ИНФОРМАЦИЯ О ВТОРОЙ ”КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ”

В канун 100-летия со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при поддержке Франко-Русского Института им. А.М. Ляпунова провела вторую ”Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей”. (Первая подобная олимпиада была проведена в октябре 2001 г.; см. [1].) Информация об обеих олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: `http://mech.math.msu.su/probab`.

В оргкомитет по проведению второй олимпиады вошли заведующий кафедрой теории вероятностей член-корреспондент РАН, профессор А.Н. Ширяев (председатель оргкомитета), аспирант А.В. Селиванов, ассистент М.А. Урусов, к.ф.-м.н. А.С. Черный.

Олимпиада была проведена 19 апреля 2003 г. раздельно для II–III и IV–V курсов (продолжительность — 4 часа). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 29 студентов II–III курсов и 13 студентов IV–V курсов механико-математического факультета, физического факультета, факультета ВМиК Московского Государственного Университета, физико-технического факультета Киевского Политехнического Института, а также механико-математического факультета Киевского Национального Университета.

Задачи олимпиады. В скобках после номера задачи указываются курсы, для которых предлагалась данная задача, затем число студентов II–III курса, решивших эту задачу, и наконец число студентов IV–V курса, решивших эту задачу.

Задача 1. (II–V, 28, 10) На столе лежат белая и черная шляпы с лотерейными билетами. Белая шляпа ”лучше” в том смысле, что при вытаскивании из нее билета вероятность получить выигрышный билет выше, чем для черной шляпы. На другом столе лежат также белая и черная шляпы с лотерейными билетами, причем белая ”лучше” в указанном выше смысле. Предположим, что билеты из обеих белых шляп объединили в одну большую белую шляпу, а билеты из двух черных шляп объединили в одну большую черную шляпу. Верно ли, что большая белая шляпа ”лучше” большой черной в указанном выше смысле?

Задача 2. (II–V, 24, 8) Пусть $A, B, C_1, \dots, C_n$ — события из некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что для любого $i = 1, \dots, n$ имеем $\mathsf{P}(C_i) > 0$, $\mathsf{P}(A \mid C_i) \ge \mathsf{P}(B \mid C_i)$, причем $\bigcup_{i=1}^n C_i = \Omega$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) \ge \mathsf{P}(B)$?

Задача 3. (II–V, 6, 4) Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты на 15-местный ряд в кинотеатре. Считая, что все 15! их возможных расположений по этим местам равновероятны, вычислить математическое ожидание числа пар соседей противоположного пола. (Например, при расположении ”м,м,м,м,м,м,м,д,м,д,д,д,д,д,д” имеется 3 пары соседей противоположного пола.)

Задача 4. **а)** (II–III, 10) Пусть K — единичная окружность, P — вероятностная мера на K такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathsf{P}$, где φ_α обозначает поворот K на угол α, а $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ обозначает образ меры P при отображении φ_α, т.е. $(\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1})(A) = \mathsf{P}(\varphi_\alpha^{-1}(A))$. Доказать, что P совпадает с нормированной мерой Лебега.

б) (II–III, 6) Доказать то же самое, предполагая лишь, что существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ и $\mathsf{P} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \mathsf{P}$.

Задача 5. **а)** (II–III, 23) Пусть X — случайная величина такая, что $\mathsf{P}(X \neq 0) > 0$. Предположим, что для некоторых чисел a и b случайные величины aX и bX совпадают по распределению (т.е. их функции распределения совпадают). Верно ли, что $a = b$?

б) (II–III, 14) Верно ли то же самое при дополнительном предположении $a, b \geq 0$?

Задача 6. (II–III, 2) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ — σ-алгебра, включающая все множества нулевой вероятности из $\mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$ — событие. Известно, что для любого события B, независимого с $\mathcal{G}$, события A и B независимы. Верно ли, что $A \in \mathcal{G}$?

Задача 6'. (IV–V, 3) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ — σ-алгебра, включающая все множества нулевой вероятности из $\mathcal{F}$, X — случайная величина. Известно, что для любой случайной величины Y, независимой с $\mathcal{G}$, случайные величины X и Y независимы. Верно ли, что X $\mathcal{G}$-измерима?

