ИНФОРМАЦИЯ О ВОСЬМОЙ "КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при поддержке Московской Государственной Академии тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова провела восьмую "Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей". Информация о предыдущих олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (http://mech.math.msu.su/probab).

Олимпиада была проведена 18 апреля 2009 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 38 студентов I–II курсов и 41 студент III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК, химического факультета и факультета наук о материалах Московского Государственного Университета, а также Государственного университета “Высшая школа экономики”, механико-математического факультета Киевского Национального Университета, математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского Государственного Педагогического Университета.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число студентов III–V курса, решивших эту задачу (для задач, которые предлагались только в одной возрастной категории, приведено только число решивших).

Задача 1. (I-II; 15) Пусть случайная величина X имеет конечную дисперсию и не равна тождественно нулю. Доказать, что $\mathsf{P}(X=0) \le (\mathsf{E}X^2)^{-1}\mathsf{D}X$.

Задача 2. (I-V; 8, 4) Пусть множества $A_1, \ldots, A_{2000} \subset A$ содержат по крайней мере по 6 элементов каждое, и не все эти множества совпадают. Доказать, что существует 100 таких различных разбиений множества A на 5 попарно непересекающихся подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_5$, что каждое множество A_i содержит представителей хотя бы двух подмножеств E_i.

Задача 3. (I–V; 19, 29) Из контейнера A, в котором было 1000 зеленых и 3000 красных яблок, взяли половину яблок и перенесли в контейнер B, в котором к тому времени уже лежало 3000 зеленых и 1000 красных яблок. Затем из контейнера B извлекли одно яблоко. Найти вероятность, что оно зеленое.

Задача 4. (I–V; 2, 5) Жители города Н. любят после работы, которая у каждого заканчивается в случайный момент, уделить некоторое время рыбалке. В озере водятся караси и лещи, причем доля лещей равна p. В городе действует закон, запрещающий ловить более чем одного леща за день, а горожане исключительно законопослушны и после первой поимки леща сразу возвращаются домой. Найти долю лещей среди всей пойманной в городе рыбы.

Задача 5. (I–V; 9, 21) Последовательность случайных величин $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится по вероятности к случайной величине X, причем при каждом $n \in \mathbb{N}$ величины X_n и X независимы. Верно ли, что $X = const.$ п.н.?

Задача 6. (I–V; 1, 1) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность пуассоновских случайных величин с параметром 1. Доказать, что $\mathsf{E}\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} =$

$O(\ln n)$, $n \to \infty$.

Задача 7. (I–V; 2, 5) Пусть $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — простейшее случайное блуждание, т.е. $S_0 = 0$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ независимы и принимают значения 1 и -1 с вероятностями 1/2. Обозначим $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ момент первого возвращения в нуль. Для каждого $a \in \mathbb{N}$ найти $\mathsf{E}N_a$, где $N_a = |\{j < \tau : S_j = a\}|$ — время, проведенное блужданием в точке a, до момента τ.

Задача 8. Пусть $W = (W_t)_{t\geq 0}$ — винеровский процесс. **а)**(III–V; 8) Найти математическое ожидание времени, которое его график проведет выше прямой $y = t$; **б)**(III–V; 3) Записать дисперсию этого времени в виде интеграла от элементарных функций; **в)**(III–V; 0) Вычислить ее.

Задача 9. (III–V; 0) Делается одно наблюдение X нормальной случайной величины с неизвестным средним $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией 1. Для оценки μ используют выражение $f(X)$, где функция f непрерывна и $\mathsf{E}f(X)^2 < \infty$ при любом μ. Доказать, что минимум выражения $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \mathsf{E}(f(X) - \mu)^2$ по всем таким f достигается при $f(x) = x$.

Задача 10. (I–V; 2, 2) Пусть $p > 0$, а $X_1, X_2, \ldots$ — такие случайные величины на одном и том же вероятностном пространстве, что при каждом $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathsf{P}(\max_{k=1,\ldots,n} |X_k| > \varepsilon n^{1/p})$ сходится. Доказать, что $X_n/n^{1/p} \to 0$ п.н., когда $n \to \infty$.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 22 апреля 2009 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Шамов Александр Александрович

Студент II курса механико-математического факультета Киевского Национального Университета (8 решенных задач).

Вторая премия

Богатый Иван Симеонович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенные задачи).

Окунев Алексей Владимирович

Студент I курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенные задачи).

Розенштейн Илья Петрович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенные задачи).

Третья премия

Авилов Артем Алексеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи).

Гончарук Наталия Борисовна

Студентка II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи).

Есин Алексей Алексеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи).

Остроумова Людмила Александровна

Студентка II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3,5 решенные задачи).

Сафин Станислав Рафикович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи).

Шмаров Владимир Альбертович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия не присуждена.

Вторая премия

Бутковский Олег Александрович

Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.В. Булинский (5,5 решенных задач).

Девятов Ростислав Андреевич

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — И.В. Аржанцев (5,5 решенных задач).

Третья премия

Демичев Вадим Петрович

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.В. Булинский (4 решенные задачи).

Каменов Андрей Александрович

Студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев (4 решенные задачи).

Подхалюзин Александр Викторович

Студент IV курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, научный руководитель — Я.Ю. Никитин (4 решенные задачи).

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о второй студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

[3] Информация о третьей студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **49** (2004), вып. 3, с. 621–623.

[4] Информация о четвертой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **50** (2005), вып. 2, с. 411–413.

[5] Информация о пятой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **51** (2006), вып. 3, с. 428–430.

[6] Информация о шестой "Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей". — Теория вероятностей и ее применения, **52** (2007), вып. 3, с. 428–430.

[7] Информация о седьмой "Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей". — Теория вероятностей и ее применения, **53** (2008), вып. 2, с. 411–413.

10 мая 2009 г.

Оргкомитет восьмой
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":
член-корреспондент РАН, профессор А.Н. Ширяев,
к.ф.-м.н. А.В. Куликов,
к.ф.-м.н., ассистент Е.М. Суханова,
к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин,
аспиранты А.Т. Абакирова, М.М. Мусин,
С.П. Прохоренков, И.Г. Эрлих, Д.А. Ярцева, П.А. Яськов.