

Об актуарной математике

Проф. Екатерина Вадимовна
Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Встреча со студентами

Москва, 1 апреля 2022 г.

ДОБРЫЙ ДЕНЬ!

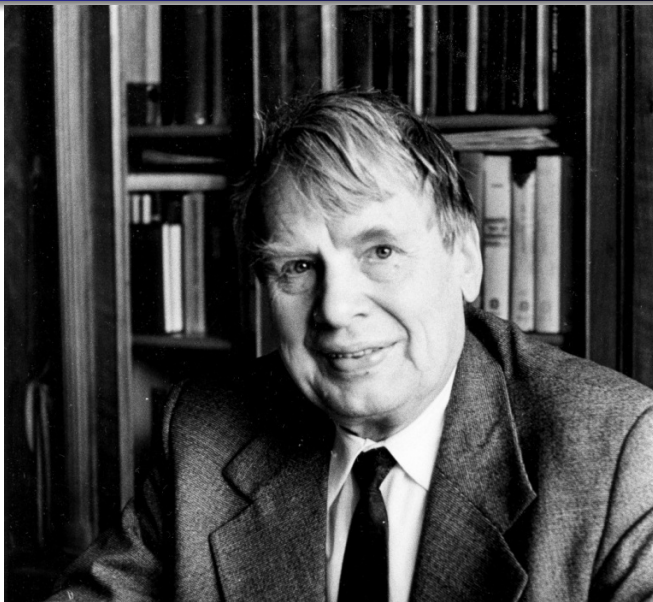


Кафедра теории вероятностей

- Как известно, основоположник теории вероятностей - Андрей Николаевич Колмогоров - в 1933г. опубликовал книгу "Основные понятия теории вероятностей" (на немецком языке) и в 1936г. на русском
- В 1933 году возник механико-математический факультет
- Кафедра теории вероятностей создана в 1935 году
- В 1953 году мех-мат переехал в новое здание на Ленинских горах
- Сначала кафедра располагалась на 12 этаже, **теперь в ауд. 16-02**
- В 1965 г. создана Межфакультетская научно-исследовательская лаборатория статистических методов (рук. академик АН СССР А.Н.Колмогоров)
- В 1976 г. основана кафедра математической статистики (до 1980г. зав. кафедрой А.Н.Колмогоров, а с 1980г. он заведовал кафедрой математической логики), с 1992г. - это кафедра математической статистики и случайных процессов



Академик АН УССР Б.В.Гнеденко - зав. кафедрой 1965-1995



Академик РАН А.Н.Ширяев - зав. кафедрой с 1996 г.



В феврале 1993 года началось обучение по специальности математика, прикладная математика с экономическим уклоном (теперь экономический поток).

Идея создания новой специализации принадлежала ныне покойному академику [Б.В.Гнеденко](#), в то время бывшему заведующим кафедрой теории вероятностей.

Он отчетливо понимал, что экономические изменения, произошедшие в России и других странах бывшего Советского Союза, создали потребность в специалистах по страхованию и менеджменту финансовых рисков. А это является неотъемлемой частью профессии **актуарий**.

Необходимо отметить решающий вклад академика РАН
[А.Н.Ширяева](#),

зав. кафедрой теории вероятностей
механико-математического факультета МГУ,
президента Международного Финансового Общества
Башелье,
первого президента Российского Актuarного Общества

в развитие актuarного образования,
в частности, в организацию в 1996 году новой
специализации, **актuarно-финансовый аналитик**.

Слово актуарий в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона за 1901 год определяется как регистратор, должность, введенная в 1720 году Петром I в "Положении о коллегиях". В Древнем Риме это были писцы судебных актов, а также военные, занятые поставками.

Позднее это слово стало означать **лицо, занимающееся математическими расчетами в страховой компании.**

Актuарная наука это дисциплина, которая применяет математические и статистические методы для **оценки рисков**, возникающих в страховании, финансах и других областях.