Задача 7. (II–III, 3) Каково максимально возможное значение дисперсии случайной величины X, принимающей значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$?

Задача 7'. (IV–V, 7) Каково максимально возможное значение дисперсии случайной величины X, принимающей значения из отрезка $[0, 1]$?

Задача 8. **а)** (IV–V, 9) Последовательность случайных величин X_n сходится по вероятности к X. Верно ли, что последовательность S_n/n, где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, сходится по вероятности к X?

б) (IV–V, 4) Верно ли то же самое при дополнительном предположении $|X_n| \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$?

Задача 9. (IV–V, 2) Пусть случайный вектор X^n имеет равномерное распределение на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. (Равномерное распределение характеризуется тем свойством, что оно инвариантно относительно ортогональных преобразований.) Пусть Y^n — проекция X^n на первую координатную ось. Доказать, что последовательность $\sqrt{n}Y^n$ слабо сходится к случайной величине, имеющей стандартное нормальное распределение.

Задача 10. (IV–V, 2) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые бернуллиевские случайные величины с распределением $\mathsf{P}(X_n = -1) = 1/3$, $\mathsf{P}(X_n = +1) = 2/3$. Можно ли найти вероятностную меру Q эквивалентную P такую, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ математическое ожидание по мере Q случайной величины X_n равно 0? (Меры P и Q называются эквивалентными, если множества меры 0 для них совпадают, т.е. $\mathsf{Q}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{P}(A) = 0$.)

Задача 11. (II–IV, 3, 2) На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов (см. рисунок 1). Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью 1/2, независимо от других мостов. Какова вероятность того, что после вышеуказанного наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя неразрушенные мосты? (В случае, показанном на рисунке 2, можно перейти с одного берега на другой; в случае же, показанном на рисунке 3, нельзя перейти с одного берега на другой.)

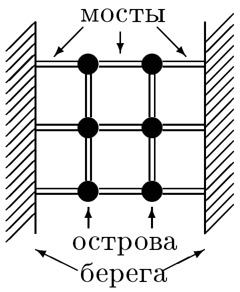

Рисунок 1

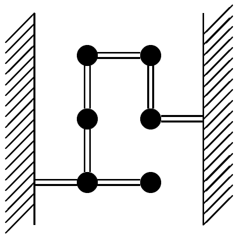

Рисунок 2

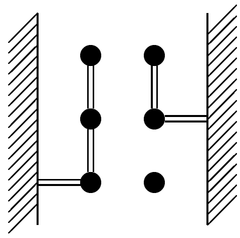

Рисунок 3

Победители олимпиады. Разбор задач, вручение призов всем участникам, а также награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 23 апреля 2003 г.

Победители среди студентов II–III курсов

Первая премия

Гоголев Андрей Юрьевич
(студент III курса физико-технического факультета Киевского Политехнического Института, научный руководитель — А.А. Дороговцев), 8 решенных задач

Вторая премия

Дремов Владимир Александрович
студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — Г.Б. Шабат), 7 решенных задач

Третья премия

Кузнецов Андрей Юрьевич
студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета), 5.5 решенных задач

Устинов Филипп Александрович
студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев), 5.5 решенных задач

Победители среди студентов IV–V курсов

Первая премия

Медведев Илья Николаевич
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.Н. Ширяев), 6 решенных задач

Вторая премия

Гаас Валерий Владимирович
студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.М. Зубков), 5.5 решенных задач

Шибанов Олег Константинович
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.М. Зубков), 5.5 решенных задач

Третья премия

Дильман Степан Валерьевич
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — А.В. Булинский), 5 решенных задач

Сорокин Алексей Александрович
студент V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета, научный руководитель — В.В. Козлов), 5 решенных задач

Список литературы

[1] Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), вып. 4, с. 823–824.

23 апреля 2003 г.

Оргкомитет второй
"Колмогоровской студенческой
олимпиады по теории вероятностей":
член-корр. РАН, профессор А.Н. Ширяев,
аспирант А.В. Селиванов,
ассистент М.А. Урусов,
к.ф.-м.н. А.С. Черный.