УДК 519.6, 517.9

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ШИРОКОГО КЛАССА ОБЛАСТЕЙ

Д. А. Силаев

Введение

На плоскости рассматривается ограниченная область Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$. Предполагается, что граница задана параметрически

$$\gamma : \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), t \in [\alpha, \beta],$$

где $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbf{C}^{1+\varepsilon}$ – заданные периодические функции, т.е. $\tilde{x}(\alpha) = \tilde{x}(\beta)$, $\tilde{y}(\alpha) = \tilde{y}(\beta)$, первые производные функций $\tilde{x}, \tilde{y}$ удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon \geq 0$.

В области Ω рассматривается гладкая функция $f \in \mathbf{C}^6(\Omega)$, т.е. она имеет непрерывные ограниченные шестые частные производные.

В работе предлагается метод построения квадратурной формулы шестого порядка аппроксимации

$$\left(\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k)\right) + O(h^6) \qquad (0.1)$$

где c_k – веса, P_k – узлы квадратурной формулы для достаточно широкого класса областей Ω с границей γ.

В основу построения положена аппроксимация на плоскости гладкой функции $f(x, y)$ полулокальным сглаживающим сплайном или S-сплайном класса $\mathbf{C}^2$, состоящим из полиномов пятой степени. Здесь k – номер полинома, составляющего сплайн, отвечающего точке P_k, а c_k – интеграл по области Ω от указанного полинома. Проблема, с которой мы здесь сталкиваемся, состоит из двух моментов. Во-первых, как унифицировать вычисление большого числа таких интегралов по заданной области. Во-вторых, как с большой степенью точности учесть вид границы области Ω. Здесь мы эти проблемы решаем, сводя с помощью формулы Грина интеграл по области Ω к соответствующему интегралу по границе области $\gamma = \partial\Omega$. Подобный подход возможен и для построения кубатурных формул.

1. Одномерный S-сплайн класса $\mathbf{C}^2$.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/K$ — шаг сетки. Разобьём отрезок $[a, b]$ на группы, для этого введём на $[a, b]$ ещё одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh, m \in N$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке $[0, H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$. Обозначим

$$P_S^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени n (в дальнейшем $n = 5$) с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2. Рассмотрим функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2$$

В классе P_S^n ищется такой полином, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \longrightarrow \min(a_2, a_3, a_5)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g_{l-1}'(H), a_2^l = \frac{1}{2} g_{l-1}''(H) \text{ при } l = 0, 1, \ldots, L - 1. \quad (1.1)$$

В случае периодического $S-$сплайна здесь при $l = 0$ выполнено $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$. Так как $a_0^l = g_l(0), a_1^l = g_l'(0), a_l^2 = \frac{g_l''(0)}{2}$, то условия (1.1) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае коэффициенты a_0^0, a_1^0, a_2^0 задаются начальными условиями $y_0, y_0', \frac{y_0''}{2}$[1]. Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно, будем предполагать, что если функция $f \in \mathbf{C}^6[a, b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a + kh, k = 0, 1, \ldots, K$ своими значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^6$. Здесь L – число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции или число полиномов,составляющих сплайн. Кроме того, здесь $M + 1$ – количество точек осреднения, $m + 1$ – количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l – точка привязки полинома g_l, $M - m + 1$ – число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \geq m + 1$.

Определение 1. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на каждом отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам a_3, a_4, a_5. Для этого продифференцируем $\Phi^l(g)$ по этим коэффициентам и полученные производные приравняем к нулю. Получим

$$\left\{ \begin{array}{c} a_3^l h^3 S_6 + a_4^l h^4 S_7 + a_5^l h^5 S_8 = c_1^l, \\ a_3^l h^3 S_7 + a_4^l h^4 S_8 + a_5^l h^5 S_9 = c_2^l, \\ a_3^l h^3 S_8 + a_4^l h^4 S_9 + a_5^l h^5 S_{10} = c_3^l. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Здесь

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^{M} \left[(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2) k^{j+2} \right]. \quad (1.5)$$

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов S-сплайна, состоит из уравнений двух видов: а) уравнений склейки для

[1] В случае если функция задана таблицей, то y_0', y_0'', можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,

$$y_0' = -\frac{1}{60h} [147y_0 - 360y_1 + 450y_2 - 400y_3 + 225y_4 - 72y_5 + 10y_6] + o(h^5), \quad (1.2)$$

$$y_0'' = \frac{1}{180h^2} [812y_0 - 3132y_1 + 5265y_2 - 5080y_3 + 2970y_4 - 972y_5 + 137y_6] + o(h^4). \quad (1.3)$$

каждой пары последовательных полиномов (1.1); б) уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при нулевой, первой и второй степенях. Сделаем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0,1,2,3$. При этом уравнения а) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + m^2\tilde{a}_2^{l-1} + m^3\tilde{a}_3^{l-1} + m^4\tilde{a}_4^{l-1} + m^5\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m\tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2\tilde{a}_3^{l-1} + 4m^3\tilde{a}_4^{l-1} + 5m^4\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \\ \tilde{a}_2^{l-1} + 3m\tilde{a}_3^{l-1} + 6m^2\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^3\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_2^l. \end{cases} \tag{1.6}$$

