ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Решения задач

Задача 1. Петя бросает монету до тех пор,пока не выпадут два герба подряд, а Федя независимо от него — до тех пор, пока не выпадет пара "герб, решка"(в таком порядке). Кому из них в среднем придется ждать меньше?

Решение. Оба игрока могут находиться в трех состояниях: "успех может быть достигнут не ранее чем через два испытания", "успех не достигнут, но может быть достигнут на следующем испытании", "успех достигнут". Назовем их A, B, C.

В состоянии A оба игрока в равном положении: с равной вероятностью они либо переходят в состояние B, либо остаются в состоянии A. А вот из состояния B Федя либо переходит в состояние C, либо остается в B; Петя же в случае неудачи оказывается опять в состоянии A. Поэтому Феде ждать в среднем меньше.

Задача 2. Пусть A и B — две симметричные вещественные матрицы порядка n, причем $trA > 0$ и $trB < 0$. Доказать, что существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, что $(Ax, x) > 0$ и $(Bx, x) < 0$.

Решение. Сразу выберем базис, в котором матрица A диагональна (след линейного оператора от выбора ортонормированного базиса не зависит). Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайный вектор, состоящий из н.о.р. случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Тогда $(AX, X) = trA$ и $\mathsf{E}(BX, X) = trB$, поэтому найдется такая реализация вектора X, что $(BX, X) < 0$.

Задача 3. Пусть случайный вектор $(X_1^n, \ldots, X_n^n)$ имеет равномерное распределение на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{nX_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет предел по распределению при $n \to \infty$, и найти его.

Решение. Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}(nX_1^n > t)$ (при достаточно больших n). Она равна вероятности

$$\mathsf{P}(X_2^n + \ldots + X_n^n < 1 - t/n).$$

Для любого $a > 0$ $(n-1)$-мерная мера Лебега множества $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n-1,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq a\}$ пропорциональна a^{n-1}. Поэтому раматриваемая вероятность равна $(1 - t/n)^{n-1} \to e^{-t}$ при $n \to \infty$.

Ответ: $\exp(1)$.

Задача 4. Рассматривается случайное блуждание $S_0 = 0$, и $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — н.о.р. случайные величины, $\mathsf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathsf{P}(X_i = -1) = p > 1/2$. Найти математическое ожидание числа нулей последовательности $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Решение. Обозначим x — искомое математическое ожидание, $q = 1 - p$ и $\tau = \inf\{k > 0 : S_k = 0\}$ — момент первого возвращения в нуль. Тогда траектория случайного блуждания до τ и число нулей после τ независимы. Пусть z_k — вероятность возвращения в нуль за конечное время для случайного блуждания, выходящего из $k \in \mathbb{Z}$. Согласно усиленному закону больших чисел при $k \leq 0$ имеем $z_k = 1$. Следовательно,

$$x = 1 + pz_1 x + qx \tag{1}$$

по формуле полной вероятности. По той же формуле

$$z_k = pz_{k+1} + qz_{k-1}, \quad k > 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda = p\lambda^2 + q$, корни 1 и q/p, общее решение $z_k = c_1 + c_2(q/p)^k$. Так как $z_k \to 0$ при $k \to +\infty$ (в силу непрерывности меры в нуле), то $c_1 = 0$. Так как еще $z_0 = 1$, то $c_2 = 1$. Подставляя найденное значение z_1 в (1), находим решение уравнения.

Ответ: $1/(p - q)$.

Задача 5. Имеется круглая поверхность стола (без ножек). Плотник случайным образом приделывает к ней $n > 3$ ножек (каждая прикрепляется в равномерно распределенной точке на границе круга, независимо от расположения предыдущих ножек). Найти вероятность, что после этого стол можно будет поставить на пол.

Решение. Стол встанет на пол, если через центр круга нельзя провести прямую, относительно которой все ножки окажутся в одной полуплоскости. Вероятностное пространство представляет собой прямое произведение n окружностей с нормированной мерой Лебега, на каждой из которых выбирается точка (мы исключаем из рассмотрения событие нулевой вероятности, при котором есть совпадающие или противоположные точки). Заметим, что отображение, при котором точке одной из окружностей ставится в соответствие диаметрально противоположная (все прочие остаются на месте), сохраняет меру. Все такие отображения разбивают вероятностное пространство на 2^n множеств, которые не пересекаются и их объединение есть все вероятностное пространство. Для любого набора из n точек такие отображения дают ровно $2n$ их положений, при которых точки лежат в одной полуплоскости относительно центра. Все остальные конфигурации подходят.

