Лекции 1–4. Вязкопластические среды: принцип виртуальных мощностей, вариационная задача.

1 Уравнения движения.

Пусть ρ — плотность сплошной среды, $v = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ — скорость, σ_{ij} — тензор напряжения, $f = (f_1,\, f_2,\, f_3)$ — внешние массовые силы.

Напомним, что из закона сохранения массы было получено уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам происходит суммирование), а из закона сохранения количества движения — уравнения

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_\alpha - \sigma_{i\alpha})}{\partial x_\alpha} = f_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.1}$$

Обозначим $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

Предположим, что сплошная среда несжимаема, то есть $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Тогда $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$. Отсюда и из (1.1) получаем *уравнение Эйлера*

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = f_i. \tag{1.2}$$

Предположим также, что $\sigma_{i\alpha} = \sigma_{\alpha i}$.

Пусть при каждом $t \in \mathbb{R}$ сплошная среда занимает область Ω_t, а поля скоростей v принадлежат аффинному пространству U_t (например, U_t — множество гладких векторных полей с нулевой дивергенцией, удовлетворяющих граничному условию $v|_{\partial\Omega_t} = \varphi_t$). Тогда вариации скоростей принадлежат некоторому линейному пространству H_t.

Рассмотрим произвольное $h(\cdot,\, t) \in H_t$, умножим (1.2) скалярно на $h(x,\, t)$ и проинтегрируем по Ω_t:

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i \, dx - \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} h_i \, dx = \int\limits_{\Omega_t} f_i h_i \, dx.$$

Обозначим

$$h_{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} \right), \quad P = (\sigma_{i\alpha}).$$

Применяя формулу Стокса, получаем

$$-\int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} h_i \, dx = \int\limits_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} \frac{\partial h_i}{\partial x_\alpha} \, dx - \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma_{i\alpha} h_i) \, dx = \int\limits_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} h_{i\alpha} \, dx - \int\limits_{\partial\Omega_t} Ph \, dS.$$

Значит,

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i\,dx + \int\limits_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} h_{i\alpha}\,dx = \int\limits_{\Omega_t} f_i h_i\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_t} Ph\,dS. \tag{1.3}$$

Это соотношение называется *принципом виртуальных мощностей.*

Девиатором матрицы $M = (M_{ij})_{i,j=1}^n$ назовем матрицу $\tilde{M} = M - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} M)I$, где I — единичная матрица. Заметим, что $\operatorname{tr}\tilde{M} = 0$.

В силу условия несжимаемости, в соотношении (1.3) тензор напряжений σ_{ij} может быть заменен на его девиатор τ_{ij}:

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i\,dx + \int\limits_{\Omega_t} \tau_{i\alpha} h_{i\alpha}\,dx = \int\limits_{\Omega_t} f_i h_i\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_t} Ph\,dS. \tag{1.4}$$

Поскольку матрицы $h_{i\alpha}$ и $\tau_{i\alpha}$ симметричны и имеют нулевой след, то они имеют пять независимых элементов, соответствующих $1 \leqslant i \leqslant \alpha \leqslant 3$, $(i,\,\alpha) \neq (3,\,3)$.

Тензором скоростей деформаций называется матрица $(e_{ij}(v))$,

$$e_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Обозначим $e_v = (e_{ij}(v))_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3,\,(i,j)\neq(3,3)}$. Тогда существует и единственна вектор-функция $s(x) = (s_{ij}(x))_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3,\,(i,j)\neq(3,3)}$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega_t} \tau_{ij} h_{ij}\,dx = \int\limits_{\Omega_t} s(x)\cdot e_h(x)\,dx.$$

В этих обозначениях (1.4) приобретает вид

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i\,dx + \int\limits_{\Omega_t} s(x)\cdot e_h(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_t} f\cdot h\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_t} Ph\,dS. \tag{1.5}$$

Для замыкания системы уравнений движений нужна связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации. В зависимости от вида этой связи получаются различные модели сплошной среды.

Обозначим 2^X совокупность всех подмножеств множества X.

Сплошная среда называется *вязкой однородной средой*, если она несжимаема и задана связь между вектор-функцией $s(x)$ и тензором скоростей деформаций с помощью некоторого многозначного отображения: $s(x) \in A(e_v(x))$ (см. [1]).

Многозначное отображение A должно быть таким, чтобы соотношение (1.5) было однозначно разрешимо относительно v в области Ω_t. Оказывается, что для этого достаточно, чтобы отображение A было монотонным (т.н. *постулат Друкера*).

