ПЯТАЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Решения

Задача 1. В руке зажаты 6 травинок так, что их концы выступают сверху и снизу. Верхние концы случайным образом разбиваются на пары и попарно связываются между собой. То же делают и с нижними концами. Какова вероятность того, что в результате этой операции все 6 травинок окажутся связанными в одно кольцо?

Решение. Если верхние концы уже как-то связаны, то число благоприятных исходов связывания нижних концов, очевидно, одно и то же для всех связываний верхних. Поэтому будем считать, что связка верхних фиксирована. Например, считаем, что связаны травинки номер 1 и 2, номер 3 и 4, номер 5 и 6. Способов связать нижние имеется всего $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$ (на пером шаге выбираем две травинки из шести, на втором две из оставшихся). Вычислим, сколько из этих способов благоприятных. Выбрать первую связываемую пару можно $C_6^2 - 3$ способами (есть только три пары, которые выбирать нельзя). После этого остается 4 травинки, у ровно двух из которых связаны верхние концы. Поэтому на втором шаге нельзя выбирать вместе ни их, ни две остающиеся, знаит, имеем 4 способа. Всего получается 48 способов.

Ответ: 8/15.

Задача 2. Пусть X, Y — независимые гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Найти $\mathsf{E}(X \mid XY)$.

Решение. Обозначим f ту борелевскую функцию, для которой $\mathsf{E}(X|XY) = f(XY)$ п.н. Тогда

$$f(XY) = \mathsf{E}(X|XY) = -\mathsf{E}(-X|(-X)(-Y)) = -f((-X)(-Y)) = -f(XY)$$

почти наверное, поскольку вектор $(-X, XY)$ распределен так же, как случайный вектор (X, XY). Значит, $f(XY) = 0$ п.н.

Ответ: 0.

Задача 3. Существует ли вероятностное пространство и случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ на нем со свойствами:

- все X_n гауссовские со средним 0 и дисперсией 1;
- $X_n I(X_n \leq 0) = X_m I(X_m \leq 0)$ для любых n, m;
- случайные величины $I(X_n \in [a_n, b_n])$, $n \in \mathbb{N}$ независимы для любых $a_n, b_n \geq 0$?

Решение. Нет, не существует. В самом деле, рассмотрим события $A_i = \{X_i > 0\}$, $i \in \mathbb{N}$. Каждое из этих событий имеет вероятность 1/2, и все они независимы (так как, например, $\{X_i > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n \leq X_i \leq n\}$ и события указанного вида для разных i независимы). Значит, дополнения к ним также должны быть независимы. Но эти дополнения совпадают, с точностью до событий нулевой вероятности.

Задача 4. Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем X имеет непрерывное распределение, т.е. $\mathsf{P}(X = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $X + Y$ имеет непрерывное распределение?

Решение. Да, верно. В самом деле, пусть μ и ν — распределения X и Y соовтетственно. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$ по теореме Фубини имеем

$$\mathsf{P}(X + Y = x) = \int_{\mathbb{R}^2} I\{t + u = x\}\nu(du)\mu(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I\{t = x - u\} \mu(dt)\nu(du) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{P}(X = x - u)\nu(du) = 0.$$

Задача 5. Пусть X — случайная величина с $\mathsf{E}X^2 < \infty$. Найти $\inf \mathsf{E}ZX$ по всем неотрицательным случайным величинам Z с $\mathsf{E}Z^2 \le 1$.

Решение. Имеем $\mathsf{E}ZX = \mathsf{E}ZXI\{X > 0\} + \mathsf{E}ZXI\{X < 0\}$. Очевидно, точная нижняя грань может достигаться только на такой Z, для которой первое слагаемое равно нулю. Действительно, если это не так, то переопределим Z, полагая ее равной нулю на событии $\{X > 0\}$, и тогда $\mathsf{E}ZX$ еще уменьшится. Поэтому далее считаем, что Z уже обладает описанным свойством. Если $X \ge 0$, то ответ, очевидно, 0 (достигается при $Z = 0$). Иначе по неравенству Коши–Буняковского

$$(\mathsf{E}ZX)^2 = (\mathsf{E}ZXI\{X < 0\})^2 \le \mathsf{E}Z^2\mathsf{E}X^2I\{X < 0\} \le \mathsf{E}X^2I\{X < 0\},$$

причем равенство достигается только для случайной величины $Z = aXI\{X < 0\}$. Чтобы сделать $\mathsf{E}ZX$ как можно меньше, a выберем так, чтобы $\mathsf{E}Z^2 = 1$, т.е. $a = -1/(\mathsf{E}X^2I\{X < 0\})^{1/2}$. Тогда

$$\mathsf{E}ZX = a\mathsf{E}X^2I\{X < 0\}.$$

Ответ: $-\sqrt{\mathsf{E}X^2I\{X < 0\}}$.

Задача 6. а) Из колоды в 52 карты извлекаются (без возвращения) карты до момента появления червового туза. Найти математическое ожидание этого момента (например, если червовый туз лежит на первом месте, то этот момент равен 1).

б) Найти математическое ожидание момента появления первого туза.

в) Найти математическое ожидание момента появления первой карты червовой масти.

Решение. Будем решать задачу для всех трех пунктов сразу. Пусть среди 52 карт имеется подмножество M из m карт, и мы рассматриваем математическое ожидание появления первой карты из этого подмножества. Добавим к колоде карт еще одну карту ("джокер") и рассмотрим случайную расстановку новой колоды из 53 карт на окружности (все такие расстановки считаем равновероятными). Тогда распределение всех последовательностей карт, возникающих при извлечении из стандартной колоды, совпадает с распределением набора из 52 карт, выбираемого по часовой стрелке, начиная с первой карты, лежащей после джокера. Итак, достаточно найти математическое ожидание числа карт, находящихся между джокером и первой картой из M, смотря по часовой стрелке и учитывая сам джокер. Эта случайная величина, в свою очередь, распределена так же, как число карт между первой и второй (в том же смысле) картами из M, второй и третьей и т.д., и, наконец, между m-й и джокером. Сумма $m + 1$ упомянутых случайных величин равна, естественно, 53. Итак, ответ $53/(m + 1)$.