Актуарная профессия формально появилась в 1848г., с созданием Institute of Actuaries, London. The Faculty of Actuaries, Edinburgh, был учрежден в 1856г., а в 2010г. он объединился с Institute of Actuaries.

International Actuarial Association (IAA) это всемирная организация, включающая местные актуарные ассоциации. Она была основана в 1895г. как объединение отдельных актуариев под именем "Comité Permanent des Congrès d'Actuaires", переименована в IAA в 1968 и реструктурирована на 26 Международном конгрессе актуариев в Бирмингеме (7–12 июня 1998г.).

В наши дни IAA состоит из 69 Full Member Associations, представляющих 98% лиц, имеющих квалификацию актуария, and 28 Associate Member Associations. Она имеет 7 секций.

ASTIN, сокращение от **Actuarial Studies In Non-life insurance**, создана в 1957г. как первая секция IAA. Главная цель **ASTIN** развивать актуарные исследования, в основном в страховании не жизни. **ASTIN** постоянно работает над дальнейшим развитием математических основ страхования не жизни и перестрахования.

Другая секция IAA, созданная в 1986г., **AFIR**, что получено из **Actuarial Approach for Financial Risks**. Ее цель была определена как содействие актуарным исследованиям в области финансовых рисков и проблем.

С 2011г., мандат секции был расширен, чтобы формально включить **Enterprise Risk Management (ERM)**, поэтому название секции стало **AFIR/ERM**.

Health Section (IAAHS) создана в 2003г.,
Pensions, Benefits and Social Security Section
(PBSS) также работает с 2003г.,
Life Section (IAALS) создана в 2005г.

Российское актуарное общество было создано 14 сентября 1994г., первым президентом был профессор А.Н.Ширяев.

А.Н.Ширяев. Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития. Обзорение прикладной и промышленной математики, 1994, т.1, в.5, с.684-697. !!!

Российская гильдия актуариев основана в 2002г. на базе актуарного общества, созданного в 1994г.

4 ноября 2008г. Российская гильдия актуариев стала действительным членом (full member) IAA и была признана неотъемлемой частью международного актуарного сообщества.

Актуарная деятельность до 1917г.

Наиболее известен С.Е.Савич (1864-1936), который был вице-президентом первых четырех Международных конгрессов актуариев и членом Оргкомитета 8 конгресса, который планировался на 1915г. в С.Петербурге, но был отменен из-за войны.

Он был постоянным членом Страхового комитета Министерства внутренних дел, который занимался надзором за страховой деятельностью в Российской империи.

В основном он интересовался страхованием жизни, здоровья и пенсиями.

Работы по страхованию жизни есть у известных ученых В.Я.Буняковского и А.А.Маркова.

Определение

Страхование – это операция, посредством которой одна сторона (**страхователь**), уплачивая некоторую сумму (**премию** или страховой взнос), обеспечивает себе или третьей стороне (**выгодоприобретателю**) при осуществлении **риска** (наступлении **страхового события**) выплату возмещения другой стороной (**страховщиком**), который принимает на себя целый ансамбль рисков, компенсируя их в соответствии с **законами теории вероятностей**.

2 денежных потока (премии и возмещения)

Премии платят страхователи, а возмещения страховщик

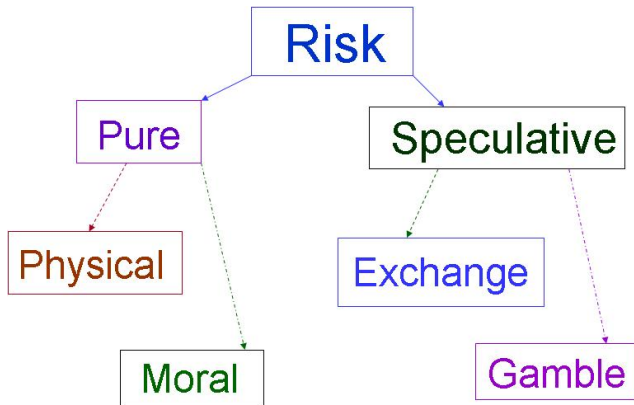
страхователь, застрахованный,
выгодоприобретатель

какие возможны комбинации?