Определение 1.1. *Отображение $A : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ называется монотонным, если для любых $x,\,y \in \mathbb{R}^n$, $u \in A(x)$, $v \in A(y)$ выполнено $\langle u - v,\, x - y\rangle \geqslant 0$.*

Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Построим по ней отображение

$$A(x) = [f(x-0),\, f(x+0)].$$

Нетрудно проверить, что это отображение монотонное.

Чтобы получить теорему единственности, сначала докажем два вспомогательных утверждения.

Предложение 1. *Пусть g^t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на $\mathbb{R}^n$, порождаемое уравнением $\dot{x} = v(x, t)$, $J(\xi, t)$ — якобиан отображения $x \mapsto g^t x$. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) = J(\xi, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(g^t \xi, t). \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть t, $\Delta t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\tilde{g}^{\Delta t}$, сопоставляющее точке η решение уравнения $\frac{dx}{d\tau} = v(x, t + \tau)$ с начальными условиями $x|_{\tau=0} = \eta$, $\tilde{J}(\eta, \Delta t)$ — его якобиан в точке η. Тогда $g^{t+\Delta t} = \tilde{g}^{\Delta t} \circ g^t$. Применив теорему о производной композиции и формулу для определителя произведения матриц, получаем

$$J(\xi, t + \Delta t) = \tilde{J}(g^t \xi, \Delta t) J(\xi, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) = J(\xi, t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tilde{J}(g^t \xi, \Delta t) - 1}{\Delta t}.$$

Тем самым, для доказательства (1.6) достаточно рассмотреть $t = 0$. Пусть матрица Якоби отображения g^t в точке ξ имеет вид $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Заметим, что при $t = 0$ это единичная матрица.

По определению, $J(t, \xi) = \sum\limits_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n \alpha_{i,\pi(i)}(t)$, где S_n — группа перестановок n элементов. Имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i,\pi(i)}(t) \right) \Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \alpha_{j,\pi(j)}(0) \right) \alpha'_{i,\pi(i)}(0).$$

Если перестановка π не является тождественной, то хотя бы для двух значений j выполнено $\pi(j) \neq j$, и сумма равна 0. Если π — тождественная, то сумма равна $\sum\limits_{i=1}^n \alpha'_{ii}(0)$. Переставив порядок дифференцирования по t и по ξ_i и воспользовавшись дифференциальным уравнением, получаем, что $\alpha'_{ii}(0) = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i}(\xi, 0)$. □

Предложение 2. *Пусть g^t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на $\mathbb{R}^n$, порождаемое уравнением $\dot{x} = v(x, t)$, $\Omega_t = g^t \Omega$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда*

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} f(x, t)\, dx = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, dx + \int\limits_{\partial \Omega_t} f(x, t) v(x, t)\, dS.$$

Доказательство. Пусть $J(\xi, t)$ — якобиан отображения $x \mapsto g^t x$. Воспользуемся формулой замены переменной под знаком интеграла, равенством (1.6) и формулой Стокса:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} f(x, t)\, dx = \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} f(g^t \xi, t) J(\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(g^t \xi, t) J(\xi, t)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} f(g^t \xi, t) v_i(g^t \xi, t) J(\xi, t)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} f(g^t \xi, t) J(\xi, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(g^t \xi, t)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, dx + \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(x, t) v_i(x, t) \right)\, dx = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, dx + \int\limits_{\partial \Omega_t} f(x, t) v(x, t)\, dS.$$

□

Теорема 1.1. *Пусть $A : \mathbb{R}^5 \to 2^{\mathbb{R}^5}$ — монотонное многозначное отображение, $\rho \equiv$ const, v — гладкое решение задачи (1.5), Ω_t — область, задаваемая этим решением. Пусть w — другое решение задачи (1.5) в Ω_t с граничными условиями $w|_{t=0} = v|_{t=0}$, $w|_{\partial \Omega_t} = v|_{\partial \Omega_t}$. Тогда $w = v$.*

Доказательство. Пусть $h = v - w$. Вычтем друг из друга равенства (1.5) для v и для w и получим

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt}\right) h\, dx + \int\limits_{\Omega_t} (s(e_v) - s(e_w)) e_h\, dx = 0.$$

В силу монотонности отображения A и равенства $h_{i\alpha} = e_{i\alpha}(v) - e_{i\alpha}(w)$,

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt}\right) h\, dx \leqslant 0,$$

т.е.

