

Принцип инвариантности для меры поверхностей уровня гауссовского случайного поля

А. Шашкин

МГУ

Москва
2011

Экскурсионные множества случайного поля

Пусть $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ — случайное поле, реализации которого непрерывны с вероятностью единица.

Определение. Экскурсионное множество поля X на уровне $y \in \mathbb{R}$ — это случайное множество

$$A_y = \{s \in \mathbb{R}^d : X(s) \geq y\}.$$

Множество уровня поля X на уровне $y \in \mathbb{R}$ — это случайное множество

$$B_y = \{s \in \mathbb{R}^d : X(s) = y\}.$$

Задача:

исследование асимптотического поведения геометрических характеристик $A_x \cap T$ (или $B_x \cap T$),

где множество T (окно наблюдения) растет к бесконечности.

Приложения: томография (Goselen, Schintz, 2001), астрофизика (Maggiore, Riotto 2009), моделирование водной поверхности (Azais, Wschebor 2009)

Задача:

исследование асимптотического поведения геометрических характеристик $A_x \cap T$ (или $B_x \cap T$),

где множество T (окно наблюдения) растет к бесконечности.

Приложения: томография (Goselen, Schintz, 2001), астрофизика (Maggiore, Riotto 2009), моделирование водной поверхности (Azais, Wschebor 2009)

Основной вопрос

Пусть $\gamma(C)$ — некоторая геометрическая характеристика множества C (объем, площадь поверхности и т.д.).

Положим $N_T(y) = N_T(X, y) = \gamma(A_y \cap T)$.

Что можно сказать о предельном поведении случайного процесса $\{N_T(y), y \in \mathbb{R}\}$, когда T растет к бесконечности?

Основной вопрос

Пусть $\gamma(C)$ — некоторая геометрическая характеристика множества C (объем, площадь поверхности и т.д.).

Положим $N_T(y) = N_T(X, y) = \gamma(A_y \cap T)$.

Что можно сказать о предельном поведении случайного процесса $\{N_T(y), y \in \mathbb{R}\}$, когда T растет к бесконечности?

Пусть $\mathcal{H}_r$ — мера Хаусдорфа порядка r .

Сначала пусть $\gamma(C) = \mathcal{H}_d(C)$, т.е. объемы множеств.

Объем экскурсионного множества может быть представлен в виде

$$\mathcal{H}_d(A_y \cap T) = \int_T I\{X(s) \geq y\} ds.$$

Определение (Esary, Proschan, Walkup, 1967). Случайное поле $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ ассоциировано, если для любых $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^d$ и произвольных неубывающих (по каждой координате) ограниченных борелевских функций $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{cov}(f(X(s_1), \dots, X(s_n)), g(X(s_1), \dots, X(s_n))) \geq 0.$$

Пример:

$$X(s) = \sum_i \eta_i \varphi(s - \xi_i), \quad s \in \mathbb{R}^d,$$

где $\Xi = \{\xi_i\}$ — пуассоновское точечное поле в $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна и экспоненциально убывает, случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots$ н.о.р. и не зависят от Ξ

Определение (Esary, Proschan, Walkup, 1967). Случайное поле $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ ассоциировано, если для любых $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^d$ и произвольных неубывающих (по каждой координате) ограниченных борелевских функций $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{cov}(f(X(s_1), \dots, X(s_n)), g(X(s_1), \dots, X(s_n))) \geq 0.$$

Пример:

$$X(s) = \sum_i \eta_i \varphi(s - \xi_i), \quad s \in \mathbb{R}^d,$$

где $\Xi = \{\xi_i\}$ — пуассоновское точечное поле в $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна и экспоненциально убывает, случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots$ н.о.р. и не зависят от Ξ

Принцип инвариантности

Положим

$$N_t(y) = \mathcal{H}_d(A_y \cap [0, t]^d), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$
$$Z_t(y) = t^{-d/2}(N_t(y) - \mathbb{E}N_t(y)).$$

Теорема (Д.Мешенмозер, А.Ш., 2010) Пусть случайное поле $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ стационарно в узком смысле, ассоциировано, его компоненты обладают ограниченной плотностью и справедлива оценка

$$\text{cov}(X(0), X(s)) = O(\|s\|^{-\lambda}), \quad \|s\| \rightarrow \infty,$$

