ИНФОРМАЦИЯ О СЕДЬМОЙ "КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

В ознаменование 105-летия со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова и 75-летия со дня публикации его монографии "Основные понятия теории вероятностей" кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова провела седьмую "Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей". Информация о предыдущих олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (http://mech.math.msu.su/probab).

Олимпиада была проведена 19 апреля 2008 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 51 студент I–II курсов и 39 студентов III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК и факультета наук о материалах Московского Государственного Университета, а также Государственного университета "Высшая школа экономики", физико-технического факультета Киевского Политехнического Института, механико-математического факультета Киевского Национального Университета, математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского Государственного Педагогического Университета.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число студентов III–V курса, решивших эту задачу.

Задача 1. **а)**(I-II; 37) Пусть события A и B независимы. Верно ли, что $\mathsf{P}(AB|C) = \mathsf{P}(A|C)\mathsf{P}(B|C)$, где C — некоторое событие? **б)**(III-V; 21) Пусть случайные величины X и Y независимы и интегрируемы, а $\mathcal{A}$ — некоторая сигма-алгебра. Верно ли, что $\mathsf{E}(XY|\mathcal{A}) = \mathsf{E}(X|\mathcal{A})\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ п.н.?

Задача 2. **а)** (I-V; 5, 8) Пусть случайные величины X, Y, Z независимы и строго положительны. Доказать, что тогда для любого числа $x > 0$ верна оценка $\mathsf{P}(X/Z < x, Y/Z < x) \geq \mathsf{P}(X/Z < x)\mathsf{P}(Y/Z < x)$.

Задача 3. **а)** (I–V; 15, 14) Пете каждый день нужно принести домой ведро воды обьема 1. Зачерпнув из колодца полное ведро, он по дороге домой разливает долю воды, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$. Сколько в среднем раз в день ему приходится ходить за водой?

Задача 4. (I–V; 7, 7) **а)** (I–II, 7) Пусть случайные величины X и Y интегрируемы, причем для некоторого $z > 0$ справедливы неравенства $\mathsf{E}X^+/\mathsf{E}X^- \geq z$ и $\mathsf{E}Y^+/\mathsf{E}Y^- \geq z$. Верно ли, что тогда $\mathsf{E}(X+Y)^+/\mathsf{E}(X+Y)^- \geq z$? Здесь, как обычно, $t^+ = \max\{t, 0\}$ и $t^- = (-t)^+$. **б)** (III–V, 7) Та же задача, что в пункте а), но в предположении, что X и Y независимы.

Задача 5. (I–V; 3, 4) Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — стационарная в широком смысле последовательность случайных величин. Предположим, что $cov(X_0, X_j) \leq 0$ для каждого $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Может ли ряд $\sum_{j=0}^{\infty} cov(X_0, X_j)$ расходиться?

Задача 6. (I–V; 10, 5) Доказать, что существует квадратная матрица A порядка 11, у которой все элементы равны 1 либо -1, а $\det A > 4000$.

Задача 7. (I–V; 7, 12) Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$, а $X_{(k)}, k = 1, 2, \ldots, 100$

– их значения, расположенные в порядке возрастания. Найти $\mathsf{E}X_{(17)}$.

Задача 8. **а)**(I–V; 1, 0) Случайная величина X, имеющая характеристическую функцию $\mathsf{E}e^{itX} = 1/\sqrt{1+t^2}$, распределена как произведение двух независимых случайных величин, обладающих плотностями. Найти эти плотности; **б)**(I–V; 0, 0) Тот же вопрос, но для характеристической функции $1/(1+|t|)$.

Задача 9. (I–V; 6, 17) Пусть матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ симметричны и неотрицательно определены. Доказать, что матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, обладает теми же свойствами.

Задача 10. (III–V; 3) Делается одно наблюдение случайной величины $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, оба параметра неизвестны. Указать для параметра σ^2 какой-нибудь доверительный интервал, уровень значимости которого не превышает $1/100$.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 19 апреля 2008 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Баранов Дмитрий Владимирович

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Шамов Александр Александрович

Студент I курса механико-математического факультета Киевского Национального Университета (7 решенных задач).

Вторая премия

Девятов Ростислав Андреевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6 решенных задач).

Третья премия

Буфетов Алексей Игоревич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5,5 решенных задач).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Каменов Андрей Александрович

студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев (7,5 решенных задач).

Вторая премия

Алиев Амир Фикрет оглы

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев (6,5 решенных задач).

Третья премия

Бутковский Олег Александрович

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.В. Булинский (5 решенных задач).

Леонов Глеб Михайлович

Студент V курса Математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, научный руководитель — И.А. Ибрагимов (5 решенных задач).

Орлов Дмитрий Владимирович

студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.С. Черный (5 решенных задач).

Трепалин Андрей Сергеевич

студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Ю.Г. Прохоров (5 решенных задач).

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

[2] Информация о второй студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), вып. 2, с. 428–430.

[3] Информация о третьей студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **49** (2004), вып. 3, с. 621–623.

[4] Информация о четвертой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **50** (2005), вып. 2, с. 411–413.

[5] Информация о пятой студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **51** (2006), вып. 3, с. 428–430.

[6] Информация о шестой “Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей”. — Теория вероятностей и ее применения, **52** (2007), вып. 3, с. 428–430.

25 апреля 2008 г.

Оргкомитет седьмой
“Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей”:
член-корреспондент РАН, профессор А.Н. Ширяев,
к.ф.-м.н., ст. преп. В.В. Козлов,
к.ф.-м.н., ст. преп. А.В. Селиванов,
к.ф.-м.н., ассистент Д.А. Шабанов,
к.ф.-м.н., ассистент А.П. Шашкин,
аспиранты Н.Ю. Крыжановская, А.В. Куликов,
М.М. Мусин, С.П. Прохоренков, Ф.А. Устинов, П.А. Яськов.