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial t} - h_i \frac{\partial w_i}{\partial t} + h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j\right) dx = \int\limits_{\Omega_t} \rho \left(\frac{1}{2}\frac{\partial |h|^2}{\partial t} + h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j\right) dx \leqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства. Имеем

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j\right) dx = \int\limits_{\Omega_t} \rho \left(h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} w_j \frac{\partial |h|^2}{\partial x_j}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} \rho \left(h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial (|h|^2 w_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{2}|h|^2 \frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right) dx = \int\limits_{\Omega_t} \rho h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx,$$

поскольку $h|_{\partial\Omega_t} = 0$ и $\frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0$. В силу предложения 2,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{|h|^2}{2}\, dx = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\rho}{2}\frac{\partial |h|^2}{\partial t}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_t} \frac{\rho |h|^2}{2} v\, dS = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\rho}{2}\frac{\partial |h|^2}{\partial t}\, dx.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} \rho \frac{|h|^2}{2}\, dx \leqslant -\int\limits_{\Omega_t} \rho h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx;$$

поэтому в силу ограниченности функций $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ и неравенства Гельдера

$$F(x,\, t) := \int\limits_{\Omega_t} |h(x,\, t)|^2\, dx \leqslant c \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\tau} |h(x,\, \tau)|^2\, dx\, d\tau,$$

т.е. $F(x,\, t) \leqslant c \int\limits_0^t F(x,\, \tau)\, d\tau$. Значит, $F(x,\, t) \equiv 0$. □

2 Субдифференциал выпуклой функции.

Известно, что если выпуклая функция на прямой дифференцируема, то ее производная возрастает. Для произвольных выпуклых функций на $\mathbb{R}^n$ можно построить монотонное многозначное отображение, которое можно рассматривать как обобщение производной.

Определение 2.1. *Пусть X — нормированное пространство, X^* — его сопряженное, $f : X \to \mathbb{R}$. Субдифференциалом функции f в точке $x_0 \in X$ называется множество*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : \forall h \in X \;\; f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant \langle x^*,\, h\rangle\}.$$

Геометрический смысл: функционал $x^* \in X^*$ принадлежит субдифференциалу, если надграфик функции f всюду лежит не ниже, чем гиперплоскость, задаваемая уравнением $u = f(x_0) + \langle x^*, x - x_0\rangle$. Это геометрическое соображение и теорема отделимости позволяют доказать

Предложение 3. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, непрерывная в точке x_0. Тогда $\partial f(x_0) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Так как функция f непрерывна в точке x_0, то внутренность множества

$$\operatorname{epi} f = \{(x, u) \in X \times \mathbb{R} : u \geqslant f(x)\}$$

непуста. Применим теорему отделимости к множествам $\operatorname{epi} f$ и $\{(x_0, f(x_0))\}$. Напомним, что линейные непрерывные функционалы на $X \times \mathbb{R}$ имеют вид $(x, u) \mapsto \langle x^*, x\rangle + \alpha u$, где $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, найдутся $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\langle x^*, x_0\rangle + \alpha f(x_0) \leqslant \langle x^*, x\rangle + \alpha u, \quad x \in X, \quad u \geqslant f(x).$$

Если $\alpha < 0$, то подставим $x = x_0$, устремим $u \to +\infty$ и получим противоречие. Если $\alpha = 0$, то получаем, что для любого $x \in X$ выполнено $\langle x^*, x - x_0\rangle \geqslant 0$, откуда $x^* = 0$. Поэтому $\alpha > 0$ и можно считать, что $\alpha = 1$. Подставляя $u = f(x)$, получаем

$$\langle x^*, x_0\rangle + f(x_0) \leqslant \langle x^*, x\rangle + f(x),$$

т.е. $-x^* \in \partial f(x_0)$. □

Аналогично, применяя конечномерную теорему отделимости, получаем

Предложение 4. *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла, то $\partial f(x_0) \neq \varnothing$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Из определения следует, что субдифференциал функции в точке является выпуклым замкнутым множеством.

Предложение 5. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывная функция. Тогда отображение $x \mapsto f(x)$ монотонно.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1^* \in \partial f(x_1)$, $x_2^* \in \partial f(x_2)$. Тогда

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + \langle x_1^*, x_2 - x_1\rangle, \quad f(x_1) \geqslant f(x_2) + \langle x_2^*, x_1 - x_2\rangle.$$

Сложив эти неравенства, получаем $0 \geqslant \langle x_1^* - x_2^*, x_2 - x_1\rangle$, а это и означает монотонность отображения. □

Непосредственным следствием определения субдифференциала является аналог теоремы Ферма:

Теорема 2.1. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда*

$$x_0 \text{ — точка минимума } f \;\Leftrightarrow\; 0 \in \partial f(x_0).$$

Предложение 6. *Пусть выпуклая функция f дифференцируема по Гато в точке x_0. Тогда $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