Уравнения б) из системы(1.4) имеют вид:

$$\begin{cases} S_3\tilde{a}_0^l + S_4\tilde{a}_1^l + S_5\tilde{a}_2^l + S_6\tilde{a}_3^l + S_7\tilde{a}_4^l + S_8\tilde{a}_5^l = P_1^l, \\ S_4\tilde{a}_0^l + S_5\tilde{a}_1^l + S_6\tilde{a}_2^l + S_7\tilde{a}_3^l + S_8\tilde{a}_4^l + S_9\tilde{a}_5^l = P_2^l, \\ S_5\tilde{a}_0^l + S_6\tilde{a}_1^l + S_7\tilde{a}_2^l + S_8\tilde{a}_3^l + S_9\tilde{a}_4^l + S_{10}\tilde{a}_5^l = P_3^l, \end{cases} \tag{1.7}$$

где

$$P_j^l = \sum_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{j+2}. \tag{1.8}$$

Здесь $l = 0, \ldots, L-1$ – номер полинома, причем если $l = 0$, то в периодическом случае выражение $\tilde{a}^{l-1}$ означает $\tilde{a}^{L-1}$. Перенося в уравнениях (1.6) $\tilde{a}_0^l, \tilde{a}_1^l, \tilde{a}_2^l$ в левую часть, получим в итоге систему уравнений для определения всех коэффициентов полиномов, составляющих периодический S-сплайн. В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать волну над переменными a_k^l.

Запишем полученную систему в матричной форме. Для этого обозначим

$$A_1 = \begin{Vmatrix} S_3 & S_4 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \\ S_5 & S_6 & S_7 \end{Vmatrix}, A_2 = \begin{Vmatrix} S_6 & S_7 & S_8 \\ S_7 & S_8 & S_9 \\ S_8 & S_9 & S_{10} \end{Vmatrix}, B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, B_2 = \begin{Vmatrix} m^3 & m^4 & m^5 \\ 3m^2 & 4m^3 & 5m^4 \\ 3m & 6m^2 & 10m^3 \end{Vmatrix}.$$

Кроме того, пусть

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ P_3^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ a_2^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_3^l \\ a_4^l \\ a_5^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \ldots, L-1. \tag{1.9}$$

Тогда систему уравнений для определения коэффициентов периодического S-сплайна можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & -E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ 0 \\ P^1 \\ 0 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Матрицу этой системы обозначим G. Здесь $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ – единичная и нулевая матрицы. Отличие аналогичной системы для непериодического S-сплайна, рассмотренного в работе [2], заключается в замене первой строки на стартовые условия, которые можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} X^0 \ = Y^0, \text{ где } Y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ hy_0' \\ \frac{1}{2}h^2 y_0'' \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

В работе [2] показано, что при $M \geq 3$ существует A_2^{-1} (см. также [3]–[5]). Система (1.10) распадается на систему для нахождения $X^{2l}, \quad l = 0, 1, \dots, L-1$ вида

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \dots & 0 & U \\ U & -E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & U & -E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 A_2^{-1} P^{L-1} \\ -B_2 A_2^{-1} P^0 \\ -B_2 A_2^{-1} P^1 \\ \vdots \\ -B_2 A_2^{-1} P^{L-2} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

и уравнения для нахождения X^{2l+1} вида

$$A_2 X^{2l+1} = P^l - A_1 X^{2l}, \quad l = 0, 1, \dots, L-1 \quad . \tag{1.13}$$

Обратим внимание, что получающаяся в результате таких преобразований матрица $U = B_1 - B_2 A_2^{-1} A_1$. Введём обозначения:

$$T_{ijk} = det \begin{Vmatrix} S_i & S_j & S_k \\ S_{i+1} & S_{j+1} & S_{k+1} \\ S_{i+2} & S_{j+2} & S_{k+2} \end{Vmatrix}, \quad t_{ijk} = T_{ijk}/det(A_2). \tag{1.14}$$

Заметим, что $det(A_2) = T_{678}$. Тогда

$$A_2^{-1} A_1 = \begin{Vmatrix} t_{378} & t_{478} & t_{578} \\ t_{638} & t_{648} & t_{658} \\ t_{673} & t_{674} & t_{675} \end{Vmatrix}$$

и элементы матрицы U будут иметь вид

$$\begin{gathered} u_{11} = 1 - t_{378} m^3 - t_{638} m^4 - t_{673} m^5, \quad u_{12} = m - t_{478} m^3 - t_{648} m^4 - t_{674} m^5, \\ u_{13} = m^2 - t_{578} m^3 - t_{658} m^4 - t_{675} m^5, \quad u_{21} = -3 t_{378} m^2 - 4 t_{638} m^3 - 5 t_{673} m^4, \\ u_{22} = 1 - 3 t_{478} m^2 - 4 t_{648} m^3 - 5 t_{674} m^4, \quad u_{23} = 2m - 3 t_{578} m^2 - 4 t_{658} m^3 - 5 t_{675} m^4, \\ u_{31} = -3 t_{378} m - 6 t_{638} m^2 - 10 t_{673} m^3, \quad u_{32} = -3 t_{478} m - 6 t_{648} m^2 - 10 t_{674} m^3, \\ u_{33} = 1 - 3 t_{578} m - 6 t_{658} m^2 - 10 t_{675} m^3 \quad . \end{gathered} \tag{1.15}$$

