

Экзаменационные вопросы по курсу
“Математическая статистика”
лектор – М.В. Болдин
осенний семестр 2022 г.

1. Теорема Гливенко – Кантелли о сходимости эмпирической функции распределения.
2. Метод подстановки на примерах эмпирических моментов и квантилей.
3. Постановка задачи параметрического оценивания в одномерном случае: статистики, оценки, с.к. риски, несмещенные оценки, с.к. оптимальные оценки.
4. Неравенство Рао – Крамера и эффективные (оптимальные в C_R) оценки.
5. Экспоненциальное семейство, примеры. Теоремы о достаточных и необходимых условиях равенства в неравенстве Рао – Крамера. Примеры эффективных оценок.
6. Задача параметрического оценивания в многомерном случае – с.к. оптимальные (несмещенные с равномерно минимальной ковариационной матрицей) оценки. Неравенство Рао – Крамера в многомерном случае (без док.-ва), эффективные оценки. Случай гауссовской выборки с двумя неизвестными параметрами.
7. Условное математическое ожидание (у.м.о.) случайной величины относительно дискретной сигма-алгебры – мотивация и лемма об эквивалентном определении.
8. Определение у.м.о. случайных величин и векторов относительно произвольных сигма-алгебр, теорема существования и единственности.
9. Основные свойства у.м.о. (все утверждения с доказательствами).
10. Задача оптимального с.к. прогноза в авторегрессии.

11. У.м.о. случайного вектора ξ относительно вектора η , условная вероятность. Условное распределение и условная плотность ξ относительно вектора η .
12. Теорема о вычислении условной плотности и у.м.о. через условную плотность. Примеры.
13. Достаточные статистики: определение, критерий факторизации (док-во для дискретного случая), примеры.
14. Теорема Блекуэлла-Рао-Колмогорова об улучшении несмещенной оценки усреднением по достаточной статистике.
15. Полные статистики. Построение оптимальных оценок с помощью полных достаточных статистик: лемма о решениях уравнения несмещенности и лемма Лемана – Шефаре. Примеры построения с.к. оптимальных оценок для выборок из $Pois(\theta)$, $R(0, \theta)$.
16. Многомерный гауссовский закон – определение и основные свойства (с док-ом).
17. Распределение хи-квадрат Пирсона. Лемма об ортогональных проекциях.
18. Линейная гауссовская модель: оценки наименьших квадратов неизвестных параметров, теорема об их распределениях, независимости и с.к. оптимальности. Пример – гауссовская выборка.
19. Распределения Стьюдента. Доверительное оценивание параметров гауссовской выборки и параметров гауссовской линейной регрессии.
20. Состоятельные и асимптотически нормальные оценки. Теорема Бахадура (без док-ва) и асимптотически эффективные оценки.
21. Лемма об экстремальном свойстве правдоподобия как мотивация к построению оценок максимального правдоподобия. Правдоподобие, логарифмическое правдоподобие, оценки максимального правдоподобия, уравнение правдоподобия.
22. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия.
23. Теорема об асимптотической эффективности состоятельного решения уравнения правдоподобия. Пример гауссовской выборки со средним, лежащим в интервале.
24. Задача проверки параметрических гипотез – основные определения: критерий, уровень значимости, ошибки 1-го и 2-го рода, мощность, равномерно наиболее мощные и наиболее мощные критерии.
25. Лемма Неймана – Пирсона. Оптимальная проверка гипотезы о среднем гауссовской выборки как пример ее применения.

26. Теорема о двойственности задач доверительного оценивания и проверки гипотез. Пример гауссовской выборки – простая гипотеза и двухсторонняя альтернатива.

27. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона для гипотезы о параметрах полиномиального распределения: определение, поведение статистики Пирсона при альтернативах и теорема Пирсона (с доказательством). Пример применения – проверка гипотезы о виде функции распределения.

28. Проверка однородности двух выборок с помощью теста Колмогорова – Смирнова (это 1-ая лекция!): постановка задачи и ее мотивация, тестовая статистика Колмогорова – Смирнова и ее свобода при гипотезе, предельное распределение при гипотезе и поведение при альтернативе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.В. Болдин. Конспект лекций по курсу "Математическая статистика", 2022.
2. А.А. Боровков. Математическая статистика, 4-ое изд., Лань, Спб., 2010.
3. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Математическая статистика, Высшая школа, 1984.
4. Э. Леман. Теория точечного оценивания. М., Наука, 1991.
5. А.Н. Ширяев. Вероятность-1, 5-ое изд. МЦНМО, М., 2011.