Доказательство. Пусть $x^* \in \partial f(x_0)$. Тогда x_0 является точкой минимума функции $g(x) = f(x) - \langle x^*, x\rangle$. По теореме Ферма, $g'(x_0) = 0$, т.е. $x^* = f'(x_0)$. Покажем теперь, что $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$, т.е. что x_0 — точка минимума $\tilde g(x) = f(x) - \langle f'(x_0), x\rangle$. В самом деле, $\tilde g'(x_0) = 0$. Если $\tilde g(x) < \tilde g(x_0)$ для некоторого $x \in X$, то для любого $t \in [0, 1]$ в силу выпуклости $\tilde g$

$$\tilde g(x_0+t(x-x_0))-\tilde g(x_0) \leqslant t(\tilde g(x)-\tilde g(x_0)), \text{ т.е. } \lim_{t\to 0} \frac{\tilde g(x_0+t(x-x_0))-\tilde g(x_0)}{t} \leqslant \tilde g(x)-\tilde g(x_0) < 0$$

и $\tilde g'(x_0) \neq 0$. □

Упражнение. Найти субдифференциал евклидовой нормы в каждой точке.

Теорема 2.2. (теорема Моро–Рокафеллара.) *Пусть $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ — выпуклые функции, f_1 непрерывна в x_0 и $\partial f_2(x_0) \neq \varnothing$. Тогда*

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

Доказательство. В случае, когда f_2 является аффинной функцией, утверждение сразу следует из определения.

Докажем включение $\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \subset \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. В самом деле, если $x_i^* \in \partial f_i(x_0)$, $i = 1, 2$, то для любого $x \in X$

$$f_1(x) \geqslant f_1(x_0) + \langle x_1^*, x - x_0\rangle, \quad f_2(x) \geqslant f_2(x_0) + \langle x_2^*, x - x_0\rangle.$$

Сложив эти два неравенства, получим, что $x_1^* + x_2^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$.

Докажем обратное включение. Сначала проверим, что если $0 \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$, то найдется функционал $x_0^* \in X^*$ такой, что $x_0^* \in \partial f_1(x_0)$, $-x_0^* \in \partial f_2(x_0)$ (тогда $0 \in \partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0)$). Без ограничения общности можно считать, что $f_1(x_0)+f_2(x_0) = 0$. Из определения субдифференциала следует, что для любого $x \in X$ выполнено $f_1(x) + f_2(x) \geqslant 0$, т.е. $f_1(x) \geqslant -f_2(x)$.

Рассмотрим в $X \times \mathbb{R}$ два множества:

$$A = \{(x, u) : u > f_1(x)\}, \quad B = \{(x, u) : u \leqslant -f_2(x)\}.$$

Эти множества выпуклы и не пересекаются. Так как функция f_1 непрерывна в точке x_0, то A имеет непустую внутренность. Значит, по теореме отделимости, найдутся $x^* \in X^*$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любых $(x, u) \in A$, $(y, v) \in B$ выполнено

$$\langle x^*, x\rangle + \alpha u \geqslant \langle x^*, y\rangle + \alpha v.$$

Так же, как при доказательстве непустоты субдифференциала, получаем, что $\alpha > 0$ и можно считать, что $\alpha = 1$. Подставляя $y = x_0$, $u = f(x)+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $v = -f_2(x_0) = f_1(x_0)$ и устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что $-x^* \in \partial f_1(x_0)$. Подставляя $v = -f_2(y)$, $x = x_0$, $u = f_1(x_0) + \varepsilon = -f_2(x_0) + \varepsilon$ и устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что $x^* \in \partial f_2(x_0)$.

(Геометрически доказательство означает следующее: если взять надграфик функции f_1 и подграфик функции $-f_2$, то они соприкасаются в точке $(x_0, f_2(x_0))$; проводим в ней разделяющую гиперплоскость, которая задается как график аффинной функции, а эта функция определяет искомый линейный функционал.)

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. Положим $\tilde f_1(x) = f_1(x) - \langle x^*, x\rangle$. Тогда $0 \in \partial(\tilde f_1 + f_2)(x_0)$ и, в силу доказанного, $0 \in \partial \tilde f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$, т.е. $x^* \in \{x^*\} + \partial \tilde f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$. □

Предложение 7. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $g : X\times Y \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x)$, $(x_0, y_0) \in X\times Y$. Тогда $\partial g(x_0, y_0) = \partial f(x_0) \times \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, $(x^*, y^*) \in \partial g(x_0, y_0)$. Тогда для любых $x \in X$, $y \in Y$

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle + \langle y^*, y - y_0 \rangle,$$

т.е.

