$, φ_1, φ_2, φ_3 — углы между стержнями и положительным направлением оси Ox.

Положения равновесия системы определяются из уравнения:

$$\mathbf{F_n}\delta\mathbf{r} = 0 \tag{10}$$

Нетрудно показать, что имеют место соотношения:

$$\mathbf{F_n} = \{-F_n \sin(\psi + \varphi_3), F_n \cos(\psi + \varphi_3)\}$$

где

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_3 - \beta + \pi \quad \delta\mathbf{r} = \{d_3 \sin\varphi_3\delta\varphi_3, -d_3\cos\varphi_3\delta\varphi_3\}$$

Следовательно, (10) в данном случае принимает вид:

$$F_n d_3 \cos\psi\delta\varphi_3 = 0 \tag{11}$$

Очевидно, равенство (11) выполняется в следующих трех случаях.

а) $\cos\psi = 0$, т.е. пластина перпендикулярна стержню AB и, соответственно, сила $\mathbf{F_n}$ направлена вдоль этого стержня.

б) $F_n = 0$. Известно, что нормальная сила, действующая на плоскую пластину, обращается в нуль только в случае, когда пластина параллельна набегающему потоку. Поэтому данный случай отвечает ситуации $\varphi_2 = \beta$.

в) $\delta\varphi_3 = 0$. Этот случай соответствует условиям утверждения, сформулированного в предыдущем разделе. Поэтому $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi k$, $k \in Z$. Это означает, что «звенья» OP и PA лежат на одной прямой. При этом возможно два геометрически разных положения:

1) $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in Z$ (вектора **OP** и **PA** направлены в одну сторону, рис. 4а)

2) $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ (вектора **OP** и **PA** противоположно направлены, рис. 4б)

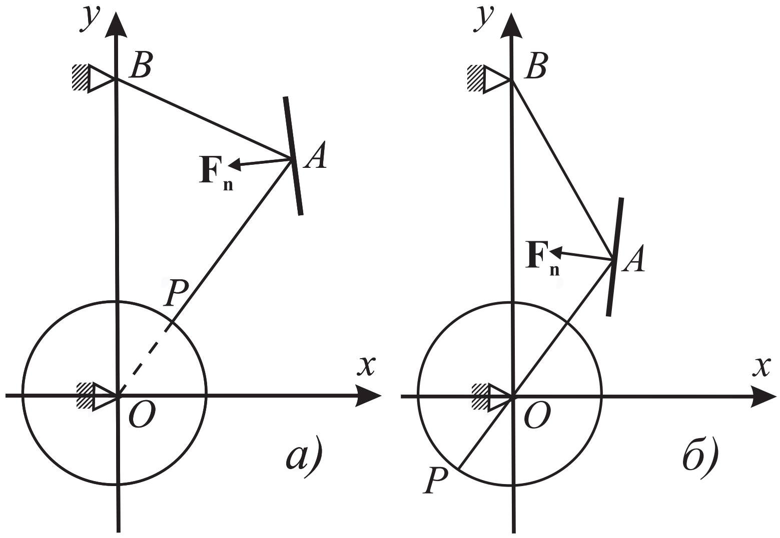


Рис. 4: Положения равновесия

Необходимо отметить, что положения равновесия, соответствующие случаю (в), существуют при любом значении угла β и длинах стержней, допускающих вращение маховика с совершением полных оборотов (т.е. $s < d_2 + d_3 - d_1$). В то же время положения равновесия, отвечающие первым двум случаям, реализуются лишь в части указанной области значений параметров.

2 Перестройки конфигурационных многообразий

Предположим, что на некоторую совокупность материальных точек $P_1, \dots, P_N$ наложены голономные стационарные связи

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, l) = 0,\ i = 1, \dots, k,\ k < 3N, \tag{12}$$

содержащие параметр l (x_j, y_j, z_j — декартовы координаты радиус-вектора $\mathbf{r}_j$ точки P_j).

При каждом значении параметра l уравнения (12) выделяют в пространстве R^{3N} конфигурационное многообразие $Q(l)$ размерности $n = 3N - k$. В каждой точке $N \in Q(l)$ множество виртуальных перемещений определяется как множество решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\delta z_j\right) = 0,\ i = 1, \dots, k. \tag{13}$$

В регулярном случае ранг системы (13) равен k и виртуальные перемещения образуют пространство размерности n. При этом можно ввести обобщенные координаты $q_1, \dots, q_n$.

