ИНФОРМАЦИЯ О ДЕСЯТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при поддержке Московской Государственной Академии тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова провела десятую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (`http://mech.math.msu.su/probab`), а также в [1] и по ссылкам там же.

Олимпиада была проведена 23 апреля 2010 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). В олимпиаде приняли участие и сдали работы 34 студента I–II курсов и 17 студентов III–V курсов механико-математического факультета и Московского Государственного Университета, а также математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета и факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского Государственного Педагогического Института.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи (или пункта) указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число решивших ее студентов III–V курса (для задач, которые предлагались только в одной возрастной категории, приведено только число решивших).

Задача 1. (I-V; 27, 11) Пусть случайные величины X и U независимы, а U распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Доказать, что дробная часть $\{X+U\}$ распределена так же, как U.

Задача 2. (I-V) Пусть случайные величины $\{T_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ принимают только натуральные значения и $T_n\to\infty$ п.н., $n\to\infty$, а случайные величины $X_1,X_2,\ldots$, заданные на том же вероятностном пространстве, что и $\{T_n, n\in\mathbb{N}\}$, сходятся по распределению к случайной величине X. а) (0, 7) Верно ли, что $X_{T_n}\to X$ по распределению, когда $n\to\infty$? б) (0, 7) Тот же вопрос, если последовательности $\{T_n, n\in\mathbb{N}\}$ и $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ независимы.

Задача 3. (I–V; 4, 7) Пусть $X_1,X_2,\ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения -1 и 1, и $\mathsf{P}(X_1=1)=p$. Обозначим Y_n — число серий одного знака в последовательности $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Доказать, что существует предел $\lim_{n\to\infty}Y_n/n$ (по вероятности) и найти его.

Задача 4. (I–V; 0, 2) Пусть случайные величины $X_1,X_2,\ldots$ гауссовские и $X_n\to X$ п.н., $n\to\infty$. Доказать, что сходимость имеет место и в среднем квадратическом.

Задача 5. (I–V; 2, 3) Пусть X – положительная случайная величина, имеющая плотность, причем $\mathsf{E}X^2<\infty$ и $\mathsf{E}X=1$, а функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ выпукла вверх. Тогда справедливо неравенство $\mathsf{E}Xf(X)\le f(\mathsf{E}X^2)$.

Задача 6. (I–V; 0, 2) Пусть $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ — н.о.р. случайные величины, не равные тождественно нулю. Доказать существование такой функции $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, что радиус сходимости степенного ряда $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}X_nz^n$ (с вероятностью 1) равен 0 или 1 в зависимости от того, конечно ли $\mathsf{E}h(|X_1|)$, и привести пример такой функции.

Задача 7. (III–V) Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные k-мерные случайные векторы с распределением $N(a, B)$ (где $a \in \mathbb{R}^k$, а матрица B строго положительно определена; все параметры неизвестны). Построить оценки максимального правдоподобия а) (5) для a; б) (0) для B.

Задача 8. (I–V) *Кронекеровским* (или *тензорным*) произведением квадратных матриц $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ и $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ называется матрица $A \otimes B$ порядка n^2, составленная из блоков $a_{ij}B$, $1 \le i, j \le n$. а) (I–V; 7, 5) Доказать, что если симметричные A и B неотрицательно определены, то $A \otimes B$ также неотрицательно определена. б) (III-V; 5) Если при этом A и B невырожденные, то это же верно и для $A \otimes B$.

Задача 9. (I–V; 9, 5) Класс $\mathcal{B}$ подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ назовем *возрастающим*, если из соотношений $B_1 \in \mathcal{B}$ и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$ следует, что $B_2 \in \mathcal{B}$. Доказать, что для каждого возрастающего класса $\mathcal{B}$ средняя мощность множеств, составляющих его, не меньше $n/2$.

Задача 10. (I–V; 0, 0) Пусть $\{\xi_{k,i},\ k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, 2^k\}$ — независимые случайные величины, причем $\xi_{k,i} \sim N(0, k^{-2})$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \dots, 2^k$ положим $I_{k,i} = [(i-1)/2^k, i/2^k)$. Пусть $S(t) = \sum_{k,i: t \in I_{k,i}} \xi_{k,i}$. Найти $\mathsf{P}(\sup_{t \in [0,1)} S(t) < \infty)$.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 27 апреля 2010 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Мокин Василий Борисович

Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Омельяненко Виктор Алексеевич

Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Вторая премия

Брагин Владимир Алексеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенные задачи).

Третья премия не присуждена.

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Шульчевский Дмитрий Игоревич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (10 решенных задач), научный руководитель — А.П. Шашкин.

Никитенко Антон Валентинович

Студент III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (8 решенных задач), научный руководитель — Н.Ю. Нецветаев.

Вторая премия

Буфетов Алексей Игоревич

Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6 решенных задач), научный руководитель — Б.М. Гуревич.

Третья премия

Воробьев Илья Викторович

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач), научный руководитель — Г.И. Фалин.

Григорьев Сергей Германович

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач), научный руководитель — Э.Б. Винберг.

Калачев Глеб Вячеславович

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Э.Э. Гасанов.

Вотрина Елена Алексеевна

Студентка III курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (3 решенные задачи), научный руководитель — М.А. Лифшиц.

Список литературы

[1] Информация о девятой “Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей”. — Теор. вероятн. и примен., **55** (2010), вып. 2.

11 мая 2011 г.

Оргкомитет десятой Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей:

член-корреспондент РАН, профессор А.Н. Ширяев,
к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин,
к.ф.-м.н., доцент М.М. Мусин,
к.ф.-м.н., ассистенты Е.Е. Баштова, Д.А. Шабанов, П.А.Яськов,
ассистенты А.Т. Абакирова, И.Г. Эрлих,
аспиранты А.А. Алиев, О.А. Бутковский, В.П. Демичев,
М.В. Житлухин, А.А. Каменов, Н.В. Карапетян,
Я.Люлько, А.А. Муравлев, И.С. Тюрин.