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle + \langle y^*, y - y_0 \rangle.$$

Подставив $x = x_0$, получаем $\langle y^*, y - y_0 \rangle \leqslant 0$, $y \in Y$, так что $y^* = 0$. Значит, $x^* \in \partial f(x_0)$ и $\partial g(x_0, y_0) \subset \partial f(x_0) \times \{0\}$. Обратное включение тривиально. □

Предложение 8. *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла, то f непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдется функционал $x^* \in \partial f(x_0)$. Значит, для любого $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, h \rangle. \tag{2.1}$$

Теперь покажем, что $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \delta(h)$, где $\delta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если $n = 1$, то это легко следует из определения выпуклости. Рассмотрим общий случай. Пусть e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — базисные векторы в $\mathbb{R}^n$. Выберем $t > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $f(x_0 \pm te_i) - f(x_0) \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $h = t \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - t \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) = 1$. В силу выпуклости f,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i f(x_0 + te_i) + \mu_i f(x_0 - te_i)) - f(x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_i (f(x_0 + te_i) - f(x_0)) + \mu_i (f(x_0 - te_i) - f(x_0))\right] \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) получаем непрерывность f. □

3 Вязкопластические однородные среды.

Вязкопластической однородной средой называется однородная вязкая среда, в которой связь $s \in A(e)$ имеет вид $s \in \partial\varphi(e)$, где φ — выпуклая функция переменных $e = (e_{ij})$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(e) \geqslant \gamma|e|$ для некоторого $\gamma > 0$ и любого e.

Функция φ называется *диссипативным потенциалом.*

Если функция φ является положительно-однородной степени 1 (т.е. $\varphi(\lambda e) = \lambda\varphi(e)$, $\lambda \geqslant 0$), то среда называется *жесткопластической.*

Множество $\Sigma = \partial\varphi(0)$ выпукло, замкнуто, ограничено и имеет непустую внутренность. Если $s \notin \Sigma$ и $s \in \partial\varphi(e)$, то $e \neq 0$ (т.е. происходит деформация среды). Если s — внутренняя точка Σ и $s \in \partial\varphi(e)$, то $e = 0$. В самом деле, пусть $e \neq 0$. В силу монотонности отображения $e \mapsto \partial\varphi(e)$, для любого $\tilde{s} \in \Sigma$ выполнено $\langle s - \tilde{s}, e \rangle \geqslant 0$. Так как Σ содержит окрестность нуля, то $\langle s, e \rangle > 0$. Подставив $\tilde{s} = \lambda s$, где $\lambda > 1$, получим противоречие.

Граница множества Σ называется *поверхностью текучести*, уравнение границы этого множества называется *условием текучести.* Физический смысл: если нагрузка на среду мала ($s \in \operatorname{int}\Sigma$), то движения среды не происходит, т.е. $e = 0$; если s выходит за пределы множества Σ, то происходит движение.

Обычно используются условия текучести Мизеса и Треска. Условие текучести Мизеса имеет вид $s_{ij}s_{ij} = 2k^2$, условие текучести Треска —

$$\max\{|s_1 - s_2|, |s_2 - s_3|, |s_3 - s_1|\} = 2k,$$

где s_1, s_2, s_3 — собственные значения s_{ij}.

4 Стационарные медленные движения и вариационный принцип.

Напомним, что $e_v = (e_{ij}(v))_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3,\,(i,j)\neq(3,3)}$, где $e_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ (т.е. это вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^5$).

В случае стационарных медленных движений $\frac{dv_i}{dt} = 0$ (в силу стационарности, $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$, а поскольку скорости малы, то слагаемым $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$ мы пренебрегаем), и принцип виртуальных мощностей (1.5) приобретает вид

$$\int\limits_{\Omega} s \cdot e_h\,dx = \int\limits_{\Omega} fh\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} Ph\,dS, \tag{4.1}$$

где $s \cdot e_h = s_{i\alpha} h_{i\alpha}$, $fh = f_i h_i$. Предположим, что среда является однородной вязкопластической средой, т.е.

$$s \in \partial\varphi(e_v), \tag{4.2}$$

где φ — диссипативный потенциал. Будем считать, что φ имеет порядок роста не выше степенного, т.е. что существует такое $p > 1$, что $\overline{\lim}_{|e|\to\infty} \frac{\varphi(e)}{|e|^p} < \infty$.