Ответ: а)53/2, б)53/5, в) 53/13.

Задача 7. Пусть X — случайная величина, f и g — возрастающие ограниченные функции. Доказать, что случайные величины $f(X)$ и $g(X)$ неотрицательно коррелированы.

Решение. Пусть Y — случайная величина, распределенная как X и не зависящая от последней. Тогда

$$cov(f(X), g(X)) = \mathsf{E}f(X)g(X) - \mathsf{E}f(X)g(Y) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathsf{E}f(X)g(X) - \mathsf{E}f(X)g(Y) - \mathsf{E}f(Y)g(X) + \mathsf{E}f(Y)g(Y)) = \frac{1}{2}\mathsf{E}(f(X) - g(Y))(g(X) - g(Y)) \ge 0,$$

так как в последнем выражении случайная величина под знаком математического ожидания неотрицательна.

Задача 8. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на множестве натуральных чисел, P — вероятностная мера на $\mathcal{A}$. Верно ли, что P можно продолжить до вероятностной меры на σ-алгебре всех подмножеств натуральных чисел?

Решение. Да, верно. Разобьем множество $\mathbb{N}$ на не более чем счетное число классов эквивалентности $B_1, B_2, \dots$ по следующему правилу: два числа $m, n \in \mathbb{N}$ эквивалентны друг другу, если для любого $A \in \mathcal{A}$ либо m и n одновременно принадлежат A, либо они одновременно не принадлежат ему (конечно, некоторые классы могут состоять только из одного числа). Тогда все эти классы эквивалентности являются элементами сигма-алгебры $\mathcal{A}$. В самом деле, например, класс B_1 можно представить в виде

$$B_1 = \cap_{i \in B_1} \cap_{j \notin B_1} A_{ij},$$

где $A_{ij} \in \mathcal{A}$ взято так, что $i \in A_{ij}$, но $j \notin A_{ij}$ (по нашему определению эквивалентности такое множество в $\mathcal{A}$ найдется). Пусть $b_i \in B_i$ — наименьшее по порядку число в классе B_i. Продолжим меру P на сигма-алгебру всех подмножеств $\mathbb{N}$, полагая

$$\mathsf{P}(\{b_k\}) := \mathsf{P}(B_k),\ k = 1, 2, \dots,$$

а меру всех прочих одноточечных подмножеств полагая равной нулю. Теперь для любого $\subset \mathbb{N}$ мера P корректно задана формулой

$$\mathsf{P}() = \sum_k \mathsf{P}(C \cap B_k) = \sum_{k : b_k \in C} \mathsf{P}(B_k).$$

Задача 9. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные строго положительные случайные величины. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} X_n/S_n = 0$ п.н.?

Решение. Нет, неверно. Контрпример строится следующим образом. Пусть случайная величина X_1 принимает значения $2^{m^2}, m \in \mathbb{N}$, с вероятностями p_m соовтетственно, где числа p_m выберем позднее. Введем события

$$A_m = \left\{ \max_{k : 2^m < k \le 2^{k+1}} X_k > 2^{m^2} \right\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Если событие A_m произошло, то в последовательности $X_1, X_2, \dots$ среди первых 2^{m+1} значений есть хотя бы одно, которое больше 2^{m^2}. Значит, среди них есть такое значение (скажем, с номером $j(m) \le 2^{m+1}$), которое больше 2^{m^2}, а все предшествующие ему не больше 2^{m^2}. Но тогда

$$X_{j(m)} \ge 2^{(m+1)^2} \ge 2^{m^2+m+1} \ge 2^{m^2} j(m) \ge S_{j(m)-1},$$

так что

$$\frac{X_{j(m)}}{S_{j(m)}} \ge \frac{1}{2}.$$

Итак, если A_n происходят бесконечно часто, то $\limsup_{n\to\infty} X_n/S_n \ge 1/2$. Остаетя подобрать p_m так, чтобы $\mathsf{P}(A_n \text{ беск. ч.}) = 1$. События A_n независимы, так что по второй лемме Бореля–Кантелли нам достаточно добиться того, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_m) = +\infty$. Имеем

$$\mathsf{P}(A_m) = 1 - \mathsf{P}\left(\max_{k : 2^m < k \le 2^{m+1}} X_k \le 2^{m^2} \right) =$$

$$= 1 - (\mathsf{P}(X_1 \le 2^{m^2}))^{2^m} = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_m)^{2^m}.$$

Обозначим $q_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k$. Выберем

$$q_m = 1 - \exp\left\{\frac{\ln(m-1) - \ln m}{2^m}\right\},\ m > 1.$$

Непосредственно проверяется, что $q_m \searrow 0$ при $m \to \infty$. Теперь остается взять $p_1 = p_2 = (1-q_2)/2$ и $p_m = 1 - q_m,\ m > 2$.

Задача 10. Пусть B — броуновское движение, выходящее из 0, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $f(0) \neq 0$. Доказать, что $\mathsf{P}\big(\min_{t\in[0,1]}(B_t + f(t)) = 0\big) = 0$.