где $\lambda > 9d$. Тогда процессы $\{Z_t, t > 0\}$ сходятся по распределению в $D(\mathbb{R})$ к гауссовскому процессу Z с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\text{cov}(Z(a), Z(b)) = \int_{\mathbb{R}^d} (P(X(0) \geq a, X(s) \geq b) - P(X(0) \geq a)P(X(s) \geq b)) \, ds.$$

В работе Bulinski, Spodarev, Timmerman (Bernoulli, 2011) получена (при существенно более слабых условиях) сходимость конечномерных распределений процесса Z , а также построен статистический тест для проверки гауссовости поля

Положим

$$N_t(y) = \mathcal{H}_d(A_y \cap [0, t]^d), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$Z_t(y) = t^{-d/2}(N_t(y) - \mathbb{E}N_t(y)).$$

Теорема (Д.Мешенмозер, А.Ш., 2010) Пусть случайное поле $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ стационарно в узком смысле, ассоциировано, его компоненты обладают ограниченной плотностью и справедлива оценка

$$\text{cov}(X(0), X(s)) = O(\|s\|^{-\lambda}), \quad \|s\| \rightarrow \infty,$$

где $\lambda > 9d$. Тогда процессы $\{Z_t, t > 0\}$ сходятся по распределению в $D(\mathbb{R})$ к гауссовскому процессу Z с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\text{cov}(Z(a), Z(b)) = \int_{\mathbb{R}^d} (P(X(0) \geq a, X(s) \geq b) - P(X(0) \geq a)P(X(s) \geq b)) \, ds.$$

В работе Bulinski, Spodarev, Timmerman (Bernoulli, 2011) получена (при существенно более слабых условиях) сходимости конечномерных распределений процесса Z , а также построен статистический тест для проверки гауссовости поля

Положим

$$N_t(y) = \mathcal{H}_d(A_y \cap [0, t]^d), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$Z_t(y) = t^{-d/2}(N_t(y) - \mathbb{E}N_t(y)).$$

Теорема (Д.Мешенмозер, А.Ш., 2010) Пусть случайное поле $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ стационарно в узком смысле, ассоциировано, его компоненты обладают ограниченной плотностью и справедлива оценка

$$\text{cov}(X(0), X(s)) = O(\|s\|^{-\lambda}), \quad \|s\| \rightarrow \infty,$$

где $\lambda > 9d$. Тогда процессы $\{Z_t, t > 0\}$ сходятся по распределению в $D(\mathbb{R})$ к гауссовскому процессу Z с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\text{cov}(Z(a), Z(b)) = \int_{\mathbb{R}^d} (P(X(0) \geq a, X(s) \geq b) - P(X(0) \geq a)P(X(s) \geq b)) \, ds.$$

В работе Bulinski, Spodarev, Timmerman (Bernoulli, 2011) получена (при существенно более слабых условиях) сходимости конечномерных распределений процесса Z , а также построен статистический тест для проверки гауссовости поля

Площадь поверхности экскурсионного множества

Далее X — центрированное стационарное гауссовское поле с ковариационной функцией

$$R(s) = \text{cov}(X(0), X(s)) \in C^2(\mathbb{R}), \quad R \neq \text{const.},$$

и реализациями, принадлежащими классу C^1 с вероятностью единица.

Для $t > 0$ и $y \in \mathbb{R}$ положим

$$N_t(y) = \mathcal{H}_{d-1}(B_y \cap [0, t]^d) = \mathcal{H}_{d-1}(\{s : X(s) = y\} \cap [0, t]^d).$$

Если $d = 1$, то $N_t(y)$ — это число пересечений уровня y на отрезке $[0, t]$; если $d = 2$, то это длина кривой уровня и т.д.

Площадь поверхности экскурсионного множества

Далее X — центрированное стационарное гауссовское поле с ковариационной функцией

$$R(s) = \text{cov}(X(0), X(s)) \in C^2(\mathbb{R}), \quad R \neq \text{const.},$$

и реализациями, принадлежащими классу C^1 с вероятностью единица.

Для $t > 0$ и $y \in \mathbb{R}$ положим

$$N_t(y) = \mathcal{H}_{d-1}(B_y \cap [0, t]^d) = \mathcal{H}_{d-1}(\{s : X(s) = y\} \cap [0, t]^d).$$

Если $d = 1$, то $N_t(y)$ — это число пересечений уровня y на отрезке $[0, t]$; если $d = 2$, то это длина кривой уровня и т.д.