Concise Oxford English Dictionary:

Risk is a hazard, a chance of bad consequences, loss or exposure to mischance.

Риск - это опасность, вероятность плохих последствий, убытков или несчастных случаев



Risk classification

Риски бывают чистые и спекулятивные. **Чистый риск** означает, что возможно возникновение лишь потерь (или убытков).

Спекулятивный риск предполагает возможность не только нанесения ущерба, но и получение выгоды. Такие риски характерны для азартных игр (в казино, например) или для биржевых операций.

Таким образом, с математической точки зрения, спекулятивный риск описывается **произвольной случайной величиной**, принимающей как положительные, так и отрицательные значения (тогда абсолютная величина этого отрицательного значения как раз равна величине полученной прибыли).

Чистые риски соответствуют **положительным случайным величинам**.

В свою очередь чистые риски делятся на физические и моральные. **Физические риски** обусловлены прежде всего природными явлениями, такими как землетрясение, наводнение, ураган, извержение вулкана, цунами и др., а также деятельностью человека, например, кризисы или техногенные катастрофы.

Моральный риск вызван нечестным или недобросовестным поведением человека. Чаще всего он возникает в страховании. Например, если сгорает застрахованное на большую сумму предприятие, у владельца которого имеются серьезные материальные трудности, это может означать преднамеренный поджог для получения страховой суммы. **Извлечение выгоды путем нарушения условий контракта** - моральный риск.

- 1 Речь может идти лишь о будущем событии.
- 2 Событие должно быть случайным.
Это означает, что заранее неизвестно, наступит ли рассматриваемое событие или вообще не наступит,

либо неизвестен лишь момент его наступления, хотя достоверно, что рано или поздно оно должно наступить.
- 3 Наконец, осуществление события не должно полностью зависеть от воли застрахованного.

Страхование жизни и не жизни

Разделение всей страховой индустрии на две части: **страхование жизни** (Life insurance) и **страхование не жизни** (Non-life insurance или General insurance), связано с п.2.

Страхование жизни в чем-то проще с математической точки зрения, так как вся случайность сосредоточена в моменте наступления события, а размеры выплат оговорены заранее.

В страховании не жизни (имущественное, гражданская ответственность, медицинское) неизвестен не только момент, когда придется производить выплату, но и ее размер. Более того, может быть, придется платить неоднократно в течение срока действия полиса.

Различие двух ветвей страхования

В первом случае контракты в основном долгосрочные (если речь идет о пожизненном страховании, то продолжительность до 50 лет), во втором контракты заключаются в основном на год.

Момент наступления события в одном случае оказывается собственной случайной величиной, в другом случае несобственной.

В страховании жизни размер выплаты детерминированный (страховая сумма), неясно заранее лишь, когда придется платить. А в страховании не жизни число выплат (страховых событий) случайно, равно как и размеры отдельных выплат.

Различие двух ветвей страхования

Отличаются также и принципы функционирования: в первом случае - это **капитализация** или накопление, во втором - **распределение**.

Здесь и кроется причина законодательного разделения указанных двух типов деятельности.

Наконец, источники риска в страховании жизни - это смертность и процентная ставка, а в страховании не жизни - это процесс поступления требований на выплату возмещений, иначе, исков или претензий (claims process).

Страхование имеет длинную и интересную историю.

Методы **передачи и перераспределения риска** практиковались китайскими и вавилонскими торговцами еще 3 и 2 тысячи лет до нашей эры.

Упомянем Кодекс Хаммурапи, примерно 1750г. до нашей эры.