Решение. Без ограничения общности считаем, что $f(0) > 0$ (иначе рассмотрим $-B$ вместо B). В силу непрерывности f существует такое $\mu > 0$, что $f(t) > \mu$ при $t \in (0,\mu]$. Траектории случайного процесса B с вероятностью 1 непрерывны в нуле, так что $\max_{u\in[0,t]} B_u \to 0$ при $t \searrow 0$ по вероятности. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h > 0$, что

$$\mathsf{P}(B_t \ge \mu \text{ при некотором } t \in (0,h]) < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min\{\mu, h\} > 0$. Имеем

$$\mathsf{P}\left(\min_{t\in[0,1]}(B_t + f(t)) = 0\right) \le \mathsf{P}\left(\min_{t\in[0,\delta]}(B_t + f(t)) = 0\right) + \mathsf{P}\left(\min_{t\in(\delta,1]}(B_t + f(t)) = 0\right) \le$$

$$\mathsf{P}(B_t \ge \mu \text{ при некотором } t \in (0,\delta]) + \mathsf{P}\left(\min_{t\in(\delta,1]}(B_\delta + B_t - B_\delta + f(t)) = 0\right) \le$$

$$\le \varepsilon + \mathsf{P}\left(B_\delta + \min_{t\in(\delta,1]}(B_t - B_\delta + f(t)) = 0\right).$$

Распределение случайной величины B_δ непрерывно (гауссовская величина с дисперсией δ), а случайная величина $\min_{t\in(\delta,1]}(B_t - B_\delta + f(t))$ от нее не зависит. По задаче 3 данной олимпиады это означает, что последняя вероятность равна нулю. Итак, вероятность рассматриваемого в задаче события не больше ε, и ввиду произвольности ε равна нулю.

Задача 11. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{P}(X_n \neq 0) > 0$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n \in [a,b]) = 0 \ \text{ для любых } \ a, b.$$

Решение. Если X_n постоянны (и не равны нулю), то утверждение задачи очевидно, и далее мы не рассматриваем эту ситуацию.

Фиксируем a и b. Пусть φ — характеристическая функция X_1, а произвольное число $\sigma > 0$. Рассмотрим случайную величину $\xi \sim N(0,\sigma^2)$, не зависящую от величин $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Характеристическая функция случайной величины $S_n + \xi$ абсолютно интегрируема, и по формуле обращения мы имеем

$$\mathsf{P}(S_n + \xi \in [a-1, b+1]) = \frac{1}{2\pi}\int_{a-1}^{b+1}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)^n e^{-t^2\sigma^2/2}\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)^n \frac{e^{it(b+1)-it(a-1)}}{it} e^{-t^2\sigma^2/2}\,dt \tag{1}$$

согласно теореме Фубини.

Заметим, что $|\varphi(t)| < 1$ всюду, кроме, возможно, счетного множества точек. В самом деле, пусть $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ — такое число, что $|\varphi(t)| = 1$. Тогда для некоторого $c \in \mathbb{R}$ имеем $\mathsf{E}e^{it(X_1+c)} = \varphi(t)e^{itc} = 1$, так что $\cos(tX_1 + tc) = 1$ п.н.[1] Значит, все значения X_1 с вероятностью 1 содержатся в множестве $\{-c + 2\pi k/t,\, k \in \mathbb{Z}\}$. Следовательно, если число t_1 также таково, что $|\varphi(t_1)| = 1$, то для некоторого $c_1 \in \mathbb{R}$

$$\{-c_1 + 2\pi k/t_1,\, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{-c + 2\pi m/t,\, m \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Отсюда легко вывести, что t_1 соизмеримо с t.

Из неравенства $|\varphi(t)| < 1$ (почти всюду по мере Лебега) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости следует, что интеграл в (1) стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $\mathsf{P}(S_n + \xi_n \in [a-1, b+1]) \to 0$, $n \to \infty$.

Теперь имеем оценки

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n \in [a,b]) \le \limsup(\mathsf{P}(S_n + \xi \in [a-1,b+1]) + \mathsf{P}(|\xi| \ge 1)) \le$$

$$\le \limsup \mathsf{P}(S_n + \xi \in [a-1,b+1]) + \mathsf{P}(|\xi| \ge 1) = \mathsf{P}(|\xi| \ge 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sigma}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

Выбором σ последний интеграл можно сделать сколь угодно малым. Значит, рассматриваемый в задаче предел равен нулю.

ШЕСТАЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Решения

Задача 1. В корзине M зеленых яблок и N красных яблок. Выбираем по одному яблоку без возвращения, до тех пор, пока не достанем все красные. Чему равна вероятность, что после этого ни одного яблока в корзине не останется?

Решение. Продолжим извлечение яблок до тех пор, пока корзина не опустеет, и занумеруем яблоки так, чтобы первые M номеров были у зеленых яблок. Тогда последовательности извлечений яблок из корзины можно закодировать наборами всех различных натуральных чисел от 1 до $M + N$, и нас интересует доля тех последовательностей, у которых на последнем месте стоит любое от $M + 1$ до $M + N$. Она равна доле тех последовательностей, у которых число из этого промежутка стоит на первом месте, т.е. вероятности того, что первый же извлеченный шар окажется красным. Но эта вероятность, очевидно, равна $N/(M + N)$.

Ответ: $N/(M + N)$.

Задача 2. Пусть X и Y — случайные величины на одном вероятностном пространстве, и $Law(X+Y) = Law(X)$[2]. а) Следует ли отсюда, что $Y = 0$ п.н.? б) Тот же вопрос, если известно, что $Y \ge 0$. в) (III–V курсы) Тот же вопрос, если известно, что X и Y независимы.

[1] Потому что из того, что $\mathsf{E}\cos Z = 1$, следует, что $1 - \cos Z \le 0$ п.н.

[2] $Law(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ — распределение случайного вектора $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Решение. а) Неверно — рассмотреть, например, случайную величину $X \sim N(0,1)$ и взять $Y = -2X$.

б) Верно. Действительно, заметим, что $Z := \operatorname{arctg}(X+Y) - \operatorname{arctg}(X) \geq 0$ п.н. Поэтому равенство $\mathsf{E}Z = 0$ равносильно тому, что $Z = 0$ п.н. Но это равенство выполнено, так как $\mathsf{E}\operatorname{arctg}(X+Y) = \mathsf{E}\operatorname{arctg} X$. Следовательно, $X + Y = X$ п.н., и $Y = 0$ п.н.