$d = 1$: Райс, 1945:

$$EN_t(y) = te^{-y^2/2} \frac{\sqrt{DX'(0)}}{\pi}.$$

“Доказательство”:

$$\begin{aligned} EN_t(y) &= E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t |X'(s)|(2\varepsilon)^{-1} I\{|X(s) - y| \leq \varepsilon\} ds \approx \\ &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t E|X'(s)|(2\varepsilon)^{-1} P\{|X(s) - y| \leq \varepsilon\} ds \approx tE|X'(s)|p_{X(s)}(y). \end{aligned}$$

Известные результаты: моменты

$d = 1$:

- ▶ Крамер, 1967: если $L(t) = \frac{R''(t)-R''(0)}{t} \in L^1([0, \delta], \mathcal{H}_1)$ (условие Джемана), то $EN_t^2(y) < \infty$.
- ▶ Джеман, 1972: если $EN_t^2(y) < \infty$, то выполняется условие Джемана.
- ▶ Беляев, 1967: условия существования и явные выражения для высших моментов $N_t(y)$.

$d > 1$:

- ▶ Вшебор, 1981: $EN_t(y) = t^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} E\|\nabla X(0)\|$ ($\|x\| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$).
- ▶ Адлер, Тейлор: вычисление моментов эйлеровой характеристики экскурсионных множеств гауссовского поля (в т.ч. заданного на многообразии)

Известные результаты: моменты

$d = 1$:

- ▶ Крамер, 1967: если $L(t) = \frac{R''(t) - R''(0)}{t} \in L^1([0, \delta], \mathcal{H}_1)$ (условие Джемана), то $EN_t^2(y) < \infty$.
- ▶ Джеман, 1972: если $EN_t^2(y) < \infty$, то выполняется условие Джемана.
- ▶ Беляев, 1967: условия существования и явные выражения для высших моментов $N_t(y)$.

$d > 1$:

- ▶ Вшебор, 1981: $EN_t(y) = t^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} E\|\nabla X(0)\|$ ($\|x\| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$).
- ▶ Адлер, Тейлор: вычисление моментов эйлеровой характеристики экскурсионных множеств гауссовского поля (в т.ч. заданного на многообразии)

$d = 1$:

- ▶ Крамер, 1967: если $L(t) = \frac{R''(t) - R''(0)}{t} \in L^1([0, \delta], \mathcal{H}_1)$ (условие Джемана), то $EN_t^2(y) < \infty$.
- ▶ Джеман, 1972: если $EN_t^2(y) < \infty$, то выполняется условие Джемана.
- ▶ Беляев, 1967: условия существования и явные выражения для высших моментов $N_t(y)$.

$d > 1$:

- ▶ Вшебор, 1981: $EN_t(y) = t^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} E\|\nabla X(0)\|$ ($\|x\| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$).
- ▶ Адлер, Тейлор: вычисление моментов эйлеровой характеристики экскурсионных множеств гауссовского поля (в т.ч. заданного на многообразии)

$d = 1$:

- ▶ Крамер, 1967: если $L(t) = \frac{R''(t) - R''(0)}{t} \in L^1([0, \delta], \mathcal{H}_1)$ (условие Джемана), то $EN_t^2(y) < \infty$.
- ▶ Джеман, 1972: если $EN_t^2(y) < \infty$, то выполняется условие Джемана.
- ▶ Беляев, 1967: условия существования и явные выражения для высших моментов $N_t(y)$.

$d > 1$:

- ▶ Вшебор, 1981: $EN_t(y) = t^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} E\|\nabla X(0)\|$ ($\|x\| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$).
- ▶ Адлер, Тейлор: вычисление моментов эйлеровой характеристики экскурсионных множеств гауссовского поля (в т.ч. заданного на многообразии)

$d = 1$:

- ▶ Крамер, 1967: если $L(t) = \frac{R''(t) - R''(0)}{t} \in L^1([0, \delta], \mathcal{H}_1)$ (условие Джемана), то $EN_t^2(y) < \infty$.
- ▶ Джеман, 1972: если $EN_t^2(y) < \infty$, то выполняется условие Джемана.
- ▶ Беляев, 1967: условия существования и явные выражения для высших моментов $N_t(y)$.