Первыми были **общества взаимного страхования**, управлявшиеся своими членами, без внешних акционеров.

Затем появились **акционерные компании**.

Первичная задача - удовлетворение претензий застрахованных.

Изучение вероятности разорения

Вторичная задача - выплата дивидендов акционерам.

Математическое ожидание дисконтированных дивидендов до разорения

4 периода в актуарных науках

Почему актуарная наука возникла значительно позже (в 17 веке) можно прочитать в интересной книге **Bernstein, P.L.** *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. John Wiley and Sons, New York (1996)

- **Детерминистический** период (Е. Halley, D. Bernoulli)
- **Стохастический** период (теория коллективного риска)
- **Финансовый** период (инвестиционный аспект страхования)
- **Современный** период (управление корпоративными рисками)

Детерминистический период в актуарных науках

характеризуется появлением в 1693г. **таблиц смертности** E.Haley (его именем названа известная комета Галей) и введением в 1738г. D.Bernoulli **функций полезности**.

Хотя некоторые исследователи утверждают, что идея таблиц смертности принадлежит римскому юристу Ульпиану (Ulpian, 170-228), первые таблицы смертности появились в 17м веке. Они были выпущены John Graunt в 1662г. (некоторые историки приписывают их William Petty, который ввел новый предмет "политическая арифметика") и Johan de Witt, 1671г.

Однако **Эдмунд Галей** был первым, кто описал принципы актуарной математики строго научно.

Детерминистический период: таблицы смертности Е.Хейли 1693г.



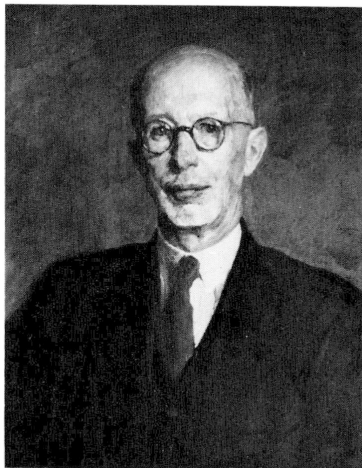
Детерминистический период: функции полезности D.Bernoulli
1738г.



Стохастический период

характеризуется применением теории вероятностей и случайных процессов к решению актуарных проблем. Главное достижение - **теория коллективного риска**, в частности, модель Крамера-Лундберга (Cramér-Lundberg model). Отметим, что широко используемый в практике процесс с независимыми приращениями, **пуассоновский процесс**, впервые был введен в диссертации Лундберга в 1903г. Другой процесс с независимыми приращениями (броуновское движение или винеровский процесс) появился в диссертации Башелье в 1900г. для описания цен финансовых активов. Результаты Ф.Лундберга были объяснены и далее развиты Г.Крамером в 1930х годах. Говорят, что **причина успехов шведских страховых компаний** это внимание к актуарным наукам. В 1929г. специальная кафедра Статистики и Актуарных наук была создана в Стокгольмском университете для Г.Крамера.

Стохастический период: F.Lundberg 1903



FILIP LUNDBERG
Målning av D Tägtström

Стохастический период: Harald Cramer 1930e



Актуарная наука включает ряд взаимосвязанных предметов, таких как математика, теория вероятностей, статистика, финансы, экономика, управление рисками, информатика.

Наука претерпела **революционные изменения за последние 40 лет** в связи с распространением высокоскоростных компьютеров и объединением стохастических актуарных моделей с современной финансовой теорией. Так, **третий период можно назвать финансовым**. Он был очень коротким, не более трех десятилетий.

это то, что влияет на активы, включая процентные ставки, инфляцию, стоимость акций и валютный курс.

Эти риски коррелированы, непрерывны и требуют понимания **стохастического исчисления**, чтобы быть надлежащим образом измеренными.

Как было отмечено, они ведут не только к потерям, но и прибыли.