Упражнение. Показать, что в этом случае функционал $\Phi_*(e) := \int\limits_{\Omega} \varphi(e)\,dx$ непрерывен на $L_p(\Omega,\,\mathbb{R}^5)$.

Рассмотрим функционал

$$J(v) := \int\limits_{\Omega} \varphi(e_v)\,dx - \int\limits_{\Omega} fv\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Pv\,dS \tag{4.3}$$

и разобьем его на два слагаемых: $J(v) = \Phi(v) + L(v)$, где

$$\Phi(v) = \Phi_*(e_v) = \int\limits_{\Omega} \varphi(e_v)\,dx, \quad L(v) = -\int\limits_{\Omega} fv\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Pv\,dS.$$

Нужно естественным образом задать пространство W_0, на котором будем рассматривать J. В ряде случаев его можно определить аналогично тому, как определялось пространство Соболева.

Пусть E — банахово пространство, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $L_p(\Omega) \subset E \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и соответствующие операторы вложения непрерывны (на $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ рассматривается топология пространства обобщенных функций $D'(\Omega)$).

2. если $e(\cdot) \in E$, то $e(\cdot)\chi_G(\cdot) \in E$ для любого измеримого подмножества $G \subset \Omega$ (χ_G — характеристическая функция множества G);

3. если $e(\cdot) \in E$, $\Omega_n = \{x \in \Omega : |e(x)| \leqslant n\}$, то $e(\cdot)\chi_{\Omega_n}(\cdot) \to e(\cdot)$ в пространстве E;

4. функционал Φ_* непрерывен на E^5.

В частности, такому условию удовлетворяет пространство $L_p(\Omega)$, однако его не всегда удобно рассматривать, поскольку может оказаться, что не выполнены условия теоремы существования. Поэтому иногда требуются пространства более общего вида (например, *пространства Орлича*; см. [2]). Соответствующие модели вязкопластических сред рассмотрены в книге [3].

Пусть V — банахово пространство, непрерывно вложенное в $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Положим

$$W = \left\{ v \in V : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in E \right\}$$

с нормой $\|v\|_W = \|v\|_V + \sum\limits_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_E$. Предполагается, что функционал L непрерывен на W.

Пример. Если $E = L_p(\Omega)$, $V = L_p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, то $W = W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Точно так же, как для пространства Соболева, доказывается, что пространство W полно: если последовательность $\{v^n\}$ фундаментальна в W, то в силу полноты V и E найдутся функции $v \in V$ и $w_{ij} \in E$ такие, что $v^n \overset{V}{\to} v$ и $\frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} \overset{E}{\to} w_{ij}$ при $n \to \infty$. Так как V непрерывно вложено в $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, то отсюда следует, что $w_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (производные в обобщенном смысле).

Считаем, что функционал J задан на некотором замкнутом подпространстве $W_0 \subset W$. (Например, если $W = W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, то в качестве W_0 часто рассматривается $\mathring{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ или подпространство векторнозначных функций с нулевой дивергенцией и нулевыми граничными условиями.)

Теорема 4.1. *Функция $v \in W_0$ удовлетворяет соотношениям (4.1), (4.2) тогда и только тогда, когда она является точкой минимума функционала J на пространстве W_0.*

Обозначим $p' = \frac{p}{p-1}$.

Лемма 4.1. *Линейный функционал F принадлежит $\partial\Phi(v)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $s \in L_{p'}(\Omega, \mathbb{R}^5)$ такая, что*

$$\langle F, u \rangle = \int\limits_\Omega s \cdot e_u \, dx, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_\Omega [\varphi(e_v(x) + h(x)) - \varphi(e_v(x)) - s(x)h(x)] \, dx \geqslant 0 \text{ для любого } h \in E^5. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть s удовлетворяет (4.4) и (4.5). Достаточно проверить, что функционал F непрерывен. Выберем $\delta > 0$ так, что для любого $h \in E^5$, $\|h\|_{E^5} < \delta$, выполнено $|\Phi_*(e_v + h) - \Phi_*(e_v)| < 1$. Из (4.4) и (4.5) получаем, что $|\langle F, u\rangle| \leqslant 1$ при $\|e_u\|_{E^5} < \delta$ (а значит, и при $\|u\|_W < \delta$).

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим функционал $\Psi : E^9 \times V \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3}, \{\omega_{ij}\}_{1 \leqslant i < j \leqslant 3}, w) = \int\limits_\Omega \varphi\left(\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3,\, (i,j) \neq (3,3)}\right) dx.$$

Легко видеть, что он выпуклый; в силу свойства 4 пространства E, он непрерывен.

Обозначим $\omega_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$.