Ответ: $1 - n/2^{n-1}$.

Задача 6. Многоугольник в трехмерном пространстве проецируется на случайно выбранную плоскость. Найти математическое ожидание площади проекции, если S — площадь многоугольника.

Решение. Площадь проекции равна $S|\sin\alpha|$, где α — угол между многоугольником и нормалью к плоскости. Эта нормаль имеет равномерное распределение на единичной сфере. Считая, что многоугольник лежит в плоскости, порожденной первыми двумя координатами, видим, что математическое ожидание $|\sin\alpha|$ равно

$$\frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\theta = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S/2$.

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, а случайная величина ξ — это его первая координата. Найти а) $\mathsf{E}\xi^2$; б) $\mathsf{E}\xi^4$.

Решение. а) Так как сумма квадратов координат равна 1 и они одинаково распределены, то $\mathsf{E}\xi^2 = 1$.

б) Это математическое ожидание можно вычислить, находя явно интеграл по сфере, но проще использовать следующее представление. Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ — н.о.р. $N(0,1)$ случайные величины. Тогда случайный вектор $(Z_1, \ldots, Z_n)/sqrtZ_1^2 + \ldots + Z_n^2$ имеет такое распределение, как в задаче. Пользуясь сферическими координатами, имеем

$$\mathsf{E}\xi^4 = J\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}dr,$$

где J — некоторый интеграл по единичной сфере (тот же, что возникает при "лобовом"решении). Заметим, что

$$\mathsf{E}Z_1^4 = J\int_0^\infty r^{n+3}e^{-r^2/2}dr,$$

но хорошо известно, что левая часть равна 3. Дважды интегрируя по частям, видим, что $\mathsf{E}\xi^4 = 3/(n^2+2n)$.

Задача 8 (3-5). Назовем случайную величину X хорошей, если она имеет плотность p и эта плотность пропорциональна ее характеристической функции φ, т.е. существует $C > 0$ такое, что $p \equiv C\varphi$ (пример: $X \sim N(0,1)$). Привести пример хорошей негауссовской случайной величины.

Решение. Основное наблюдение: существуют такие случайные величины, что у них есть плотность, а их характеристическая функция вещественна, неотрицательна и интегрируема. Например, такой будет случайная величина $X \sim N(0,2)$. Пусть p — ее плотность и φ — соответствующая характеристическая функция. Тогда существует такое $a > 0$, что $a\varphi$ — плотность (точное значение a для нас несущественно). В силу формулы обращения характеристическая функция случайной величины с плотностью $a\varphi$ равна

$$a\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(x)dx = 2\pi ap(t).$$

Для любого $c \in (0,1)$ выпуклая комбинация $cp+(1-c)a\varphi$ также является вероятностной плотностью. Соответствующая характеристическая функция есть $c\varphi+2\pi(1-c)ap$. Распределение будет хорошим, если

$$\frac{c}{a(1-c)} = \frac{2\pi a(1-c)}{c}.$$

Легко видеть, что последнее уравнение имеет корень на отрезке $[0,1]$.

Задача 9. Пусть н.о.р. случайные величины X и Y симметричны и имеют конечную дисперсию, причем для любого $t > 0$ выполняется неравенство $\mathsf{P}(|X+Y|/\sqrt{2} \geq t) \geq \mathsf{P}(|X| \geq t)$. Доказать, что а) на самом деле неравенство всегда обращается в равенство; б) **(3-5)** эти случайные величины гауссовские.

Решение. а) Пусть неравенство строгое хотя бы для одного $t > 0$. Так как обе функции монотонны и непрерывны справа, то тогда оно строгое на целом интервале. Известно, что для случайной величины $\xi \geq 0$

$$\mathsf{E}\xi = \int_0^\infty \mathsf{P}(\xi \geq s)ds.$$

В частности,

$$\mathsf{E}(X+Y)^2 = \int_0^\infty \mathsf{P}(|X+Y| \geq \sqrt{s})ds > \int_0^\infty \mathsf{P}(|X| \geq \sqrt{s/2})ds = \int_0^\infty \mathsf{P}(2X^2 \geq s)ds = 2X^2,$$

но крайнее левое выражение, очевидно, совпадает с крайним правым.

б) В силу пункта а) для любого $n > 0$ распределение суммы

$$\frac{X_1 + \ldots + X_{2^n}}{2^{n/2}}$$

(в числителе — независимые копии X) совпадает с распределением X. С другой стороны, по ЦПТ оно стремится к распределению $N(0, \mathsf{D}X)$.