

## Задачи

1. Лесное хозяйство занимается посадкой и вырубкой леса. Если лес вырубается через  $k$  лет после посадки, то дисконтированная прибыль составит  $\alpha_{k-1}(a - b^k)$ , где  $(a > b, 0 < b < 1)$ . Коэффициент дисконтирования  $\alpha_k = z^k$ , где  $z$  – случайная величина, относительно которой известно, что её распределение сосредоточено на  $[\alpha, \beta]$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ) и имеет среднее значение  $\bar{z}$ . Цель – получение максимальной гарантированной средней прибыли путём вырубки леса. Найти оценку коэффициента эффективности и оптимальную стратегию.
2. Бесконечная модель управления запасами с линейными издержками:  $k$  – стоимость единицы заказа,  $p$  – штраф за единицу дефицита,  $a$  – коэффициент дисконтирования ( $ap > k$ ). Найти оптимальный уровень запасов, если спрос имеет равномерное распределение в отрезке  $[\alpha, \beta]$ .
3. Открытая сеть Джексона с  $N$  узлами;  $\lambda_i$  – интенсивность потока в  $i$ -ый узел,  $\mu_i^{-1}$  – среднее время обслуживания, матрица маршрутов задается соотношением:  $p_{ij} = (1 - \alpha)/N$ , где  $0 < \alpha < 1$ . Найти условие существования стационарного распределения, его вид и среднее время ожидания в каждом узле.

4. Рассмотрите детерминированную модель управления запасами:

- 1) за время  $T$  нужно выдать  $S$  единиц продукции равномерно во времени и  $r = \frac{S}{T}$ ;
- 2) выпуск осуществляется равномерно со скоростью  $p > r$ , так что, если  $Q$  – объём заказанной партии, то время выпуска  $\frac{Q}{p}$ ;
- 3) допускается дефицит.

Издержки:  $C_0$  – стоимость заказа;

$C_u$  – стоимость хранения единицы товара в единицу времени;

$C_d$  – стоимость дефицита единицы товара в единицу времени.

Спрос, неудовлетворённый за прошлый период, постепенно удовлетворяется после осуществления заказа. Найти оптимальный размер заказа  $Q$ .

5. Рассмотрите двухканальную систему массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком интенсивности  $\lambda$  и экспоненциально распределённым обслуживанием на первом приборе с интенсивностью  $\mu_1$ , а на втором  $\mu_2$  ( $\mu_1 > \mu_2$ ). Если в момент поступления требования оба прибора свободны, то оно идёт на первый прибор. Напишите уравнения Колмогорова.
6. Скорость движения машин в автомобильном туннеле не превышает 50 км/час и связана с плотностью потока  $F$  следующим эмпирическим соотношением:

$$F = \frac{v_0 - v}{z} v,$$

где  $v_0 = 60$  км/ч, а  $z$  – случайная величина, которая равномерно распределена в  $[1/2, 1]$ . Регулировка движения в туннеле производится выбором скорости  $v$ . Цель операции – увеличение  $F$ . Составить модель операции. Найти оценку эффективности, если:

- (а) оперирующая сторона разрешает усреднение критерия;
- (б) не разрешает.

Найти оптимальную скорость  $v$ .

7. Динамическая детерминированная модель с двумя уровнями цен. В течение времени  $T$  следует поставить равномерно  $S$  единиц продукции. Дефицит не допускается. Партия товаров

поступает сразу. Издержки:

- 1)  $C_0$  - стоимость заказа;
- 2)  $K(Q)$  - издержки при производстве единицы товара, если объем партии  $Q$  и

$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & \text{при } Q < b \\ K_2 & \text{при } Q \geq b, K_1 > K_2 \end{cases}$$

3)  $p$ -процент - стоимость хранения единицы товара в единицу времени составляет  $p$ -процент от общей стоимости изделия. Цель - минимизировать издержки. Найти оценку критерия эффективности. Описать оптимальное поведение.