Легко заметить, что $u_{2,j} = \frac{\partial}{\partial m}(u_{1j}), \quad u_{3,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial m^2}(u_{1j}), \quad j = 1, 2, 3.$

Доказаны следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. *Пусть числа m и $M \geq 3$ таковы, что собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L – число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh$, h=(b-a)/K, существует и единствен периодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему (1.12). Умножим 1-ю строку системы на матрицу U и сложим со 2-й строкой, полученную 2-ю строку умножим на матрицу U и сложим с 3-й и т.д. Поменяем знаки. Тогда получим следующую систему:

$$
\begin{pmatrix}
E & 0 & \dots & 0 & \dots & -U \\
0 & E & \dots & 0 & \dots & -U^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & E & \dots & -U^l \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & E-U^L
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X^0 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{2(l-1)} \\ \vdots \\ X^{2(L-1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{(l-1)} \\ \vdots \\ D_{(L-1)}
\end{pmatrix}, \tag{1.16}
$$

где

$$
D_0 = B_2 A_2^{-1} P^{L-1}, \quad D_l = \sum_{j=0}^{l-1} U^j B_2 A_2^{-1} P^{l-1-j} - U^l B_2 A_2^{-1} P^{L-1}, \quad l = 0, 1, \dots, L-1.
$$

По условию теоремы $det(E-U^L) \neq 0$ и $X^{2(L-1)} = (E-U^L)^{-1} D_{L-1}, \quad X^{2l} = D_l + U^{l+1} X^{2(L-1)}$. Тогда из (1.13) $\quad X^{2l+1} = A_2^{-1}(P_l - A_1 X^{2l}) \quad$ при $\quad l = 0, 1, \dots, L-1$. Тем самым все коэффициенты периодического $S-$сплайна найдены.

Т е о р е м а 2. *Пусть периодическая функция $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть выполнены предположения $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^{6+\varepsilon}, \varepsilon \geq 0$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн $S^5_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S^5_{m,M}(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x \in [a,b]$ справедливы оценки:*

$$
\left| f^{(p)} - \frac{d^P}{dx^p} S^5_{m,M}(x) \right| \leq C_p h^{6-p}, \tag{1.17}
$$

$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad$ *для* $x \neq \xi_l$; $\quad$ *при* $p = 3, 4, 5 \quad \varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + 0)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\zeta = m/M\zeta_*$. Тогда при достаточно малых m и больших M собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы.*

Это условие устойчивости S-сплайнов аналогично условию устойчивости для кубического случая [1], [4]. Для случая малых значений M (при $3 \leq M \leq 20$ в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Оказалось, что при $\zeta = m/M\zeta_* < 1$ все собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $max|\lambda_i|$ и аппроксимация $S-$сплайнами устойчива, представлены в таблице.

Собственные числа матрицы U

M	m	λ_1	λ_2	λ_3	$max\lvert\lambda_i\rvert$	m/M
4	2	-0,008	-0,231-0,131i	-0,231+0,131i	0,265	0,25
5	3	$-0,005$	$-0,0549-0,201i$	$-0,0549+0,201i$	$0,207$	$0,60$
6	2	$0,0266$	$-0,285-0,129i$	$-0,285+0,129i$	$0,312$	$0,33$
6	3	$-0,008$	$-0,263-0,0463i$	$-0,263+0,0463i$	$0,266$	$0,50$
7	2	$0,0732$	$-0,167-0,305i$	$-0,167+0,305i$	$0,347$	$0,285$
7	4	$-0,0069$	$-0,0737-0,214i$	$-0,0737+0,214i$	$0,226$	$0,571$
7	6	$0,00218$	$0,116-0,207i$	$0,116+0,207i$	$0,237$	$0,857$
8	4	$-0,0079$	$-0,265-0,031i$	$-0,265+0,031i$	$0,266$	$0,50$
8	5	$-0,00403$	$0,101-0,178i$	$0,101+0,178i$	$0,204$	$0,625$
8	7	$0,00180$	$-0,0466-0,229i$	$-0,0466+0,229i$	$0,233$	$0,875$
9	5	$-0,00734$	$-0,124-0,201i$	$-0,124+0,201i$	$0,235$	$0,555$
9	8	$0,00134$	$-0,205-0,118i$	$-0,205+0,118i$	$0,236$	$0,888$
10	5	$-0,0078$	$-0,263-0,0407i$	$-0,263+0,0407i$	$0,266$	$0,50$
10	6	$-0,0055$	$-0,0182-0,213i$	$-0,0182+0,213i$	$0,213$	$0,60$
11	7	$-0,00322$	$0,141-0,147i$	$0,141+0,147i$	$0,203$	$0,636$

