ИНФОРМАЦИЯ О ДВЕНАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова провела двенадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих Колмогоровских олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (`http://mech.math.msu.su/probab`), а также в [1] и по ссылкам там же.

Олимпиада была проведена 20 апреля 2013 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). В олимпиаде приняли участие и сдали работы 34 студента I–II курсов и 9 студентов III–V курсов механико-математического факультета Московского Государственного Университета, а также факультета ВМК и физического факультета Московского Государственного Университета.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи (или пункта) указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число решивших ее студентов III–V курса (для задач, которые предлагались только в одной возрастной категории, приведено только число решивших).

Задача 1. (I–V; 4, 7) Пусть X и Y — н.о.р. неотрицательные случайные величины с конечной дисперсией. Верно ли, что $\mathsf{D}\min\{X,Y\} \le \mathsf{D}X$?

Задача 2. (I–V; 4, 3) Пусть X и Y — дискретные случайные величины на общем вероятностном пространстве, причем известны все условные вероятности $\mathsf{P}(X=x|Y=y)$ и $\mathsf{P}(Y=y|X=x)$ (при всех $x,y\in\mathbb{R}$, для которых они определены). Верно ли, что можно однозначно определить совместное распределение X и Y?

Задача 3. (I–V; 4, 6) На отрезок $[0,1]$ случайным образом бросают n точек. Для каждой из точек равновероятно и независимо от ее положения и от других точек выбирается направление движения (вправо или влево). Затем точки одновременно начинают движение со скоростью 1. Все столкновения точек абсолютно упругие (т.е. после столкновения каждая из двух точек начинает движение в противоположном направлении с той же скоростью), а при достижении границы отрезка точка к ней прилипает. Найти математическое ожидание момента, когда прилипнет последняя точка.

Задача 4. (I–V; 1, 4) Найти $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}(x_1^5+\ldots+x_n^5)/(x_1^4+\ldots+x_n^4)dx$.

Задача 5. (I–V; 1, 5) Вероятностная мера μ на числовой прямой задается следующим образом: $\mu([0,1])=1$, $\mu([0,1/3])=\mu([2/3,1])=1/2$, $\mu([0,1/9])=\mu([2/9,1/3])=\mu([2/3,7/9])=\mu([8/9,1])=1/4$ и т.д. Пусть случайная величина X имеет распределение μ. Найти дисперсию X.

Задача 6. (I–V; 0, 1) Пусть $S_0=0$ и $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $n\in\mathbb{N}$, где н.о.р. случайные величины $\{X_i, i\in\mathbb{N}\}$ принимают значения 1 и -1 с вероятностями 1/2. Найти математическое ожидание момента $\tau=\inf\{k>0:\max_{i\le k}S_i-\min_{i\le k}S_i=m\}$ (при $m\in\mathbb{N}$).

Задача 7. Пусть X и Y — н.о.р. случайные величины с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\mathsf{E}|X-Y|\le\mathsf{E}|X+Y|$, если **а)** (I–II;

0) у этих случайных величин есть плотность; **б)** (III–V; 0) у этих случайных величин, возможно, нет плотности.

Задача 8. (I–V; 0, 1) Пусть $f(t)$ есть четная 2π - периодическая функция, обладающая следующими свойствами: на отрезке $[0, 2\pi]$ ее график совпадает с графиком квадратного трехчлена, причем $f(0) = 1$. Определить, при каких $f(\pi)$ функция f является характеристической функцией некоторого распределения, и найти это распределение.

Задача 9. (III–V; 1) Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Доказать, что его максимум на отрезке $[0, 1]$ с вероятностью единица достигается в единственной точке.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 8 мая 2012 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Почеревин Роман Александрович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (2,5 решенных задач).

Вторая премия

Калашников Иван Александрович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (2 решенные задачи).

Заночкин Андрей Юрьевич

Студент II курса факультета ФМК Московского Государственного Университета (2 решенные задачи).

Третья премия

Стасюк Тарас Андреевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (1,5 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Шульчевский Дмитрий Игоревич

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач), научный руководитель — А.П. Шашкин.

Третья премия

Ивлев Федор Алексеевич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — А.В. Михалев.

Лавров Петр Аркадьевич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — А.В. Михалев.

Машников Олег Васильевич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — А.А. Замятин.

Парамонов Кирилл Борисович

Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — А.П. Шашкин.

Токарев Игорь Вячеславович

Студент I курса магистратуры механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — А.Н. Ширяев.

Список литературы

[1] Информация об одиннадцатой "Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей". — Теор. вероятн. и примен., **57** (2012), вып. 2.

10 мая 2013 г.

Оргкомитет двенадцатой Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей:
академик РАН, профессор А.Н. Ширяев,
к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин,
к.ф.-м.н., доцент М.М. Мусин,
к.ф.-м.н., ассистенты Е.Е. Баштова, П.А.Яськов,
аспиранты О.А. Бутковский, Я.А.Люлько,
Ю.А. Малышкин, А.Ю.Хапланов.