Определим оператор вложения $I : W_0 \to E^9 \times V$ по формуле

$$I(u) = (\{e_{ij}(u)\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3}, \{\omega_{ij}(u)\}_{1 \leqslant i < j \leqslant 3}, u)$$

и функционал $\tilde{F} : I(W_0) \to \mathbb{R}$ по формуле $\langle \tilde{F}, I(u) \rangle = \langle F, u \rangle$. Тогда $\Phi(u) = \Psi(I(u))$.

Покажем, что $\tilde{F}$ можно продолжить до функционала $\Lambda \in \partial\Psi(I(v))$. Идея доказательства такая же, как в теореме о непустоте субдифференциала. Рассмотрим в $E^9 \times V \times \mathbb{R}$ два выпуклых множества: $A = \operatorname{epi}\Psi$ и

$$B = \{(I(u),\, \Phi(v) + \langle F,\, u - v\rangle) : u \in W_0\}.$$

Так как функционал Ψ непрерывен и $s \in \partial\Phi(v)$, то к этим множествам можно применить теорему отделимости. Соответствующая гиперплоскость порождается искомым линейным непрерывным функционалом.

Так как $\Lambda \in (E^9 \times V)^*$, то найдутся $\sigma^*_{ij} \in E^*$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, $\tau^*_{ij} \in E^*$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $v^* \in V^*$ такие, что

$$\langle \Lambda,\, (\{e_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3},\, \{\omega_{ij}\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3},\, u)\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} \langle \sigma^*_{ij},\, e_{ij}\rangle + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \langle \tau^*_{ij},\, \omega_{ij}\rangle + \langle v^*,\, u\rangle.$$

Поскольку Ψ не зависит явно от e_{33}, u и ω_{ij}, а $\Lambda \in \partial\Psi(I(v))$, то $\sigma^*_{33} = 0$, $u^* = 0$ и $\tau^*_{ij} = 0$. Остается найти вид функционалов $\sigma^* \in E^*$. Вспомним, что $L_p(\Omega)$ непрерывно вложено в E (см. свойство 1). Рассмотрим ограничение σ^* на $L_p(\Omega)$ и получим, что найдется функция $\rho \in L_{p'}(\Omega)$ такая, что

$$\langle \sigma^*,\, e\rangle = \int_\Omega \rho e\, dx, \quad e \in L_p(\Omega).$$

Пусть $e \in E$. В силу свойства 2 пространства E, можно считать, что $\rho e \geqslant 0$. Из свойства 3 получаем, что $e\chi_{\Omega_n} \underset{n\to\infty}{\to} e$ в пространстве E, поэтому

$$\int_{\Omega_n} \rho e\, dx = \langle \sigma^*,\, e\chi_{\Omega_n}\rangle \to \langle \sigma^*,\, e\rangle.$$

С другой стороны, $\int_{\Omega_n} \rho e\, dx \to \int_\Omega \rho e\, dx$, так что $\langle \sigma^*,\, e\rangle = \int_\Omega \rho e\, dx$ для любого $e \in E$. $\square$

Нам понадобится понятие измеримого многозначного отображения и теорема Куратовского – Рылль-Нардзевского об измеримой выборке.

Отображение $Z : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n}$ назовем измеримым, если для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ множество $\{x \in \Omega : Z(x) \cap U \neq \varnothing\}$ измеримо.

Лемма 4.2. (теорема Куратовского – Рылль-Нардзевского). *Пусть $Z : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n}$ — измеримое многозначное отображение и для любого $x \in \Omega$ множество $Z(x)$ замкнуто, $K = \{x \in \Omega : Z(x) \neq \varnothing\}$. Тогда существует измеримая функция $h : K \to \mathbb{R}^n$ такая, что $h(x) \in Z(x)$ для любого $x \in \Omega$.*

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим счетное покрытие $\mathbb{R}^n$ открытыми шарами $B_{m,i}$ радиуса 2^{-m}. Определим множества $A_{m,i_1,\dots,i_m} \subset \Omega$ индукцией по m. Пусть $m = 1$. Положим $\tilde{A}_{1,i} = \{x \in \Omega : B_{1,i} \cap Z(x) \neq \varnothing\}$, $A_{1,i} = \tilde{A}_{1,i} \setminus \cup_{j=1}^{i-1} \tilde{A}_{1,j}$. Эти множества измеримы и $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_{1,i} = K$. Пусть построены измеримые непересекающиеся множества $A_{m,i_1,\dots,i_m} \subset A_{m-1,i_1,\dots,i_{m-1}}$ такие, что $\cup_{i_1,\dots,i_m\in\mathbb{N}} A_{m,i_1,\dots,i_m} = K$ и для любого $x \in A_{m,i_1,\dots,i_m}$ выполнено $Z(x) \cap (\cap_{k=1}^m B_{k,i_k}) \neq \varnothing$. Положим