Аналогичные теоремы доказаны и для непериодического случая.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ *и пусть* $|y_k - f(x_k)| \le Ch^{6+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. *Пусть выполнены предположения* $|y_0' - f'(x_0)| \le Ch^{5+\varepsilon}$, $|y_0'' - f''(x_0)| \le Ch^{4+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. *Пусть, кроме того, собственные числа матрицы* U *по модулю меньше единицы. Тогда сплайн* $S^5_{m,M}(x)$ *с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е.* $S^5_{m,M}(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$*) и для* $x \in [a,b]$ *справедливы оценки:*

$$\left| f^{(p)} - \frac{d^p}{dx^p} S^5_{m,M}(x) \right| \le C_p h^{6-p}, \tag{1.18}$$

$p = 0,1,2,3,4,5$ *для* $x \ne \xi_l$; *при* $p = 3,4,5$ $\varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + 0)$.

2. Фундаментальный S-сплайн .

Фундаментальный S-сплайн $B_j(x)$ – это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbf{R^{K+1}}$ и $y_0' \in \mathbf{R}, y_0'' \in \mathbf{R}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,\ldots,K\}$, δ_{ij} – символ Кронекера. Легко видеть, что линейная комбинация

$$S(x) = \sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x)$$

является S-сплайном, приближающим данные $\{y_i, i = 0,1,\ldots,K\}$. Заметим, что непериодические фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями y_0', y_0'', принимающими значения 0 или 1.

3. Двумерный полулокальный сглаживающий сплайн класса $\mathbf{C}^2$.

3.1 Построение $\varphi - r - S$-сплайна на круге.

Будем рассматривать на единичном круге полярные сетки:

$$\{\varphi_i = ih_1, i = 0,1,\ldots,K_1\}, \{\Phi_k = kH_1, k = 0,1,\ldots,L_1\}, H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi,$$

$$\{r_j = jh_2, j = 0,1,\ldots,K_2\}, \{R_l = lH_2, l = 0,1,\ldots,L_2\}, H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2, K_2 h_2 = 1.$$

Будем строить аппроксимацию функции $f(\varphi, r)$ на круге при условии, что функция f имеет 6 производных по переменным r и φ, то есть $f \in \mathbf{C}^6[0,1] \times [0,2\pi]$. Пусть $\{y_{ij} = f(\varphi_i, r_j), \quad i = 0,1,\ldots,K_1, \quad j = 0,1,\ldots,K_2\}$ – значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. При каждом $j = 0,1,\ldots,K_2$ построим периодический S-сплайн $S_j(\varphi)$ на отрезке $[0,2\pi]$ по заданным $\{y_{ij}, \quad i = 0,1,\ldots,K_1\}$. Каждый из этих сплайнов аппроксимирует функцию $f(\varphi, r_j)$ на окружности с радиусом r_j, причем в силу теоремы 2 о сходимости

$$\left| S_j^{(p)}(\varphi) - \frac{\partial^p}{d\varphi^p} f(\varphi, r_j) \right| \le Ch_1^{6-p}, \quad p = 0,1,2,3,4,5 \quad , \varphi \in [0,2\pi].$$

Далее фиксируем произвольное $\widetilde{\varphi} \in [0,2\pi]$. Рассмотрим набор $\{z_j = S_j(\widetilde{\varphi}), \quad j = 1,\ldots,K_2, z_0 = y_{00}\}$. Также обозначим через z_0', z_0'' – значения, получаемые по некоторому алгоритму по набору $\{z_j\}$, которые приближают $f_r'(\widetilde{\varphi}, r)|_{r=0}, f_{rr}''(\widetilde{\varphi}, r)|_{r=0}$ с пятым и четвёртым порядками соответственно (например, с помощью формул (1.2) и (1.3)) . По набору $\{z_j\}$ и z_0', z_0'' строим $S_{\widetilde{\varphi}}(r)$ – непериодический S-сплайн на отрезке $[0,1]$. Будем считать, что

$m_2 < M_2\zeta_*$. Это гарантирует, что собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда, построенный для $\widetilde{\varphi}$ сплайн $S_{\widetilde{\varphi}}(r)$, будет аппроксимировать функцию $f(\widetilde{\varphi}, r)$ при $r \in [0, 1]$.

Определение 2. Назовём $\varphi - r$- сплайном назовем функцию $S(\varphi, r)$, значение которой при любых φ и r определяется по следующему алгоритму: по набору $\{z_j = S_j(\varphi), \quad j = 1, \ldots, K_2, \quad z_0 = y_{00}\}, z_0', z_0''$ строим $S_\varphi(r)$, затем полагаем $S(\varphi, r) = S_\varphi(r)$, иначе $S(\varphi, r) = \{S_\varphi(r) | \{z_j = S_j(\varphi), \quad j = 1, \ldots, K_2, \quad z_0 = y_{00}\}\}$.