Рассмотрим особенный случай, когда существует такое значение параметра $l = l^*$ и такая изолированная точка $M \in Q(l^*)$, в которой ранг системы (13) равен $k - 1$, т.е. найдутся коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ такие, что:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_k}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \frac{\partial f_k}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial z_j}, j = 1, \dots, N \tag{14}$$

Для того, чтобы система с голономными стационарными связями обладала описанной особенностью, необходимо и достаточно, чтобы система $k+3N$ алгебраических уравнений

(12,14) относительно $k+3N$ неизвестных $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, l, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$ имела изолированное решение.

Исключив из (12) одну из связей, введем избыточные координаты $q_1, \ldots, q_{n+1}$. Без ограничения общности будем считать, что $l^* = 0$, а в точке M имеем $q_1 = 0, \ldots, q_{n+1} = 0$. Исключенная связь после перехода к координатам q_k примет вид:

$$\varphi(q_1, \ldots, q_{n+1}, l) = 0, \tag{15}$$

а уравнение (13) для виртуальных перемещений:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \tag{16}$$

Несложно показать, что точка M — критическая для функции φ, т.е. $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_{n+1}} = 0$, следовательно, уравнение (16) для δq_i вырождается. В случае общего положения, при $\frac{\partial \varphi}{\partial l} \neq 0$ и $\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j}\| \neq 0$, согласно лемме Морса [4], координаты $q_1, \ldots, q_{n+1}$ можно подобрать таким образом, что в некоторой окрестности точки M уравнение (15) имеет канонический вид:

$$q_1^2 + \ldots + q_m^2 - q_{m+1}^2 - \ldots - q_{n+1}^2 - l = 0. \tag{17}$$

Перестройка конфигурационного многообразия $Q(l)$ в окрестности особой точки M пространства координат $q_1, \ldots, q_{n+1}$ при прохождении параметром критического значения $l = 0$ топологически представляет собой перестройку Морса [6]. Перестройка конфигурационного многообразия в случае $n = 1$ описана в [1,2]. Будем называть систему, соответствующую значению параметра $l = 0$, *критической*, а близкие к ней по значению параметра - *околокритическими*.

В зависимости от индекса m и знака параметра l множество $Q(l)$, определяемое уравнением (17), имеет различный топологический тип. При $m = n+1$ ($m = 0$) конфигурационное многообразие критической системы представляет собой одну особую точку, околокритических систем — либо n-мерную сферу при $l > 0$ ($l < 0$), либо пустое множество — при $l < 0$ ($l > 0$). При $0 < m < n+1$ конфигурационное многообразие критической системы является n-мерным конусом (при $n = 1$ — две пересекающиеся прямые), околокритических систем - различными типами n-мерных гиперболоидов индекса m. Множество $Q(l)$ в случае $n = 1$ — локально несвязное (в окрестности точки M) как при $l > 0$, так и при $l < 0$, в случае $n = 2$ — локально связное либо при $l > 0$, либо при $l < 0$, в случае $n > 2$ и $1 < m < n$ — локально связное как при $l > 0$, так и при $l < 0$.

Очевидно, что движение критической системы при $0 < m < n+1$ обладает следующей особенностью. Если в качестве начального состояния системы выбрать состояние покоя в критической точке M, то дальнейшее движение системы, вообще говоря, однозначно неопределимо.

3 Положения равновесия

Предположим, что система находится в поле действия потенциальных сил. Вопрос о том, является ли особое положение критической системы положением равновесия, в связи с неопределенностью движения не имеет однозначного ответа, и выходом из ситуации может стать некоторое общепринятое соглашение. Частичный ответ на этот вопрос дает исследование возмущенных — околокритических — систем на наличие и характер положений равновесия.

Для консервативных околокритических систем с потенциальной энергией вида $\varPi(\mathbf{q}) = \varPi(q_1, \ldots, q_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i q_i + O(\|\mathbf{q}\|^2)$ при $\|\mathbf{q}\| \to 0$, верно следующее: пусть $A = a_1^2 + \ldots + a_m^2 - a_{m+1}^2 - \ldots - a_{n+1}^2 \neq 0$, тогда:

а) В случае $Al > 0$ в окрестности особой точки система имеет два симметричных положения равновесия $\mathbf{q} = \pm\mathbf{q}^*$, где:

$$\begin{cases} q_i^* = a_i\sqrt{\dfrac{l}{A + o(1)}}, i = 1, \ldots, m \\ q_j^* = -a_j\sqrt{\dfrac{l}{A + o(1)}}, j = m+1, \ldots, n+1 \end{cases} \tag{18}$$

стягивающихся к особой точке при $l \to 0$;

б) В случае $Al < 0$ в окрестности особой точки положения равновесия отсутствуют.