в) Верно. Чтобы это доказать, введем характеристические функции φ_X и φ_Y случайных величин X и Y. По условию задачи

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \mathsf{E}e^{it(X+Y)} = \mathsf{E}e^{itX} = \varphi_X(t) \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, если $\varphi(t) \neq 0$, то $\varphi_Y(t) = 1$. В частности, в силу непрерывности любой характеристической функции в нуле последнее равенство справедливо в некоторой ε-окрестности нуля, где $\varepsilon > 0$. Значит, при любом рациональном $t \in (0, \varepsilon)$

$$0 = \mathrm{Re}\mathsf{E}e^{itY} = \mathsf{E}(1 - \cos tY),$$

и так как случайная величина под знаком математического ожидания неотрицательна, то она равна нулю п.н., то есть

$$\mathsf{P}(Y \in M_t) = 1, \text{ где } M_t = \{2\pi k/t : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Остается заметить, что $\cup_{t \in (0,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}} M_t = \{0\}$.

Задача 3 (I–II курсы). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такие события, что $\mathsf{P}(A_j) = 1/2$, $j = 1, 2, 3, 4$. Доказать: а) $\max_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_j A_k) \geq 1/6$; б) оценка в предыдущем пункте неулучшаема.

Решение. а) Применим формулу включения–исключения:

$$1 \geq \mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) + \mathsf{P}(A_4) - \sum_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_j A_k)$$

$$+\mathsf{P}(A_1A_2A_3) + \mathsf{P}(A_1A_2A_4) + \mathsf{P}(A_1A_3A_4) + \mathsf{P}(A_2A_3A_4) - \mathsf{P}(A_1) - \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_3) - \mathsf{P}(A_4) \geq$$

$$\geq \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) + \mathsf{P}(A_4) - \sum_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_j A_k) = 2 - \sum_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_j A_k),$$

откуда

$$\sum_{1\leq j,k\leq 4;\, j\neq k} \mathsf{P}(A_j A_k) \geq 1,$$

так что хотя бы одно слагаемое в левой части не меньше, чем $1/6$.

б) Рассмотреть следующий пример: вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где все шесть элементарных исходов имеют одинаковую вероятность, и события

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},\ A_2 = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\},\ A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},\ A_4 = \{\omega_3, \omega_5, \omega_6\}.$$

Задача 3 (III-V курсы). Пусть последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **не** является сходящейся к нулю п.н., когда $n \to \infty$. Доказать, что существуют $\varepsilon > 0$, возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и последовательность вложенных событий $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (т.е. $A_k \supseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$), такие, что $|\xi_{n_k}(\omega)| \geq \varepsilon$ при $\omega \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $\mathsf{P}(A_k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Докажем вспомогательное утверждение: если $\mu > 0$ и $\{E_1, E_2, \dots\}$ — такие события, что $\mathsf{P}(E_i) \geq \mu$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая строго возрастающая последовательность $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\right) > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

В самом деле, пусть ее не существует. Тогда случафная величина $Z := \sum_{i=1}^{\infty} I\{E_i\} < \infty$ п.н. Возьмем такое $M > 0$, что $\mathsf{P}(B) > 1 - \mu/2$, где событие $B = \{Z \le M\}$. Тогда

$$M \ge \mathsf{E} Z I\{B\} = \mathsf{E} \sum_{i=1}^{\infty} I\{B \cap E_i\},$$

но $\mathsf{P}(BE_i) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(E_i) - \mathsf{P}(B \cup E_i) \ge 1 - \mu/2 + \mu - 1 \ge \mu/2$ при каждом $i \in \mathbb{N}$, так что указанная оценка не может выполняться.

Теперь заметим, что по условию существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} |\xi_n| > \varepsilon) > 0.$$

Пусть эта вероятность равна δ, тогда бесконечное число событий вида $\{|\xi_n| > \varepsilon\}$ имеем вероятность, большую $\delta/2$, и остается применить к ним вспомогательное утверждение.

Задача 4. а) Два случайных вектора (X, Y) и (Z, U) принимают конечное число значений и таковы, что $Law(Y) = Law(Z)$. Доказать, что на некотором вероятностном пространстве существует случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3), такой, что $Law(\xi_1, \xi_2) = Law(X, Y)$ и $Law(\xi_2, \xi_3) = Law(Z, U)$. б) Та же задача без предположения конечности числа значений.

Решение. а) По условию существуют $n \in \mathbb{N}$ и такие множества

$$L_1 = \{x_1, \dots, x_n\},\ L_2 = \{y_1, \dots, y_n\},\ L_3 = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R},$$

что что $\mathsf{P}(X \in L_1, Y \in L_2) = \mathsf{P}(Z \in L_2, U \in L_3) = 1$. Можно считать, что в каждом из множеств L_i, $i = 1, 2, 3$, ровно n точек (если в каком-то из них точек меньше, то добавим необходимое их число, считая, что соответствующий случайный вектор принимает значения в этих добавленных точках с нулевой вероятностью). Меру μ на пространстве $\mathbb{R}^3$ с борелевской сигма-алгеброй определим по формуле

$$\mu((x_i, y_j, t_k)) = \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j)\mathsf{P}(U = t_k | Z = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j),\ i, j, k = 1, \dots, n,$$

и $\mu(\mathbb{R}^3 \setminus (L_1 \times L_2 \times L_3)) = 0$. Условные вероятности мы понимаем в классическом смысле, т.е. $\mathsf{P}(A_1|A_2) = \mathsf{P}(A_1A_2)/\mathsf{P}(A_2)$, где A_1, A_2 — события и считается, что $0/0 = 0$. Мера μ вероятностная, поскольку все n^3 точек вида (x_i, y_j, t_k) различны и

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \mu((x_i, y_j, t_k)) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j) \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(T = t_k | R = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j) = 1.$$

Рассмотрим вероятностное пространство, на котором задан случайный элемент (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с распределением μ. Для произвольных множеств $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ обозначим

$$J = \{1 \le i, j, k \le n : (x_i, y_j, t_k) \in B_1 \times B_2 \times \mathbb{R}\}.$$

Тогда по определению меры μ

$$\mathsf{P}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = \sum_{i,j,k \in J} \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j)\mathsf{P}(U = t_k | Z = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j)$$

$$= \sum{}' \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X \in B_1, Y \in B_2),$$

где сумма $\sum{}'$ берется по таким $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что $(x_i, y_j) \in B_1 \times B_2$. Аналогично проверяется, что $Law(\xi_2, \xi_3) = Law(Z, U)$.