Очевидно, что этот сплайн можно дифференцировать по r 5 раз в любой точке, не принадлежащей сетке, то есть $r \neq R_j$. При $r = R_j$ определим производную следующим образом:

$$\frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r+0), \quad p = 0, 1, \ldots, 5.$$

Определение 3. Назовём производной порядка q по φ от $\varphi - r$- сплайна $q = 0, 1, \ldots, 5$ функцию $\frac{\partial^q}{\partial \varphi^q} S(\varphi, r)$ на единичном круге, которая равна $\varphi - r$- сплайну, построенному по набору $\{z_j = \frac{d^q}{d\varphi^q} S_j(\varphi), \quad j = 1, \ldots, K_2, z_0 = 0\}$.

Как и в случае с производной по r, под производной по φ в точках $\varphi = \Phi_k$ понимается значение в точке $\varphi = \Phi_k + 0$. Наконец, можно ввести понятие смешанной производной:

Определение 4. Под смешанной производной $\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial \varphi^q} S(\varphi, r)$ понимается производная порядка p по r от производной порядка q по φ от $S(\varphi, r)$, где производные трактуются согласно определениям 2 и 3.

3.2 Сходимость $\varphi - r - S$-сплайна .

Обозначим $h = max(h_1, h_2)$.

Теорема 5. *Пусть* $m_1 < M_1\zeta_*, \quad m_2 < M_2\zeta_*$ *и* $\quad f \in \mathbf{C}^6[0, 2\pi] \times [0, 1]$. *Тогда для* $\varphi - r$*-сплайна* $S(\varphi, r)$ *справедливы оценки:*

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial \varphi^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial \varphi^q} f(\varphi, r) \right| \leq C_{pq} h^{6-p-q}, \quad \textit{где } p, q \geq 0, \quad 0 \leq p + q \leq 5. \tag{3.1}$$

Аналогично можно ввести понятие и $r - \varphi$-сплайна.

3.3 Получение S-сплайна на круге как явной функции двух переменных.

Будем обозначать фундаментальные сплайны по φ как $C_i(\varphi)$, а фундаментальные сплайны по аргументу r как $D_j(r)$.

$$S(\varphi, r) = \{S_\varphi(r) | \{z_j = S_j(\varphi), \quad j = 1, \ldots, K_2, z_0 = y_{00}\}\} = S_\varphi(r)$$

В свою очередь

$$S_\varphi(r) = \sum_{j=0}^{K_2} z_j D_j(r) = \sum_{j=0}^{K_2} D_j(r) \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \tag{3.2}$$

Предпоследнее равенство следует из определения набора $\{z_j = S_j(\varphi)\}$ и разложения по фундаментальным сплайнам

$$S_j(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi).$$

Теперь рассмотрим укрупнённую сетку на окружности $\{\Phi_k = kH_1, \quad k = 0, 1, \ldots, L_1\}$, где $H_1 = m_1 h_1$ и $\{R_l = lH_2, \quad l = 0, 1, \ldots, L_2\}$, где $H_2 = m_2 h_2$. Рассмотрим вид S-сплайна в некотором произвольном секторе этой сетки: $\varphi = kH_1 + \widetilde{\varphi}, \quad r = lH_2 + \widetilde{r}$, где $|\widetilde{\varphi}| \le H_1$ и $|\widetilde{r}| \le H_2$. В этом секторе фундаментальные S-сплайны согласно определению представляются в виде полиномов пятой степени:

$$C_i(\varphi) = \sum_{p=0}^{5} c^i_{pk}\widetilde{\varphi}^p, \quad D_j(r) = \sum_{q=0}^{5} d^j_{ql}\widetilde{r}^q.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.2) для функции $S(\varphi, r)$ и меняя порядок суммирования, получим:

$$S(\varphi, r) = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\sum_{p=0}^{5} c^i_{pk}\widetilde{\varphi}^p \sum_{q=0}^{5} d^j_{ql}\widetilde{r}^q = \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5}\widetilde{\varphi}^p\widetilde{r}^q(\sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}c^i_{pk}d^j_{ql}) = \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5} a^{kl}_{pq}\widetilde{\varphi}^p\widetilde{r}^q.$$

Таким образом, показано, что на каждом произвольном секторе функция $S(\varphi, r)$ представляет полином пятой степени вида

$$S(\varphi, r) = \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5} a^{kl}_{pq}\widetilde{\varphi}^p\widetilde{r}^q, \quad \text{где} \quad a^{kl}_{pq} = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}c^i_{pk}d^j_{ql}, \tag{3.3}$$

или сплайн-функцию двух переменных (см. [12],[3]). Заметим, что в выражения для коэффициетов a^{kl}_{pq} входят значения всех y_{ij}, содержащихся в круге. Аналогичные выражения можно получить для всех многомерных областей, представляющих собой тензорные произведения одномерных, например, для прямоугольника и тора.

Представление сплайна на круге в виде разложения по одномерным фундаментальным сплайнам (3.2) позволяет определить понятие смешанной производной для двумерного сплайна.