8. Фирма выпускает телевизоры и стремится к максимуму их надежности. Телевизор содержит  $N$  последовательно соединенных блоков, так что отказ любого из них приводит к выходу из строя всего телевизора. В конструкцию модели введены избыточные элементы параллельного типа. Пусть  $x_n$  - число избыточных параллельных элементов в  $n$ -м блоке и  $p_n(x_n)$  - вероятность того, что блок будет функционировать в течение года, а  $c_n(x_n)$  - стоимость изготовления такого блока.
  - (а) Постройте модель, максимизирующую надежность функционирования телевизора в течение года, если суммарные издержки на его изготовление не могут превышать  $C$  рублей.
  - (б) Найдите оптимальное решение при  $N = 3, c_n(x) = nx^2, C = 15, p_n(x) = 1 - p_n^x$ , где  $p_1 = 0.08, p_2 = 0.05, p_3 = 0.1$ .
9. Фирма составляет годовой финансовый план на работы, связанные с геологическим поиском месторождений редких металлов. Для поиска фирма располагает  $N$  районами. По оценкам экспертов при затратах  $d_j$  рублей на поисковые работы в районе  $j$  вероятность обнаружения ценных минералов равна  $p_j(d_j)$ . В случае успешного завершения поиска доход, который можно получить в результате эксплуатации,  $\xi_j$  - случайная величина с плотностью распределения  $p_j(v)$ . Постройте модель операции, при этом исходите из того, что суммарные затраты не должны превысить  $D$  рублей, а цель-максимизация средней прибыли.
10. Задача принятия решения фирмой заключается в определении оптимального размера заказываемой партии. Всего требуется  $N$  деталей. Из числа заказанных часть может оказаться неисправной, и  $p_x(j)$  - вероятность того, что из партии в  $x$  деталей  $j$  окажутся неисправными. Если число неисправных деталей оказалось меньше требуемого, то вновь осуществляется заказ. Пусть  $c$  - цена одной детали, приобретаемой по заказу  $v$  - цена одной детали, оказавшейся в избытке ( $c > v$ ),  $K$  - затраты, связанные с оформлением заказа. Построить модель динамического программирования с целью минимизации ожидаемых суммарных затрат на полное удовлетворение потребностей фирмы в деталях.
11. В разборке гостиницы участвуют два экскаватора, которые грузят части здания на грузовые машины, отправляющиеся затем на свалку и возвращающиеся назад. Считая, что время погрузки имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ , а время возвращения машины также экспоненциально распределено с параметром  $\lambda$ , построить модель, позволяющую определить оптимальное число машин  $m$  с целью минимизации средних издержек. При этом  $c_1$  - стоимость простоя экскаватора в единицу времени, а  $c_2$  - стоимость простоя машины.
12. Предприятие производит продукцию в течение  $T$  отрезков времени. В начале  $t$ -го отрезка производится продукция в объеме  $x_t$ . Спрос  $y_t$  в  $t$ -м отрезке в его начале неизвестен, но известно, что  $d_t \leq y_t \leq D_t$  ( $d_t, D_t$  - границы спроса). Спрос  $y_t$  удовлетворяется в начале  $t$ -го отрезка, а вся нереализованная продукция (в том числе и в предшествующие моменты времени) хранится на складе. Пусть  $\alpha$  - стоимость единицы произведенной продукции,  $\beta$  -

стоимость хранения одной единицы в единицу времени,  $\gamma$  - плата за единицу недоданной продукции и  $i_0$  - начальный запас на складе. Цель предприятия - разработать план выпуска  $x_t$  ( $t = 1, T$ ), чтобы суммарные издержки были наименьшими. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии при  $\gamma = 0$ .

13. Специализированному автомобильному магазину нужно сбыть в течение  $T$  последних дней года оставшиеся  $N$  автомобилями старой марки. Если в  $t$ -й день цена на автомобили назначена  $r$  долларов, то с вероятностью  $p_t(s, r)$  ( $s = 0, 1, \dots, N$ ) будет продано  $s$  автомашин. Если в конце  $T$ -го дня часть машин не будет продана, то магазин продаст оставшиеся автомобили по цене  $v$  долларов. Постройте модель динамического программирования, позволяющую установить цены на автомобили в каждый из дней рассматриваемого периода так, чтобы ожидаемый доход от  $N$  оставшихся машин был максимальным.
14. С целью экономии расходов на междугородние телефонные переговоры фирма решила арендовать три линии междугородней телефонной связи (МГТС), чтобы ее работники из подразделений в разных городах могли вести между собой необходимые деловые переговоры. Стоимость аренды одной линии МГТС составляет  $C$  руб/час. Частота возникновения использования линии  $\lambda = 10$  вызовов в час (пуассоновский поток), а длительность переговоров имеют показательное распределение со средним 15 минут. Пусть  $\omega$  - стоимость минуты ожидания работником соединения с абонентом. Пусть  $C = 1$ . Определите диапазон значений  $\omega$ , при которых решение арендовать ровно три линии МГТС будет оптимальным с точки зрения средних издержек.