Из (18) следует, что либо при $l > 0$, либо при $l < 0$ у околокритических систем существуют два положения равновесия, сливающихся и исчезающих при прохождении параметром критического значения $l = 0$. Характер устойчивости положений равновесия $\mathbf{q} = \pm\mathbf{q}^*$ и, соответственно, их бифуркация (назовем ее *типичной*) в зависимости от индекса m и знака величины A могут быть следующими. В случае, когда положения равновесия принадлежат разным ветвям локально несвязного множества $Q(l)$ — одно из них устойчивое, второе — неустойчивое, когда же они принадлежат локально связному множеству $Q(l)$ — они оба являются неустойчивыми.

При $A = 0$ возможна *нетипичная* бифуркация положений равновесия, зависящая от характера вырождения потенциальной энергии в особой точке (см., например, [3]). Рассмотрим одну из них для систем с одной степенью свободы ($n = 1$).

Пусть $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ — вектора, направленные вдоль независимых виртуальных перемещений критической системы в особой точке (рис. 5). В случае, если выполнены соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varPi}{\partial \boldsymbol{\xi}}(M) \neq 0 \\ \dfrac{\partial \varPi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(M) = 0; \dfrac{\partial^2 \varPi}{\partial \boldsymbol{\eta}^2}(M) > 0 \end{cases},$$

то в окрестности особой точки потенциальная энергия монотонно возрастает (убывает) по одному из направлений перемещений критической системы и имеет локальный минимум по другому направлению (рис.1).

При $l = 0$ особая точка не является положением равновесия, т.к. система скорее всего выйдет из состояния покоя (в случае $\frac{\partial \varPi}{\partial \boldsymbol{\xi}}(M) < 0$ — по направлению $\boldsymbol{\xi}$, в случае $\frac{\partial \varPi}{\partial \boldsymbol{\xi}}(M) > 0$ — по направлению $-\boldsymbol{\xi}$). При этом система допускает колебания около особой точки по направлению $\boldsymbol{\eta}$. Как при $l < 0$, так и при $l > 0$ условный экстремум функции $\varPi$ существует на одной из ветвей множества $Q(l)$ и отсутствует на другой. Т.о., при прохождении параметром критического значения положение равновесия обязательно сохраняется (в отличие от типичной бифуркации) на одной из сопряженных траекторий. Пример механизма, обладающего описанной бифуркацией положений равновесия, приведен в [3].

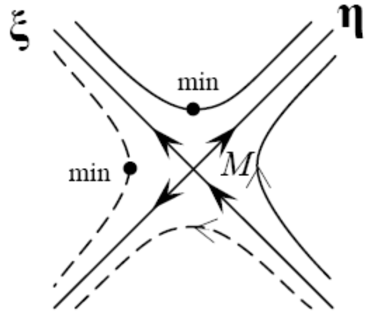


Рис. 5: Нетипичная бифуркация

4 Реакции связей околокритических систем

В каждой точке P_i системы равнодействующую реакций связей $\mathbf{R}_i$ можно представить в виде суммы двух составляющих $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i' + \mathbf{R}_i''$, где $\mathbf{R}_i'$ — реакции в отсутствии активных сил. $\mathbf{R}_i''$ является линейной комбинацией активных сил, и, следовательно, ограниченной величиной.

Обозначим $f_k' = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i$, $\boldsymbol{\gamma}(t) \in Q(l)$ — траектория системы, K_n — нормальная кривизна по направлению $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$. В некоторой окрестности особой точки имеют место соотношения: $\|\mathbf{R}_i\| = C_{i1} K_n \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 + C_{i2} + O(\sqrt{|l|})$ при $l \to 0$, $i = 1, \ldots, N$, где $C_{i1} = C_{i1}(\mathbf{q}) \le C_1$, $C_{i2} = C_{i2}(\mathbf{q}) \le C_2$, при этом если $\frac{\partial f_k'}{\partial \mathbf{r}_i} \ne 0$, то $0 < C_3 \le C_{i1}(\mathbf{q})$, где C_1,C_2,C_3 — константы, не зависящие от координат и параметра l.

В случае, если $\frac{\partial f_k'}{\partial \mathbf{r}_i} \ne 0$, величина реакции $\mathbf{R}_i$ линейно зависит от нормальной кривизны конфигурационного многообразия $Q(l)$ вдоль траектории системы, и квадратично — от обобщенной скорости. В случае $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = const$ в окрестности особой точки либо $K_n = 0$, либо $K_n \sim \frac{1}{\sqrt{|l|}}$ при $l \to 0$. Подпространство направлений $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, нормальная кривизна вдоль которых $K_n = 0$, определяется из уравнения $\dot{\gamma}_1^2 + \ldots + \dot{\gamma}_m^2 - \dot{\gamma}_{m+1}^2 - \ldots - \dot{\gamma}_{n+1}^2 = 0$. Его размерность меньше на единицу размерности множества виртуальных перемещений $(n-1)$. Если $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = const$ и $K_n \ne 0$, то реакции связей неограниченно возрастают при $l \to 0$ как минимум в одной из точек P_i системы.