О п р е д е л е н и е 5. Под смешанной производной двумерного сплайна $\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial\varphi^q}S(\varphi, r)$, где $0 \le p + q \le 5$, понимается следующая конечная сумма

$$\sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\frac{d^p}{d\varphi^p}C_i(\varphi)\frac{d^q}{dr^q}D_j(r),$$

состоящая из формальных производных от соответствующих фундаментальных сплайнов по φ и r.

Эту формулу можно рассматривать как формулу численного дифференцирования, основанную на приближении двумерной функции полулокальным сглаживающим сплайном.

Всё то же самое верно и для $r - \varphi$-сплайна.

3.4 Получение квадратурных формул для одномерных интегралов.

Подставим выражение S-сплайна через фундаментальные сплайны в интеграл:

$$\int\limits_A^B S(x)dx = \int\limits_A^B \sum_{i=0}^{K} y_i C_i(x)dx = \sum_{i=0}^{K} c_i y_i, \tag{3.4}$$

где

$$c_i = \int\limits_A^B C_i(x)dx = \sum_{n=0}^{L_1-1}\sum_{p=0}^{5} a^{in}_p \frac{H^{p+1}}{p+1}$$

– искомые коэффициенты квадратуры. Здесь a^{in}_p – p-й коэффициент n-го полинома в i-м фундаментальном сплайне (т.е. построенном по набору данных $\{y_k = \delta_{ik}, \quad k = 0, 1, \ldots, K\}$, где δ_{ki}– символ Кронекера). Эти формулы имеют 6-й порядок аппроксимации.

3.5 Получение квадратурных формул для двумерных интегралов на круге K.

Подставим в интеграл по единичному кругу выражение $\varphi - r$-сплайна в виде (3.2):

$$\iint\limits_K S(\varphi,r)d\Omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 S(\varphi,r)rdrd\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\int\limits_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi \int\limits_0^1 D_j(r)rdr$$

Отсюда получаем:

$$\iint\limits_K S(\varphi,r)d\Omega = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c_i d_j y_{ij}, \tag{3.5}$$

где

$$c_i = \int\limits_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi = \sum_{n=0}^{L_1-1}\sum_{p=0}^{5} a_p^{in}\frac{H_1^{p+1}}{p+1},$$

$$d_j = \int\limits_0^1 D_j(r)rdr = \sum_{s=0}^{L_2+1}\int\limits_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} rD_j(r)dr = \sum_{s=0}^{L_2+1}\int\limits_0^{H_2}(u+\xi_s)\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}u^q du =$$

$$= \sum_{s=0}^{L_2+1}\int\limits_0^{H_2}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}(u^{q+1}+sH_2u^q)du = \sum_{s=0}^{L_2+1}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}H_2^{q+2}\left(\frac{1}{q+2}+\frac{s}{q+1}\right)$$

Здесь a_p^{in} и b_q^{js} – p-й и q-й коэффициенты n-го и s-го полиномов в i-м и j-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0,2\pi]$ и неперидическом сплайне на отрезке $[0,1]$. Здесь $H_1 = 2\pi/L_1$, фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{ik}, \quad k = 0,1,\dots,K_1\}$; $H_2 = 1/L_2$, непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk}, \quad k = 0,1,\dots,K_2; y_0', y_0''\}$, где δ_{ki}– символ Кронекера, y_0', y_0'' принимают значения либо 0, либо 1.

3.6 Квадратурные формулы для двумерных односвязных областей.

На плоскости рассматривается ограниченная область Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$, где γ – замкнутая самонепересекающаяся кусочно-гладкая кривая. Предполагается, что граница задана параметрически: $\{\gamma = \{\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t)\}, t \in [\alpha,\beta]\}$, где $\widetilde{x},\widetilde{y} \in \mathbf{C}^{1+\varepsilon}$ – заданные периодические функции, т.е. $\widetilde{x}(\alpha) = \widetilde{x}(\beta), \widetilde{y}(\alpha) = \widetilde{y}(\beta)$, первые производные функций $\widetilde{x},\widetilde{y}$ удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon > 0$ (быть может за исключением отдельных точек). В области Ω рассматривается гладкая функция $f \in \mathbf{C}^6(\Omega)$.

Построение аппроксимирующей сетки будем производить следующим образом. Поместим область Ω в круг K радиуса R и введем полярную систему координат, связанную с центром круга. Будем рассматривать в круге радиуса R полярные сетки:

$$\{\varphi_i = ih_1, i = 0,1,\dots,K_1\}, \{\Phi_k = kH_1, k = 0,1,\dots,L_1\},$$
$$\{r_j = jh_2, j = 0,1,\dots,K_2\}, \{R_l = lH_2, l = 0,1,\dots,L_2\}, \tag{3.6}$$
$$H_1 = m_1h_1, K_1 = m_1L_1, K_1h_1 = 2\pi, H_2 = m_2h_2, K_2 = m_2L_2, K_2h_2 = R.$$