$d > 1$:

- ▶ Вшебор, 1981: $EN_t(y) = t^{\frac{d}{2}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} E\|\nabla X(0)\|$ ($\|x\| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$).
- ▶ Адлер, Тейлор: вычисление моментов эйлеровой характеристики экскурсионных множеств гауссовского поля (в т.ч. заданного на многообразии)

Известные результаты: центральная предельная теорема для $N_t(y)$, $t \rightarrow \infty$

$d = 1$:

- ▶ Кузик, 1976:

$$R \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}), R'' \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$DN_t(0)/t \rightarrow \sigma^2 > 0 \Rightarrow (N_t(0) - EN_t(0))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Питербарг, 1978

$$\text{условие Джемана, } |R| + |R''| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow DN_t(y) \sim \sigma^2(y)t \text{ and } (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Слуд, 1994

$$DN_t(y) < \infty, R \in C^2 \cap L^1(\mathbb{R}) (y \neq 0) \Rightarrow (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$d > 1$:

- ▶ Кратц и Леон, 2001: общий метод, в т.ч. ЦПТ для $N_t(y)$ при $d = 2$, когда $R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\partial R / \partial s_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$

Известные результаты: центральная предельная теорема для $N_t(y)$, $t \rightarrow \infty$

$d = 1$:

- ▶ Кузик, 1976:

$$R \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}), R'' \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$DN_t(0)/t \rightarrow \sigma^2 > 0 \Rightarrow (N_t(0) - EN_t(0))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Питербарг, 1978

$$\text{условие Джемана, } |R| + |R''| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow DN_t(y) \sim \sigma^2(y)t \text{ and } (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Слуд, 1994

$$DN_t(y) < \infty, R \in C^2 \cap L^1(\mathbb{R}) (y \neq 0) \Rightarrow (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$d > 1$:

- ▶ Кратц и Леон, 2001: общий метод, в т.ч. ЦПТ для $N_t(y)$ при $d = 2$, когда $R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\partial R / \partial s_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$

Известные результаты: центральная предельная теорема для $N_t(y)$, $t \rightarrow \infty$

$d = 1$:

- ▶ Кузик, 1976:

$$R \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}), R'' \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$DN_t(0)/t \rightarrow \sigma^2 > 0 \Rightarrow (N_t(0) - EN_t(0))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Питербарг, 1978

$$\text{условие Джемана, } |R| + |R''| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow DN_t(y) \sim \sigma^2(y)t \text{ and } (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Слуд, 1994

$$DN_t(y) < \infty, R \in C^2 \cap L^1(\mathbb{R}) \ (y \neq 0) \Rightarrow (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$d > 1$:

- ▶ Кратц и Леон, 2001: общий метод, в т.ч. ЦПТ для $N_t(y)$ при $d = 2$, когда $R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\partial R / \partial s_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$

Известные результаты: центральная предельная теорема для $N_t(y)$, $t \rightarrow \infty$

$d = 1$:

- ▶ Кузик, 1976:

$$R \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}), R'' \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$DN_t(0)/t \rightarrow \sigma^2 > 0 \Rightarrow (N_t(0) - EN_t(0))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Питербарг, 1978

$$\text{условие Джемана, } |R| + |R''| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow DN_t(y) \sim \sigma^2(y)t \text{ and } (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Слуд, 1994

$$DN_t(y) < \infty, R \in C^2 \cap L^1(\mathbb{R}) (y \neq 0) \Rightarrow (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$d > 1$:

- ▶ Кратц и Леон, 2001: общий метод, в т.ч. ЦПТ для $N_t(y)$ при $d = 2$, когда $R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\partial R / \partial s_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$

Известные результаты: центральная предельная теорема для $N_t(y)$, $t \rightarrow \infty$

$d = 1$:

- ▶ Кузик, 1976:

$$R \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}), R'' \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$DN_t(0)/t \rightarrow \sigma^2 > 0 \Rightarrow (N_t(0) - EN_t(0))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Питербарг, 1978

$$\text{условие Джемана, } |R| + |R''| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow DN_t(y) \sim \sigma^2(y)t \text{ and } (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

- ▶ Слуд, 1994

$$DN_t(y) < \infty, R \in C^2 \cap L^1(\mathbb{R}) (y \neq 0) \Rightarrow (N_t(y) - EN_t(y))/\sqrt{t} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$d > 1$:

- ▶ Кратц и Леон, 2001: общий метод, в т.ч. ЦПТ для $N_t(y)$ при $d = 2$, когда $R \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\partial R / \partial s_j \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$

Замечание о локальном времени

Локальное время $\mathcal{L}_t$ случайного процесса X на промежутке $[0, t]$ определяется как производная Радона-Никодима меры

$$\nu_t(B, \omega) = \int_0^t I\{X(s) \in B\} ds.$$

В случае гладких траекторий и наличия плотности у X' справедливо равенство

$$\mathcal{L}_t(y) = \sum_{s \in [0, t]} |X'(s)|^{-1} I\{X(s) = y\}.$$

Для однородных диффузионных процессов существует функциональная предельная теорема о сходимости $\mathcal{L}_t$, $t \rightarrow \infty$ (Кутоянц, 1998).