Особенности связей вызывают существенное перераспределение скоростей между точками системы, что влечет за собой неограниченное возрастание реакций связей. В связи с этим может быть затруднена реализация определенных режимов работы околокритических механизмов, например, стационарного режима кривошипного механизма с одной степенью свободы, при котором угловая скорость вращения кривошипа постоянна.

Существование особых положений является типичным свойством многих систем с голономными стационарными связями, зависящими от параметров. В частности, им обладают все представители четырехзвенных плоских кривошипных механизмов. Теоретически возможно существование систем, обладающих вырождениями связей более глубокого типа, и их исследование может представлять особый интерес по мере возникновения соответствующих примеров.

Список литературы

[1] *Самсонов В.А.* Перестройка конфигурационного многообразия и критические системы // ПММ, 1999, т. 63, № 5, с. 770–774.

[2] *Самсонов В.А., Михалев А.А.* Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2005, № 4, с. 13–17.

[3] *Михалев А.А.* Особенности бифуркации положений равновесия околокритических механизмов // Проблемы машиностроения и надежности, 2008, № 6, с. 10–13.

[4] *Михалев А.А., Селюцкий Ю.Д.* Особенности задачи равновесия кинематических цепей // Сборник научно-методических статей «Теоретическая механика», 2009, № 27, с. 168–173.

[5] *Стрекалов С.Д.* Волновая техника в сельском хозяйстве // Издательско-полиграфический комплекс ВГСХА Нива, Волгоград, 2007. 128 с.

[6] *Milnor J.* Morse Theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

Abstracts

Empirical asymptotically optimal policies

Bulinskaya E.B., Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: ebulinsk@yandex.ru

The aim of the paper is to establish the optimal control of applied stochastic models under incomplete information. To this end we propose a three-step algorithm for construction of so-called empirical asymptotically optimal policies. For illustration we treat an input-output model arising in various domains of applied probability such as insurance, inventory and queueing theory.

Prime numbers and independence

Vinogradov O.P., Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: ovinogradov@mail.ru

For discrete probability spaces the paper poses the question of existence or nonexistence of (nontrivial) independent events. For finite probability spaces in a number of cases the answer is positive if certain integer parameter is a prime number or composite number.

Analysis of recursive random sequence indexes through continuous time processes

Goldaeva A.A., Assistant,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: gold_ann@list.ru

The paper proposes a new approach in which we consider the stochastic difference sequences like the sequences of observations (in deterministic or random moments of time) of continuous time process which satisfies the stochastic differential equation. The main results are explicit formula for the index of the tail and the upper bound of the extremal index.

Limit theorems for stationary distributons of two-type maximal branching processes

Lebedev A.V., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

We consider the maximal branching processes with two types of particles, previously introduced by the author. Limit theorems for stationary distributions of such processes are proved.

Multitype maximal branching processes with extreme value copulas

Lebedev A.V., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

We consider the maximal branching processes with several types of particles in the case when the offspring numbers multivariate distributions have extreme value copulas. The ergodic theorem, monotonicity property and limit theorem for stationary distributions in the power tails case are proved. Particular attention is paid to multivariate Fréchet distributions.

Phases in time evolution of multi-dimensional interacting diffusions with synchronization

Manita A.D., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: manita@mech.math.msu.su

We consider multi-dimensional Markov processes $x(t)$, $t \geq 0$, describing dynamics of N stochastic particles with combined interaction of the «mean field+synchronization» type. We find time scales $t = t(N)$, $N \to \infty$, on which the particle system $x(t)$ exhibits different behavior.

Partial Steiner systems and random hypergraphs

Shabanov D.A., Assistant,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: gold-amber@yandex.ru

The work deals with a well-known problem in extremal combinatorics concerning partial Steiner systems. By using random hypergraphs we obtain new upper bounds for the minimum possible number of edges of a partial Steiner system with high chromatic number.

Symmetric branching walks with heavy tails

Yarovaya E.B., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

We consider a continuous-time symmetric branching random walk on $\mathbf{Z}^d$, where the particles are born and die at a single lattice point. The underlying random walk is assumed to be symmetric. Moreover, corresponding transition rates of the random walk have heavy tails. As a result, the condition of the finite variance of jumps is not valid, and random walk may be transient even on low-dimensional lattices, that is, for $d = 1, 2$. Conditions of transience for a random walk on $\mathbf{Z}^d$ and limit theorems for the numbers of particles both at an arbitrary point of the lattice and on the entire lattice are obtained.