Будем предполагать, что функция f продолжена в круг радиуса R с сохранением гладкости. Будем считать, что задана гладкая функция $u(\varphi,r) \in \mathbf{C}^6(K)$, которая совпадает с функцией f в области Ω. Пусть $u_{ij} = u(\varphi_i,r_j)$ – сужение функции u на равномерную сетку (3.6). По таблице значений u_{ij} строим полулокальный сглаживающий сплайн $S(\varphi, r)$, состоящий из полиномов пятой степени, например, $r-\varphi$-сплайн, определенный на всем круге K. Из оценки (3.1) следует, что S аппроксимирует функцию f с порядком $O(h^6)$, где $h = max(h_1, h_2)$ в области Ω. Подставим в интеграл по области Ω выражение для $r-\varphi$-сплайна в виде :

$$\iint\limits_{\Omega} S(\varphi, r)d\Omega = \iint\limits_{\Omega} S(\varphi, r)rdrd\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c^{ij}y_{ij}, \tag{3.7}$$

где

$$c^{ij} = \iint\limits_{\Omega} C_i(\varphi)D_j(r)rdrd\varphi \tag{3.8}$$

Заметим, что выражение в (3.9), стоящее под знаком интеграла есть произведение функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, что весьма существенно. Применять формулы типа (3.5) становится неудобно, так как граница γ будет проходить внутри части секторов (см. п. 3.3). Произведём универсализацию вычисления интегралов в (3.9). Для их вычисления применим формулу Грина-Стокса:

$$\oint\limits_{\gamma}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau})ds = \iint\limits_{\Omega}(rot\,\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k})d\Omega,$$

где $\overrightarrow{a} = \{P, Q, 0\}$, $\quad P = P(x, y)$, $\quad Q = Q(x, y)$, $\quad \overrightarrow{\tau}-$ единичный вектор касательной к кривой γ, ограничивающей область Ω, $\overrightarrow{k}-$единичный вектор, перпендикулярный плоскости области Ω. Линейная форма имеет вид:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau})ds = Pdx + Qdy = P_r dr + rQ_\varphi d\varphi,$$

где $P_r = P\cos\varphi + Q\sin\varphi$, $\quad Q_\varphi = -P\sin\varphi + Q\cos\varphi$. Выражение для ротора в полярной системе координат:

$$rot\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{k}.$$

Поэтому

$$c^{ij} = \iint\limits_{\Omega} C_i(\varphi)D_j(r)rdrd\varphi = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}\right)rdrd\varphi = \oint\limits_{\gamma} P_r dr + rQ_\varphi d\varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}\right) = C_i(\varphi)D_j(r). \tag{3.9}$$

Этому уравнению удовлетворяют

$$P_r = 0, \quad Q_\varphi = \frac{1}{r}C_i(\varphi)\int\limits_0^r D_j(t)tdt.$$

Иными словами, в качестве функции $rQ_\varphi(\varphi, r)$ возьмем первообразную от функции $rD_j(r)$ (по r), умноженную на $C_i(\varphi)$. Заметим, что эта первообразная есть сплайн, состоящий из полиномов седьмой степени. Константу интегрирования в первообразной выберем так, чтобы выполнялось $Q_\varphi(\varphi, 0) = 0$. Отсюда получаем

$$c^{ij} = \oint\limits_{\gamma} C_i(\varphi)\left(\int\limits_0^r D_j(t)tdt\right)d\varphi \tag{3.10}$$

Обратим внимание на то, что непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r) = 0$ при $r < r_j$, если точка с координатами (φ_i, r_j) не принадлежит некоторой области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поэтому $Q_\varphi(\varphi, r) = 0$ при $r < r_j$. Итак, показано, что все коэффициенты c^{ij} равны нулю для таких пар (i, j), при которых точки с координатами $(\varphi_i, r_j) \notin \Omega_\delta$, где $\delta = \delta(M, m, h)$.

3.7 Частный случай «простой» области.

Область назовем «простой», если внутри неё найдётся такая точка, что любой луч, выпущенный из этой точки , пересечет границу области только в одной точке. Поместим начало координат в эту точку и введём полярную систему координат. Тогда граница γ области Ω задается функцией $r = r(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$.

Зафиксируем некоторое φ. Заметим, что $D_j(r) \equiv 0$ при $r \leq r_j - M_2 h_2$, где M_2–количество точек осреднения, используемых при построении $D_j(r)$. Пусть $\xi_{l_1} \leq r_j - M_2 h_2$. Тогда $D_j(r) \equiv 0$ при $r \leq \xi_{l_1}$. Пусть $r(\varphi) \in [\xi_{l_2}, \xi_{l_2+1})$ (заметим, что $l_2 = l_2(\varphi)$ зависит от угла φ и границы области Ω).