Основная теорема: предположения

1) $d > 1$ и X — стационарное и изотропное центрированное гауссовское поле класса C^1 на $\mathbb{R}^d$;

(поле называется изотропным, если для любой ортогональной матрицы C случайное поле $\tilde{X}(s) := X(Cs)$, $s \in \mathbb{R}^d$ распределено так же, как X . В этом случае матрица ковариаций вектора $(X(s), \nabla X(s))$ диагональна).

Основная теорема: предположения

2) $R \in C^2$ and $DX(0) = R(0) = 1$;

3) Существует такая непрерывная ограниченная функция $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$g(s) \rightarrow 0 \text{ при } \|s\| \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{g(s)} ds < \infty,$$

$$|R(s)| + \frac{1}{\sqrt{1-R(s)}} \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial R(s)}{\partial s_j} \right| + \sum_{j,q=1}^d \left| \frac{\partial^2 R(s)}{\partial s_j \partial s_q} \right| < g(s)$$

при $s \neq 0$.

Пусть μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}$.

Основная теорема

Теорема (Д. Мешенмозер, А.Ш., 2010). Если выполняются условия 1—3, то случайные процессы

$$Z_t := t^{-d/2}(N_t - \mathbb{E}N_t)$$

сходятся по распределению в пространстве $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ при $t \rightarrow \infty$ к случайному процессу $\lambda^{1-d/2}Z$, где

$$\lambda^2 = -\frac{\partial^2 R(0)}{\partial s_1^2} = D \frac{\partial X(0)}{\partial s_1},$$

а Z — центрированный гауссовский случайный элемент в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ с ковариационным оператором, заданным равенством

$$D(Z, f)_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \text{cov} \left(f(X(0)) e^{-X(0)^2/2} \|\nabla X(0)\|, f(X(s)) e^{-X(s)^2/2} \|\nabla X(s)\| \right) ds,$$

для $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Теорему достаточно доказать при $\lambda = 1$.

Функциональная предельная теорема в L^2 : схема доказательства

В пространствах C или D — требуются плотность и сходимость конечномерных распределений. В L^2 аналогом сходимости конечномерных распределений является условие

$$(Z_t, f) \rightarrow (Z, f) \quad \text{для всех } f \text{ из всюду плотного подмножества } L^2$$

(сходимость по распределению при $t \rightarrow \infty$).

Формула коплощади (Федерер, 1959)

Для C^1 -отображения $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{X^{-1}(y)} g(s) d\mathcal{H}_{d-1}(s) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(s) \|\nabla X(s)\| ds.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_{d-1}(\{s : X(s) = y\} \cap [0, t]^d) h(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} h(y) \int_{X^{-1}(y)} I\{s \in [0, t]^d\} d\mathcal{H}_{d-1}(s) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{X^{-1}(y)} h(X(s)) I\{s \in [0, t]^d\} d\mathcal{H}_{d-1}(s) dy = \int_{[0, t]^d} h(X(s)) \|\nabla X(s)\| ds. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}} Z_t(y) h(y) dy = \frac{1}{\sqrt{t^d}} \int_{[0, t]^d} (h(X(s)) \|\nabla X(s)\| - \mathbb{E} h(X(s)) \|\nabla X(s)\|) ds,$$

и сходимость этого выражения к $N(0, \sigma^2(h))$ — форма центральной предельной теоремы.