Can the stabilizer be eight-dimensional?

Beloshapka V.K., Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: vkb@srogino.ru

The main result is full description of the automorphisms Lie algebra of the real hypersurfaces $\Gamma(r) = \{v = ur(|z|^2)\}$ in $\mathbf{C^2}$. The dimension of such Lie algebras can be equal 2, 3, 4 and 5. The dimension of the stabilizer can be equal 2, 3 and 5. Some general conjecture was discussed.

Modules of smoothness of positive orders of functions from space L_p, $1 \le p \le \infty$

Potapov M.K., Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: mkpotapov@mail.ru
Simonov B.V., Associate Professor,
Volgograd State Technical University,
e-mail: simonov-b2002@yandex.ru

This paper systematizes basic properties of modules of smoothness of positive orders of functions from space L_p, $1 \le p \le \infty$. The proof of all statements is based on equivalence of the modules of smoothness to its constructive characteristic.

On the maximal topology of convergence in partially ordered space

Fedorov V.M., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: vferdorov@rambler.ru

In this paper we study the maximum topology in a partially ordered spaces defined the ordered, relatively uniform and order-bounded convergence. These topologies are affine. It is proof that the condition of stellar regularity the corresponding topology convergence in the maximum topology is equivalent stellar convergence. It is provided sufficient conditions under which these topologies are linear. We also give description of topologies with via inductive limit.

Motion of the rigid body consisting of two disks

Itskovich M.O., Student,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: m1shok7@mail.ru
Kuleshov A.S., Associate Professor,
Faculty of Mathematics and Mechanics, MSU,
e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su, akule@pisem.net

We present a kinematic analysis of motion of the rigid body consisting of two identical discs whose symmetry planes are at right angle. The no-slip constraints of this body are integrable, hence the system is essentially holonomic. In this paper we present analytic expressions for the trajectories of the ground contact points of the system. Equilibria of the body on the plane are found and their stability conditions are obtained.

On features of equilibriums of critical systems

Samsonov V.A., Professor,
Institute of Mechanics, MSU,
e-mail: samson@imec.msu.ru
Selutski Yu.D., Associate Professor,
Institute of Mechanics, MSU,
e-mail: seliutski@imec.msu.ru
Mikhalev A.A., PhD, e-mail: alexey_mih@inbox.ru

Kinematical chains are considered, for which the set of virtual displacements of one or several points is empty. It is shown that such mechanisms have «dead» equilibrium positions not depending upon the direction of force applied to one of these points. Mechanisms with singularity of different types are analyzed, where the surgery of the configurational manifold occurs at a certain (critical) value of parameter of constraints. It is shown that this surgery is topologically described with Morse surgery.

СОДЕРЖАНИЕ

Предыдущие выпуски серии
«Современные проблемы математики и механики»

Том I. Прикладные исследования

Выпуск 1. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.
Выпуск 2. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Том II. Механика

Выпуск 1. Под редакцией Г.Г. Черного, В.П. Карликова.
Выпуск 2. Под редакцией Б.Е. Победри, Е.В. Ломакина.

Том III. Математика

Выпуск 1. Под редакцией Т.П. Лукашенко, В.Н. Чубарикова.
Выпуск 2. Геометрия и топология. Под редакцией А.Т. Фоменко.
Выпуск 3. Дискретная математика. Под редакцией О.М. Касим-Заде.

Том IV. Математика

Выпуск 1. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева.

Выпуск 2. Динамические системы. Под редакцией А.Т. Фоменко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. Алгебра и теория чисел. Под редакцией В.А. Артамонова, В.Н. Латышева, Ю.В. Нестеренко.

Том V. Математика

Выпуск 1. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.Н. Сергеева, А.С. Шамаева.

Выпуск 2. Прикладная математика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева, Г.М. Кобелькова.

Выпуск 3. Математическая кибернетика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева.

Том VI. Математика

Выпуск 1. К 105-летию С.М. Никольского. Под редакцией М.К. Потапова, И.Н. Сергеева, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том VII. Математика. Механика.

Выпуск 1. К 190-летию П.Л. Чебышева

Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова, А.С. Кулешова.

Подготовка оригинал-макета: А.В. Лебедев

Подписано в печать 21.11.2011
Формат 60 x 90 /8 Бумага офс. №1. Усл. печ. л. 10,5.
Заказ 2 Тираж 100 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета
125009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета
119992, Москва, Воробьевы горы.