б) Пусть теперь случайные величины могут принимать бесконечное число значений. Построим последовательность случайных векторов $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (на том же вероятностном пространстве, что и (X, Y)) так, чтобы при любом $n \in \mathbb{N}$ величины X_n и Y_n принимали конечное число значений и $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ с вероятностью единица, когда $n \to \infty$. Так же строится последовательность $(Z_n, U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дискретных случайных элементов $(Z_n, U_n) \to (Z, U)$ п.н., $n \to \infty$. Их можно выбрать так, чтобы $Law(Y_n) = Law(Z_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

По уже доказанной части леммы при каждом $n \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}^3$ существует такая вероятностная мера μ_n, что

$$\mu_n(A \times \mathbb{R}) = (Law(X_n, Y_n))(B_1 \times B_2) \text{ и } \mu_n(\mathbb{R} \times C) = (Law(R_n, T_n))(B_2 \times B_3),$$

где $A = B_1 \times B_2$ и $C = B_2 \times B_3$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Хелли существует такой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняются оценки

$$\mathsf{P}(X_n \notin [a, b]) < \varepsilon,\ \mathsf{P}(Y_n \notin [a, b]) < \varepsilon,\ \mathsf{P}(T_n \notin [a, b]) < \varepsilon.$$

Очевидно,

$$\mu_n(\mathbb{R}^3 \setminus [a, b]^3) \le 3\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы согласно многомерной теореме Хелли (теорема Прохорова для пространства $\mathbb{R}^k$) можем выбрать подпоследовательность мер $(\mu_v)_{v\in\mathbb{N}}$, слабо сходящуюся к пределу μ. Построим на каком-нибудь подходящем вероятностном пространстве случайные векторы $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ с совместным распределением μ. Тогда для любой ограниченной непрерывной функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}f(X_v, Y_v) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y)\mu_v(dx\, dy\, dt) \to \mathsf{E}f(\zeta^1, \zeta^2), \quad v \to \infty.$$

Таким образом, $Law(\zeta^1, \zeta^2) = Law(X, Y)$. Аналогично проверяем равенство $Law(\zeta^2, \zeta^3) = Law(R, T)$.

Задача 5. Пусть $\xi \sim N(0, 1)$. Доказать, что $\mathsf{P}(|\xi| \ge x) \le e^{-x^2/2}$ для любого $x \ge 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $F(x) = e^{x^2/2}\mathsf{P}(|\xi| \ge x)$, $x \ge 0$. Ее производная есть

$$F'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(xe^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{x^2/2}\left(x\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt - \int_x^\infty te^{-t^2/2}dt\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{x^2/2}\int_x^\infty (x - t)e^{-t^2/2}dt \le 0,$$

так что F не возрастает. Осталось заметить, что $F(0) = 1$.

Задача 6. 100 паровозов выехали из города по одноколейке, каждый с постоянной скоростью. Когда движение установилось, образовалось несколько караванов (групп, движущихся рядом, со скоростью лидера каравана). Найти среднее и дисперсию их числа. Функция распределения скорости непрерывна и строго возрастает на положительной полуоси, а скорости различных паровозов независимы.

Решение. Прежде всего заметим, что с вероятностью единица все скорости различны (см. задачу 5-й олимпиады о сумме величин с непрерывным распределением). Каждому паровозу поставим в соответствие случайную величину ξ_j, равную 1, если он является лидером каравана (возможно, состоящего только из самого этого паровоза), и равную 0 в противном случае, здесь j — порядковый номер паровоза. Тогда случайные величины $\{\xi_j, j = 1, \dots, 100\}$ попарно независимы[3]. Действительно, если $k > j$, то

$$\mathsf{P}(\xi_j = 1) = \mathsf{P}(j\text{-й паровоз медленнее всех, кто идет перед ним}) = \frac{1}{j},$$

а если $j > k$, то

$$\mathsf{P}(\xi_j = \xi_k = 1) = \mathsf{P}(j\text{-й медленнее всех, кто перед ним}, k\text{-й медленнее всех, кто перед ним}),$$

а это есть отношение количества таких перестановок чисел $\{1, \dots, j\}$, что на первом месте стоит 1, а на k-м с конца стоит число, которое меньше всех последующих, к числу всех перестановок.

Математическое ожидание числа караванов равно $\mathsf{E}\sum_{j=1}^{100} \xi_i$. Раз случайные величины ξ_j попарно независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий.

Ответ: $\sum_{j=1}^{100} j^{-1}$ и $\sum_{j=1}^{100}(j^{-1} - j^{-2})$.

Задача 7. Двадцать человек сидят за круглым столом. Перед одним из них стоит тарелка. Он выбирает (равновероятно) одного из своих соседей и передает ему тарелку. Тот так же выбирает своего соседа, передает ему тарелку, и т.д. (на каждом шаге соседи выбираются независимо). Для каждого человека есть вероятность, что он окажется последним, до кого тарелка дойдет. Найти множество тех людей, для которых эта вероятность максимальна.

Решение. Перенумеруем сидящих за столом по часовой стрелке, начиная с нуля (тот человек, у которого тарелка в начале), и пусть p_k — вероятность, что последним тарелку получит k-й человек, $k = 1, \dots, 19$. Пусть $m \in \{2, 3. \dots, 18\}$. Тогда после первой передачи тарелки m-й человек окажется либо в том же положении, в котором до начала передачи был $m - 1$, либо в том, в котором был $m+1$-й, причем эти два варианта случаются равновероятно. Следовательно,

$$p_m = \frac{p_{m-1} + p_{m+1}}{2},$$

т.е. числа $p_1, p_2, \dots, p_{19}$ образуют арифметическую прогрессию. Очевидно, $p_1 = p_{19}$, так что все элементы прогрессии равны.