$$\tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} = \left\{x \in A_{m,i_1,\dots,i_m} : Z(x) \cap \left(\cap_{k=1}^{m+1} B_{k,i_k}\right) \neq \varnothing\right\},$$

$$A_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} = \tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} \setminus \left(\cup_{j=1}^{i_{m+1}-1} \tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_m,j}\right).$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$ такого, что $A_{m,i_1,\ldots,i_m} \neq \varnothing$, выберем $y_{m,i_1,\ldots,i_m} \in \cap_{k=1}^{m} B_{k,i_k}$. Положим

$$h_m(x) = \begin{cases} y_{m,i_1,\ldots,i_m}, & x \in A_{m,i_1,\ldots,i_m}, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Последовательность $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится. В самом деле, пусть $x \in K$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $x \in A_{m,i_1,\ldots,i_m}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$. Поэтому $h_m(x) \in B_{m,i_m}$ и $h_{m+1}(x) \in B_{m,i_m}$, так что $|h_m(x) - h_{m+1}(x)| \leqslant 2^{-m+1}$.

Пусть $h(x) = \lim\limits_{m\to\infty} h_m(x)$. Функция h измерима и $h(x) \in Z(x)$ для любого $x \in K$, поскольку $\operatorname{dist}(h_m(x), Z(x)) \leqslant 2^{-m+1}$. □

Доказательство теоремы 4.1. Функция v является точкой минимума функционала $J(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial J(v)$. По теореме Моро–Рокафеллара, $\partial J(v) = \partial\Phi(v) + \partial L(v)$. Так как функционал L линейный, то $\partial L(v) = \{L'(v)\}$,

$$\langle L'(v), h\rangle = -\int\limits_{\Omega} fh\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Ph\,dS.$$

По лемме 4.1, $F \in \partial\Phi(v)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $s \in L_{p'}(\Omega, \mathbb{R}^6)$, для которой выполнены соотношения (4.4) и (4.5).

Покажем, что

$$(4.5) \;\Leftrightarrow\; s(x) \in \partial\varphi(e_v(x)) \text{ п.в.}$$

Достаточно доказать импликацию “$\Leftarrow$”. Сначала проверим, что для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение

$$\overline{Z}_\varepsilon : x \mapsto \overline{Z_\varepsilon(x)}, \text{ где } Z_\varepsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^5 : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z - \varepsilon\},$$

измеримо. В самом деле, пусть $U \subset \mathbb{R}^5$ — открытое множество. Так как функция φ непрерывна, то множество $Z_\varepsilon(x)$ открыто для любого x. Значит, $U \cap \overline{Z}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}^5 \cap U \cap Z_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, т.е.

$$\{x \in \Omega : U \cap \overline{Z}_\varepsilon(x) \neq \varnothing\} = \cup_{z\in\mathbb{Q}^5\cap U}\{x \in \Omega : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z - \varepsilon\},$$

а это множество измеримо. В частности, множество $K_\varepsilon = \{x \in \Omega : \overline{Z}_\varepsilon(x) \neq \varnothing\}$ измеримо. Пусть $\operatorname{mes} K_\varepsilon > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. По теореме Куратовского – Рылль-Нардзевского, существует измеримая функция $h : K_\varepsilon \to \mathbb{R}^5$ такая, что $h(x) \in \overline{Z}_\varepsilon(x)$ для любого $x \in K_\varepsilon$. Положим

$$h_M(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \in K_\varepsilon, \ |h(x)| \leqslant M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для достаточно большого $M > 0$

$$\int\limits_{\Omega} [\varphi(e_v(x) + h_M(x)) - \varphi(e_v(x)) - s(x)h_M(x)]\,dx < 0.$$

Итак, $0 \in \partial J(v)$ равносильно включению

$$0 \in \{\Lambda_s : \ s(x) \in \partial\varphi(e_v(x)) \text{ п.в.}\},$$

где

$$\langle \Lambda_s, h\rangle = \int\limits_{\Omega} s(x)\cdot e_h(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} fh\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} Ph\,dS,$$

а это и означает (4.1). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Механика жесткопластических сред”. М.: Наука, 1981.

[2] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.

[3] M. Fuchs, G. Seregin, *Variation Methods for Problems from Plasticity Theory and for Generalized Newtonian Fluids*. Springer, 2000.