Неравенство Арконеса (1994)

Пусть случайные векторы $Y \sim N(0, I)$ и $Z \sim N(0, I)$ имеют совместное гауссовское распределение и

$$\gamma := \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^d |\text{cov}(Y_i, Z_j)| < 1.$$

Тогда для такой функции $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что $E v^2(Y) < \infty$, верна оценка

$$|\text{cov}(v(Y), v(Z))| \leq \gamma E v^2(Y).$$

В частности,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \text{cov} \left(f(X(0)) e^{-X(0)^2/2} \|\nabla X(0)\|, f(X(s)) e^{-X(s)^2/2} \|\nabla X(s)\| \right) ds \leq \\ \leq E f^2(X(0)) \int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, g(s)\} ds. \end{aligned}$$

Неравенство Арконеса (1994)

Например, при $n = 1$: пусть

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{H_k(x)}{\sqrt{k!}},$$

где $H_0, H_1, \dots$ — полиномы Эрмита, тогда

$$\begin{aligned} |\operatorname{cov}(v(Y), v(Z))| &= \left| \operatorname{cov} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{H_k(Y)}{\sqrt{k!}}, \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{H_j(Z)}{\sqrt{j!}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{a_k a_j}{\sqrt{k!j!}} \operatorname{cov}(H_k(Y), H_j(Z)) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \gamma^k \leq \gamma \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \gamma \|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2. \end{aligned}$$

Свойство квазиассоциированности (Дукан и Луиши, 1999)

Пусть наборы n -мерных случайных векторов $(Y_1, \dots, Y_k)$ и $(Z_1, \dots, Z_k)$ имеют совместное гауссовское распределение, а функции $f, g : \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$ липшицевы. Тогда

$$|\text{cov}(f(Y_1, \dots, Y_k), g(Z_1, \dots, Z_k))| \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l,q=1}^n |\text{cov}(Y_{i,l}, Z_{j,q})|.$$

Здесь

$$\text{Lip}(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m|}, \quad h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Условие плотности

Достаточным условием плотности семейства $\{Z_t, t > 1\}$ является соотношение

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} E(Z_t, e_k)_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 = 0,$$

где $\{e_k, k \geq 0\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. В качестве базиса $e_k = H_k / \sqrt{k!}$ возьмем нормированные полиномы Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}.$$

Идея: рассмотрим $z \in (0, 1)$ и введем степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} E(Z_t, H_k)_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 =: \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k(t).$$

Достаточным условием плотности семейства $\{Z_t, t > 1\}$ является соотношение

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{t > 1} \sum_{k=M}^{\infty} E(Z_t, e_k)_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 = 0,$$

где $\{e_k, k \geq 0\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. В качестве базиса $e_k = H_k / \sqrt{k!}$ возьмем нормированные полиномы Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}.$$

Идея: рассмотрим $z \in (0, 1)$ и введем степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} E(Z_t, H_k)_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 =: \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k(t).$$

Равномерная сходимость

Для чего это нужно?

Чтобы доказать два факта:

1)

$$\lim_{z \nearrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k(t) =: F(t) < \infty \left(\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) = F(t) \right);$$

2) функции $\varphi_k(t)$ и $F(t)$ непрерывны на $[1, +\infty]$ (и тогда равномерная сходимость вытекает из теоремы Дини).

Формула суммирования Крамера (1946)

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $z \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi k!} H_k(x) H_k(y) e^{-x^2/2-y^2/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2xyz}{2 - 2z^2} \right\} = p_{\xi, \eta}(x, y),$$

где

$$(\xi, \eta) \sim N \left(0, \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Применение этой формулы

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} E(Z_t, H_k)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi k!} \left(\int_{\mathbb{R}} Z_t(y) H_k(y) e^{-y^2/2} dy \right)^2 = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2t^d \pi k!} \left(\int_{[0,t]^d} H_k(X(s)) e^{-X(s)^2/2} \|\nabla X(s)\| ds - E \dots \right)^2 = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2t^d \pi k!} \iint_{[0,t]^d \times [0,t]^d} \text{cov} \left(H_k(X(s)) e^{-X(s)^2/2} \|\nabla X(s)\|, H_k(X(u)) e^{-X(u)^2/2} \|\nabla X(u)\| \right) ds du \\
 &\approx t^{-d} \iint_{[0,t]^d \times [0,t]^d} E p_{\xi, \eta}(X(s), X(u)) \|\nabla X(s)\| \|\nabla X(u)\| ds du - \\
 &- t^{-d} \iint_{[0,t]^d \times [0,t]^d} E p_{\xi}(X(s)) \|\nabla X(s)\| E p_{\eta}(X(u)) \|\nabla X(u)\| ds du.
 \end{aligned}$$

Принцип инвариантности в $C(\mathbb{R})$

Эйлерова характеристика (и другие функционалы Минковского)

случай $d = 1$ (проблема: $(1 - R^2(s))^{-1/2}$ неинтегрируема)