Ответ: все, кроме того, у кого тарелка.

Задача 8. В целых точках прямой живут цивилизации. Каждый день между любыми двумя цивилизациями с вероятностью p_n происходит межпланетный конфликт (p_n зависит только от расстояния n между точками, где они живут, и все конфликты случаются независимо). Назовем участок прямой (интервал, соединяющий две соседних целых точки) безопасным, если по разные стороны от него нет пары цивилизаций в состоянии конфликта. Доказать, что с вероятностью единица: безопасных участков либо нет вообще, либо их бесконечное число.

Решение. Обозначим I_k случайную величину, равную индикатору того, что участок номер k (соединяющий точки k и $k+1$) безопасен. Эти случайные величины одинаково распределены. Имеем

$$\mathsf{P}(I_k = 1) = \prod_{j=-\infty}^{k} \prod_{m=k+1}^{\infty} q_{m-j} = \prod_{j=-\infty}^{k} \prod_{n=k+1-j}^{\infty} q_n = \prod_{s=1}^{\infty} q_s^s,$$

здесь и далее в этом решении $q_i := 1 - p_i$. Если это бесконечное произведение расходится к нулю, то $I_k = 0$ п.н. и безопасных участков нет. Допустим, что оно сходится к положительному

[3] На самом деле даже взаимно независимы.

числу. Оценим ковариацию случайных величин I_k и I_l $(l > k)$:

$$cov(I_k, I_l) = \mathsf{P}(I_k = I_l = 1) = \prod_{j=-\infty}^{k} \prod_{m=k+1}^{\infty} q_{m-j} \prod_{v=k+1}^{l} \prod_{w=l+1}^{\infty} q_{w-v} - \prod_{s=1}^{\infty} q_s^{2s} =$$

$$= \prod_{s=1}^{\infty} q_s^s \prod_{n=1}^{l-k} q_n^n \prod_{s=l-k+1}^{\infty} q_s^{l-k} - \prod_{s=1}^{\infty} q_s^{2s} = \prod_{s=1}^{\infty} q_s^s \left(\prod_{s=1}^{\infty} q_s^{\min\{s,l-k\}} - \prod_{s=1}^{\infty} q_s^s \right).$$

Итак, эта ковариация стремится к нулю, когда $|k-l| \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и настолько большое N, что $|cov(I_0, I_n)| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Тогда при $n > N$

$$\mathsf{D}\frac{I_1 + \cdots + I_n}{n} = n^{-2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) cov(I_0, I_k) \right) \leq n^{-2} \sum_{k=0}^{N} n \mathsf{D} I_1 + n^{-2} n\varepsilon.$$

Значит,

$$\mathsf{D}\frac{I_1 + \cdots + I_n}{n} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Таким образом, $(\sum_{k=1}^n I_k)/n \to \mathsf{E} I_1 > 0$ по вероятности, когда $n \to \infty$. Но это означает, что с вероятностью 1 в сумме бесконечное число положительных слагаемых.

Задача 9. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Коши со сдвигом $a \in \mathbb{R}$ и растяжением $\sigma > 0$ (т.е. $\mathsf{E} e^{itX_1} = e^{iat - \sigma|t|}$, $t \in \mathbb{R}$). Привести пример состоятельных по вероятности (при $n \to \infty$) оценок параметров a и σ.

Решение. Плотность случайных величин в задаче равна

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sigma(1 + (x-a)^2 \sigma^{-2})}.$$

Докажем известное вспомогательное утверждение: если независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют функцию распределения F, причем $F(x_0) = 1/2$ и функция F непрерывна и строго возрастает в некоторой окрестности точки x_0, то

$$med(X_1, \ldots, X_n) \to x_0$$

по вероятности. Медиана med чисел $x_1, \ldots, x_n$ определяется так: если $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ — эти же числа, упорядоченные по возрастанию, то

$$med(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} x_{(n+1)/2}, & n \text{ нечетно}, \\ (x_{(n/2)} + x_{(1+n/2)})/2, & n \text{ четно}. \end{cases}$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $F(x_0 - \varepsilon) = 1/2 - \delta < 1/2$. Тогда

$$\mathsf{P}(med(X_1, \ldots, X_n) < x_0 - \varepsilon) \leq \mathsf{P}(\text{ по крайней мере } n/2 - 1 \text{ из величин } X_1, \ldots, X_n \text{ меньше } x_0 - \varepsilon) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I\{X_j < x_) - \varepsilon\} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) \to 0$$

по закону больших чисел, примененному к последовательности $I\{X_n < x_0 - \varepsilon\}$. Аналогично проверяется, что $\mathsf{P}(med(X_1, \ldots, X_n) > x_0 + \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$.

Теперь вспомним, что $\int_{-\infty}^{a} p(x)dx = 1/2$. Поэтому в силу вспомогательного утверждения $med(X_1, \ldots, X_n) \to a$ по вероятности.

Далее, рассмотрим случайные величины $X_1 - X_2, X_3 - X_4, X_5 - X_6, \ldots$. Они независимы и имеют распределение Коши со сдвигом 0 и растяжением 2σ. Их модуль имеет плотность

$$\frac{1}{\pi\sigma(1 + x^2/(4\sigma^2))}, \quad x > 0,$$

а функция распределения равна 1/2 в точке 2σ. Остается применить к ним вспомогательное утверждение.

Ответ: $med(X_1, \ldots, X_n)$ и $med(X_1 - X_2, \ldots, X_{2n-1} - X_{2n})/2$.

СЕДЬМАЯ "КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

Решения

Задача 1. а) Пусть события A и B независимы. Верно ли, что $\mathsf{P}(AB|C) = \mathsf{P}(A|C)\mathsf{P}(B|C)$, где C — некоторое событие? б) Пусть случайные величины X и Y независимы и интегрируемы, а $\mathcal{A}$ — некоторая сигма-алгебра. Верно ли, что $\mathsf{E}(XY|\mathcal{A}) = \mathsf{E}(X|\mathcal{A})\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ п.н.?

