ИНФОРМАЦИЯ О СЕМНАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова провела семнадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих Колмогоровских олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (http://new.math.msu.su/department/probab/ns/top).

Олимпиада прошла 16 апреля 2022 г. раздельно для младших (не прошедших еще в полном объеме курс теории вероятностей) и старших курсов. Продолжительность олимпиады составила 5 часов.

В олимпиаде приняли участие 24 студента младших курсов, и 13 студентов старших курсов. Среди участников — студенты ведущих математических факультетов московских университетов.:

- МГУ — 23,
- МФТИ — 6,
- ВШЭ — 8.

Задачи олимпиады

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись “н.о.р.” означает “независимые одинаково распределенные”.

Задача 1. (1-2) Дано множество из n гирь с весами $\{1, ..., n\}$. Из них составляется случайный набор S (каждая гиря берется с вероятностью p, независимо от прочих). Рассмотрим два события: $A = \{$среди S есть три гири, две из которых вместе весят как третья$\}$, $B = \{$в S есть гиря с нечетным весом$\}$. Докажите, что

$$\mathsf{P}(AB) \geq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Задача 2. Имеется N монет, все попарно различного веса. Наугад выберем две, взвесим и оставим более тяжелую; из оставшихся $N-2$ выберем еще одну, сравним с оставшейся при первом взвешивании, и т.д. Пусть после m-го взвешивания ($m < N-1$) оставлена монета A. Найти вероятность, что она окажется тяжелее в $m+1$-м взвешивании.

Задача 3. Пусть $\{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание ($S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_n, n \geq 1\}$ н.о.р., $\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_1 = -1) = 1-p$) и $0 < m \leq n < 2N$. Найти условную ковариацию S_m и S_n при условии $S_{2N} = 0$.

Задача 4. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность одинаково распределенных (возможно, зависимых) случайных величин с конечным математическим ожиданием, и $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $M_n/n \to 0$ п.н. при $n \to \infty$.

Задача 5. Тренер волейбольной команды утверждает, что его команда чаще побеждает, если ее предыдущая встреча тоже была выиграна. Рассмотрим те победы, после которых была одержана победа (их число обозначим Y), среди всех побед кроме последней в турнире (их число обозначим X). Пусть турнир состоит из 5 встреч и команда выигрывает встречу с вероятностью 1/2, независимо от результата прочих игр (т.е. слова тренера неверны). Найти $\mathsf{E}\left(\frac{Y}{X} | X > 0\right)$.

Задача 6. Пусть (X, Y) – гауссовский случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$, где $|r| < 1$. Найти а) $\mathsf{E}\max\{X, Y\}$ б) $\mathsf{D}\max\{X, Y\}$.

Задача 7. Пусть $X_1, \ldots, X_{50}$ — н.о.р. случайные величины с таким распределением: $\mathsf{P}(X_1 = -1) = 1/9, \mathsf{P}(X_1 = -2/5) = 4/9, \mathsf{P}(X_1 = 1/5) = 4/9$. Найти

$$\mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_{50} = -17).$$

Задача 8 (3-6). Пусть случайная величина $X \geq 0$ имеет плотность p, которая непрерывна при $x \geq 0$ и дифференцируема при $x > 0$, причем $p(0) = 0$, $p(x) > 0$ при $x > 0$, $p(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $d(\ln p)/dx$ ограничена снизу при $x > 0$. Доказать, что $X = X_1 + X_2$ по распределению, где X_1 и X_2 независимы и X_1 имеет показательное распределение.

Задача 9 (3-6). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из одномерного нормального распределения с неизвестными параметрами и $s^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$ – оценка дисперсии. Пусть $\mu_k = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^k$, $k \in \{3, 4\}$ – выборочные центральные моменты. Выборочные асимметрия и эксцесс – это статистики μ_3/s^3 и $\mu_4/s^4 - 3$. Доказать, что каждая из них не зависит от s^2.

Задача 10. Источник излучения, расположенный на плоскости в начале координат, при нормальной работе испускает частицы равномерно и независимо одна от другой во всех направлениях. Если же он испорчен, то лучи, по которым летят частицы, концентрируются около одного (неизвестного) направления. Предложить способ определить по наблюдениям, исправен ли источник. Более точно, указать такие функции $f_n(X_1, ..., X_n)$ (где X_i — оставляемые частицами отметки на единичной окружности), что для исправного источника соотношение $f_n \to \xi$ по распределению выполняется, а для любого неисправного нет, причем ξ – известное распределение.

Задача 11 (3-6). Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение. Найти

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathsf{P}(W_s \leq 1, s \leq t).$$

Задача 12. Последовательность случайных величин $X_0, X_1, X_2, \ldots$ такова, что

$$X_0 = X_1 = 1,\ X_{n+1} = |X_n + \varepsilon_n X_{n-1}|,\ n \geq 1,$$

где $\{\varepsilon_n\}$ н.о.р., $\mathsf{P}(\varepsilon_1 = \pm 1) = 1/2$. Найти $\mathsf{P}(\min\limits_{n\geq 1} X_n = 0)$.

Победители среди младших курсов

Первая премия

Мясников К.М.

Студент II курса физтех–школы прикладной математики и информатики МФТИ (6,5 решенных задач).

Вторая премия

Звонков Н.С.

Студент II курса факультета компьютерных наук Высшей школы экономики (5,5 решенных задач).

Третья премия

Куцаков А.С.

Студент II курса факультета компьютерных наук Высшей школы экономики (4,5 решенных задач).

Победители среди старших курсов

Первая премия

Андреев М.В.

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (8,5 решенных задач), научный руководитель — М.В. Житлухин.

Третья премия

Сазонов А.А.

Студент III курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенных задачи), научный руководитель — Ю.М. Кабанов.

Токаева А.А.

Студентка V курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (3 решенных задачи), научный руководитель — Г.И. Фалин.