Методы управления финансовыми рисками - финансовые деривативы, такие как форварды, фьючерсы, опционы и свопы, являются относительно новыми.

Неправильное использование этих методов и вызванные ими финансовые неудачи фактически привели к необходимости **управления корпоративными рисками (ERM)**.

Hans Vahlmann в 1987г. дал классификацию на 3 периода



Paul Embrechts анонсировал четвертый период в 2005г.



Четвертый (современный) период в дополнение к достижениям предыдущих периодов принес развитие менеджмента корпоративных рисков (enterprise risk management). (ERM) Изучение **новых типов риска**: оперативный и стратегический.

Он **характеризуется** сильным взаимодействием страхования и финансов, исследованием сложных систем и использованием передовых математических инструментов.

Вспомним следующие хорошо известные факты:

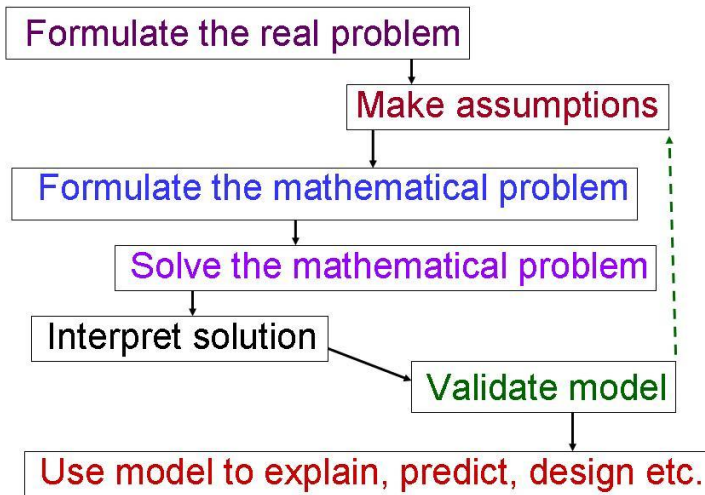
- Для изучения реальных систем или процессов полезно построить математическую модель.
- Существует много моделей, описывающих более или менее точно данную систему.
- Одна и та же модель может описывать процессы, возникающие в различных областях исследования.

Ключевой момент во всех исследованиях, относящихся к принятию решений:

Как выбрать
надлежащую математическую модель?

Обычная процедура выглядит следующим образом

Исследование реальной системы



Области применения теории вероятностей такие как

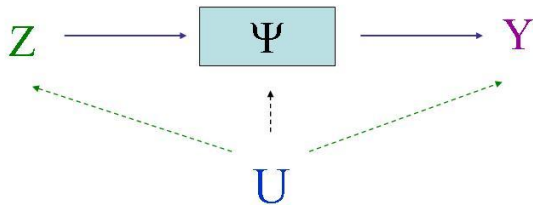
- страхование, теория запасов и водохранилищ, финансы, теория массового обслуживания и надежности и многие другие
- могут рассматриваться как **специальные случаи принятия решений в условиях неопределенности** (или менеджмента рисков), нацеленные на **оптимизацию функционирования системы**.
- Для принятия правильного решения необходима **надлежащая математическая модель**.

Обозначения для модели входа-выхода $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$

- T – горизонт планирования,
- $Z = \{Z(t), t \in [0, T]\}$ – входящий процесс,
- $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$ – выходящий процесс,
- $U = \{U(t), t \in [0, T]\}$ – управление,
- Ψ – конфигурация и способ функционирования системы, $X = \Psi(Z, Y, U)$,
- $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – состояние системы,
- $\mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(Z, Y, U, X, T)$ – **целевая функция** (objective function, target, valuation criterion, risk measure) оценивает качество функционирования системы.