Решение. а) Неверно — взять, например, симметричную схему Бернулли и события $A =$"герб в первом испытании, $B =$"герб во втором испытании", $C =$"ровно 1 герб в первых двух испытаниях". б) Неверно — рассмотреть те же события, что в пункте а), и положить $X = I_A$, $Y = I_B$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, C, \Omega \setminus C\}$.

Задача 2. Пусть случайные величины X, Y, Z независимы и строго положительны. Доказать, что тогда для любого $x > 0$ верна оценка $\mathsf{P}(X/Z < x, Y/Z < x) \geq \mathsf{P}(X/Z < x)\mathsf{P}(Y/Z < x)$.

Решение. Можно считать, что $x = 1$ (иначе умножим Z на x^{-1}). Тогда нужно доказать, что

$$\mathsf{P}(X < Z, Y < Z) \geq \mathsf{P}(X < Z)\mathsf{P}(Y < Z).$$

Обозначим μ распределение вектора (X, Y). Тогда по теореме Фубини

$$\mathsf{P}(X < Z, Y < Z) - \mathsf{P}(X < Z)\mathsf{P}(Y < Z) = \mathsf{P}(Z > \max\{X, Y\}) - \mathsf{P}(Z > X)\mathsf{P}(Z > Y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathsf{P}(Z > \max\{x, y\}) - \mathsf{P}(Z > x)\mathsf{P}(Z > y)\right) \mu(dx\, dy) \geq 0,$$

так как выражение в скобках всегда неотрицательно.

Задача 3. Пете каждый день нужно принести домой ведро воды единичного объема. Зачерпнув из колодца полное ведро, он по дороге домой разливает долю воды, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$. Сколько в среднем раз в день ему приходится ходить за водой?

Решение. Пусть число походов за водой — случайная величина ξ. Тогда по известной формуле для целочисленных величин

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi > k).$$

Слагаемое с $k = 0$ равно, очевидно, 1, а k-е слагаемое ($k > 0$) равно вероятности того, что сумма k н.о.р. равномерных на [0,1] величин меньше 1. Эта вероятность равна объему симплекса

$$\{(x_1, \ldots, x_k) : 0 \leq x_i, \sum_{i=1}^{k} < 1\} \subset \mathbb{R}^k,$$

который равен $1/(k!)$, так что сумма ряда равна e.

Ответ: e.

Задача 4. Пусть случайные величины X и Y интегрируемы и таковы, что $\mathsf{E}X^+/\mathsf{E}X^- \geq z$ и $\mathsf{E}Y^+/\mathsf{E}Y^- \geq z$ для некоторого $z > 0$. Верно ли, что тогда $\mathsf{E}(X+Y)^+/\mathsf{E}(X+Y)^- \geq z$? Здесь, как обычно, $t^+ = \max\{t, 0\}$ и $t^- = (-t)^+$.

Решение. Если $z < 1$, то неверно. Рассмотреть, например, такие независимые случайные величины:

$$X = \begin{cases} z, & \text{с вероятностью } 1/2, \\ -1, & \text{с вероятностью} 1/2. \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -z, & \text{с вероятностью } 1/2, \\ z^2, & \text{с вероятностью} 1/2. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\mathsf{E}(X+Y)^+}{\mathsf{E}(X+Y)^-} = \frac{z+z^2}{2+z-z^2} < z.$$

Можно было взять также $Y = -zX$, если не требовать независимости, то это еще проще.

Если $z \geq 1$, то верно. В самом деле, имеем

$$\mathsf{E}\xi^+/\mathsf{E}\xi^- \geq z \Leftrightarrow \mathsf{E}\xi^+ \geq z\mathsf{E}\xi^- \Leftrightarrow \mathsf{E}\xi \geq (z-1)\mathsf{E}\xi^-. \tag{2}$$

С помощью неравенства $a^- + b^- \geq (a+b)^-$ получаем, что

$$\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y \geq (z-1)\mathsf{E}X^- + (z-1)\mathsf{E}Y^- \geq (z-1)\mathsf{E}(X+Y)^-,$$

и остается применить (2).

Ответ: Утверждение верно тогда и только тогда, когда $z \geq 1$.

Задача 5. Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — стационарная в широком смысле последовательность случайных величин (т.е. ковариация $cov(X_j, X_k)$ существует и зависит только от числа $j-k$). Предположим, что $cov(X_0, X_j) \leq 0$ для каждого $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Может ли ряд $\sum_{j=0}^{\infty} cov(X_0, X_j)$ расходиться?

Решение. Пусть $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathsf{D}S_n = \sum_{j,k=1}^{n} cov(X_j, X_k) = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) cov(X_0, X_m) \leq n\mathsf{D}X_0 + \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{n}{2} cov(X_0, X_m).$$

Левая часть неотрицательна (так как она не меньше дисперсии), и поделив ее на n, имеем

$$\sum_{m=1}^{[n/2]} cov(X_0, X_m) + \mathsf{D}X_0 \geq 0,$$

т.е. $\sum_{m=1}^{[n/2]} |cov(X_0, X_m)| \leq \mathsf{D}X_0$, ряд сходится.

Следствие: если $\{X_t, t \in T\}$ — такое бесконечное семейство случайных величин, что $\mathsf{D}X_t = a$ и $cov(X_t, X_s) = b$ $(t \neq s)$ при некоторых a и b, то $b \geq 0$.

Ответ: не может.

Задача 6. Доказать, что существует квадратная матрица A порядка 11, у которой все элементы равны 1 либо -1, а $\det A > 4000$.

Решение. Пусть элементы случайной матрицы A — н.о.р. величины ξ_{ij}, принимающие значения ± 1 с равными вероятностями, $i, j = 1, \ldots, 11$. Тогда $\det A$ — симметричная случайная величина. Вычислим ее дисперсию:

$$\mathsf{E}(\det A)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{\sigma\in S_{11}} (-1)^{sgn(\sigma)}\xi_{1,\sigma(1)}\xi_{2,\sigma(2)}\ldots\xi_{11,\sigma(11)}\right)^2 =$$

$$= \mathsf{E}\sum_{\sigma\in S_{11}}\sum_{\tau\in S_{11}} (-1)^{sgn(\sigma)+sgn(\tau)}\xi_{1,\sigma(1)}\xi_{2,\sigma(2)}\ldots\xi_{11,\sigma(11)}\xi_{1,\tau(1)}\xi_{2,\tau(2)}\ldots\xi_{11,\tau(11)}$$

(S_{11} — группа подстановок). Если подстановки σ и τ неодинаковы, то в произведении под знаком суммы найдется случайная величина, входящая в него в первой степени. Поэтому ожидание такого произведения равно нулю. Если же $\sigma = \tau$, то произведение равно 1, а всего в двойной сумме таких произведений $|S_{11}| = 11!$. Значит, $\mathsf{E}(\det A)^2 = 11!$, поэтому для некоторого элементарного исхода

$$\det A \geq \sqrt{11!} > 4000.$$

Задача 7. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$, а $X_{(k)}, k = 1, 2, \ldots, 100$ – значения этих величин, расположенные в порядке возрастания. Найти математическое ожидание случайной величины $X_{(17)}$.

Решение. Решим задачу для отрезка $[0, 1]$, затем линейное преобразование.

Способ 1: вычислить распределение $X_{(17)}$, затем считать интеграл. Функция распределения равна

$$F(t) = \mathsf{P}(X_{(17)} < t) = \sum_{k=17}^{100} \mathsf{P}(\text{ровно } k \text{ величин меньше } t) =$$

$$= \sum_{k=17}^{100} \binom{100}{k} t^k (1-t)^{100-k},$$

и интегрируя по частям мы имеем

$$\mathsf{E}X_{(17)} = \int_0^1 tF'(t)dt = F(1) - \int_0^1 F(t)dt = 1 - \sum_{k=17}^{100}\binom{100}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{100-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=17}^{100}\binom{100}{k} B(k+1, 101-k) = 1 - \sum_{k=17}^{100}\binom{100}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(101-k)}{\Gamma(102)} =$$

$$= 1 - \sum_{k=17}^{100}\frac{100!k!(100-k)!}{k!(100-k)!101!} = 1 - \frac{84}{101} = \frac{17}{101}.$$

Способ 2: Пусть $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{100}$ — независимые случайные точки, равномерно распределенные на окружности длины 1, а Y_k — расстояние по часовой стрелке от Z_0 до k-й по удаленности точки, $k = 1, \ldots, 100$. Тогда $(Y_1, \ldots, Y_{100})$ распределен как $(X_{(1)}, \ldots, X_{(100)})$ (чтобы это проверить, надо записать характеристические функции этих векторов и заметить, что распределение первого из них не зависит от Z_0). Поэтому $\mathsf{E}X_{(17)} = \mathsf{E}Y_{17}$. Но поскольку все дуги между соседними точками на окружности распределены одинаково, то их ожидания — по $1/101$, и ответ $17/101$.

Ответ: $-67/101$.

Задача 8. а) Случайная величина X, имеющая характеристическую функцию $\mathsf{E}e^{itX} = 1/\sqrt{1+t^2}$, распределена как произведение двух независимых случайных величин, обладающих плотностями. Найти эти плотности; б) Тот же вопрос, но для характеристической функции $1/(1+|t|)$.

Решение. а)

$$1/\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(1+t^2)x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\Big(e^{-t^2x^2/2}\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi x^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{izt-z^2/(2x^2)}dz\Big)dx = ||u = z/x|| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iutx-u^2/2}dz\Big)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{iutx-x^2/-u^2/2}dxdu.$$

б) аналогично

$$1/(1+|t|) = \int_0^\infty e^{-x-x|t|}dx = \int_0^\infty e^{-x}e^{-x|t|}dx = \int_0^\infty e^{-x}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{izt}dz}{x\pi(1+z^2/x^2)}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{iutx}}{\pi(1+u^2)}dudx,$$

Ответ: а) две стандартные гауссовские; б) стандартное распределение Коши и стандартное показательное распределение.

Задача 9. Пусть матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ симметричны и неотрицательно определены. Доказать, что матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, обладает теми же свойствами.

Решение. Рассмотрим независимые случайные векторы $X \sim N(0,A)$ и $Y \sim N(0,B)$. Тогда ковариационная матрица вектора $Z = (X_1Y_1, X_2Y_2, \dots, X_nY_n)$ равна C, откуда сразу следует утверждение.

Задача 10. Делается одно наблюдение случайной величины $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, оба параметра которой неизвестны. Указать для параметра σ^2 какой-нибудь доверительный интервал, уровень значимости которого не превышает числа $1/100$.

Решение. Будем строить интервал в виде $[0, T(\xi))$, где $T(\xi)$ — некоторая статистика. По определению это будет доверительный интервал с уровнем $\le 1/100$, если

$$\forall\, \mu \in \mathbb{R}\ \forall\, \sigma > 0\ \mathsf{P}_{\mu,\sigma^2}(\sigma^2 \ge T(\xi)) \le 1/100.$$

Заметим, что плотность распределения $N(\mu,\sigma^2)$ не превосходит $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Поэтому $\mathsf{P}(|\xi| \le a) \le a/\sigma$ при любом $a > 0$. Следовательно,

$$t \le \mathsf{P}(|\xi|/\sigma \le t) = \mathsf{P}(\xi^2 \le t^2\sigma^2) = \mathsf{P}(\sigma^2 \ge \xi^2/t^2).$$

Подставляя $t = 1/100$, видим, что подходит статистика $T(\xi) = 10000\xi^2$.

Ответ: $(-1, 10000\xi^2)$.