General input-output model

$(Z, Y, U, \Psi, T, \mathcal{L})$



$$X = \Psi(Z, Y, U), \quad \mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(T, Z, Y, U, X)$$

Интерпретация параметров моделей для различных областей

Область исследований.	Вход $Z(t)$	Выход $Y(t)$	Состояние $X(t)$
Страхование	Премии	Выплаты	Резерв
Финансы	Приток денег	Отток денег	Капитал
Запасы	Поставки	Спрос	Уров.запасов
Водохран.	Приток воды	Выпуск	Уров.воды
Надежность	Новые & ремонт.	Полом.	Рабочие
Очереди	элементы	элементы	элементы
	Прибытие клиентов	Обслуж.	Длина очереди
Рост Популяции	Рождение & иммигр.	клиенты Смерть & эмигр.	Размер попул.

- Дискретное или непрерывное время
- Детерминированные, стохастические, смешанные (один процесс детерминированный, другой стохастический)
- Конфигурация, размерность основных процессов
- Известные или неизвестные параметры и распределения
- Множество допустимых управлений (статические или динамические)

- **Стоимостной подход**
Теория запасов, финансы
(оценка потерь или доходов)
- **Без целевой функции**
Очереди, водохранилища
- **Надежностный подход**
Страхование, надежность
(вероятность разорения)

В наши дни целевые функции вводятся в любой области исследования для оптимизации функционирования системы.

Определение

Управление $U_T^* = \{U^*(t), t \in [0, T]\}$ *оптимально*, если

$$\mathcal{L}_T(U_T^*) = \inf_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T),$$

$$(\text{или } \mathcal{L}_T(U_T^*) = \sup_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T)),$$

где \mathcal{U}_T - класс допустимых управлений.

Далее, $U^* = \{U_T^*, T \geq 0\}$ называется *оптимальной политикой* (или стратегией).

Выбор \inf или \sup зависит от решаемой задачи. А именно,

- если мы хотим **минимизировать** потери (или вероятность разорения), используем первое выражение,
- а для **максимизации** дохода или времени жизни системы второе.

Поскольку экстремум может не достигаться, вводится следующее

Определение

Управление U_T^ε ε -оптимально, если

$$\mathcal{L}_T(U_T^\varepsilon) < \inf_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T) + \varepsilon$$

$$(or \quad \mathcal{L}_T(U_T^\varepsilon) > \sup_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T) - \varepsilon).$$

Определение

Политика $\tilde{U} = \{\tilde{U}_T, T \geq 0\}$ стационарна, если для любых $T, S \geq 0$

$$U_T(t) = U_S(t), \quad t \leq \min(T, S).$$

Определение

Политика $\hat{U} = (\hat{U}_T, T \geq 0)$ асимптотически оптимальна, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \mathcal{L}_T(\hat{U}_T) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \mathcal{L}_T(U_T^*).$$

Изменения, необходимые для моделей с дискретным временем, очевидны.

Что полезно знать будущему актуарию?

- Теория вероятностей
- Случайные процессы
- Математическая статистика
- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения
- Теория информации
- Комплексный анализ
- Языки программирования (Python, R и др.)

Математические навыки, согласно CareerCast's 2015 Jobs Rated report, являются решающими в получении лучших рабочих мест. При этом **четыре из первых 10 профессий ориентированы на математику.**

Актуарий, использующий математику, статистику и финансовые теории, чтобы оценить риск осуществления того или иного события, занял **место No. 1 в списке**, перед математиком (No. 3), статистиком (No. 4) и специалистом по обработке данных (data scientist) (No. 6).

Профессия актуарий

А в 2019г. расположение было следующим:

- №. 1 - специалист по обработке данных (114,52\$),
- №. 2 - статистик (84,76),
- №. 3 - профессор университета (76),
- №. 8 - математик (84,76),
- №. 9 - аналитик в области исследования операций (81,39),
- №. 10 - актуарий (101,56).

Выпускники мех-мата, особенно актуарно-финансовой группы, в нашей стране востребованы и получают работу в страховых компаниях, банках и других организациях.

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