$$\int\limits_0^{r(\varphi)} tD_j(t)dt = \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int\limits_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} tD_j(t)dt + \int\limits_{\xi_{l_2}}^{r(\varphi)} tD_j(t)dt = \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int\limits_0^{H_2} (u+\xi_s) \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} u^q du +$$

$$+ \int\limits_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}} (u+\xi_{l_2}) \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} u^q du = \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int\limits_0^{H_2} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} (u^{q+1} + sH_2 u^q) du + \int\limits_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}} \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} (u^{q+1} + l_2 H_2 u^q) du =$$

$$= \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1} \right) + \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} \left(\frac{(r(\varphi) - l_2 H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2 H_2 \frac{(r(\varphi) - l_2 H_2)^{q+1}}{q+1} \right).$$

Поэтому

$$c^{ij} = \oint\limits_\gamma \sum_{s=l_1}^{l_2(\varphi)-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1} \right) C_i(\varphi) d\varphi +$$

$$+ \oint\limits_\gamma \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2(\varphi)} \left(\frac{(r(\varphi) - l_2(\varphi) H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2(\varphi) H_2 \frac{(r(\varphi) - l_2(\varphi) H_2)^{q+1}}{q+1} \right) C_i(\varphi) d\varphi, \tag{3.11}$$

где

$$C_i(\varphi) = \sum_{n=0}^{L_1-1} \sum_{p=0}^{5} a_p^{in} \varphi^p.$$

Здесь a_p^{in} и b_q^{js} – p-й и q-й коэффициенты n-го и s-го полиномов в i-м и j-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0, 2\pi]$ и фундаментальном непериодическом сплайне на отрезке $[0, R]$, $H_1 = 2\pi/L_1$. Фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{ik}, \quad k = 0, 1, \ldots, K_1\}$; $H_2 = 1/L_2$, фундаментальный непериодический сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, K_2; y_0', y_0''\}$, где y_0', y_0'' принимают значения либо 0, либо 1.

3.8 Оценка точности квадратурной формулы для двумерных односвязных областей.

Обозначим через $h = max(h_1, h_2)$. Пусть выполнены условия устойчивости матрицы U, например, $\quad m_1 < M_1\zeta*, \quad m_2 < M_2\zeta* \quad$ и пусть $f \in \mathbf{C}^6(\Omega_\delta)$, где $\Omega_\delta \supset \Omega$, т.е. мы предполагаем, что функция f определена и шесть раз непрерывно дифференцируема в несколько большей области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поместим область Ω_δ в круг K радиуса R. Введём полярную систему координат, взяв за начало координат центр круга R. Продолжим функцию f в $K \setminus \Omega_\delta$ тождественным нулем. Обозначим через $S(\varphi, r)$ $r-\varphi$-сплайн, приближающий таким образом продолженную функцию f на круге K.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $S(\varphi, r)$ *– это* $r-\varphi$*-сплайн, приближающий функцию* f *, пусть* $(M+m)h \le \rho(\gamma_\delta, \gamma)$*. Здесь* $\rho(\gamma_\delta, \gamma)$ *– расстояние между границами областей* Ω_δ *и* Ω *соответственно. Тогда справедлива оценка:*

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x,y) d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le Ch^6. \tag{3.12}$$

Здесь $y_{ij} = f(\varphi_i, r_j)$ *– значения функции* f *в узлах сетки, весовые коэффициенты* c^{ij} *определены формулами (3.10),(3.11), суммирование поизводится лишь по тем индексам* i *и* j*, для которых* $(\varphi_i, r_j) \in \Omega_\delta$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} = 1,$$

т.к. $S(\varphi, r) \equiv 1$, если $f \equiv 1$. Из (3.1) следует, что $|S(\varphi, r) - f(\varphi, r)| \le C_{00} h^6$. Поэтому

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x,y) d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le \left| \iint\limits_{\Omega} f d\Omega - \iint\limits_{\Omega} S d\Omega \right| + \left| \iint\limits_{\Omega} f d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le$$

$$\le C_{00} h^6 mes(\Omega) + \left| \iint\limits_{\Omega} \left(S - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \right) d\Omega \right|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $C_i(\varphi) D_j(r) = 0$ в области Ω для тех пар индексов i и j, для которых $(\varphi_i, r_j) \notin \Omega_\delta$.

Если заданную функцию f приближать $\varphi - r$-сплайном, то оценка (3.12) также будет справедлива, так как на круге K он отличается от $r-\varphi$-сплайна на величину $O(h^6)$.

Список литературы

[1] Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций. В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып.10. М.: Изд-во МГУ, 1984, с.197.

[2] Силаев Д.А. Дважды непрерывно дифференцируемые S-сплайны. Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1, математика, механика, 2007, № 2, с. 12 -17

[3] Силаев Д.А., Коротаев Д.О. Решение краевых задач с помощью S-сплайна. Математика. Компьютер. Образование.: Сб. научн. трудов. Том 2. Под ред. Г.Ю.Ризниченко. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006, с. 85-104

[4] Силаев Д.А., Амилющенко А.В., Лукьянов А.И.,Коротаев Д.О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 . В кн.: Труды семинара имени И.Г.Петровского. Вып. 26, 2007, с. 347-367

[5] Silaev D.A., Amiliyushenko A.V., Luk'janov A.I., and Korotaev D.O. Semilocal smoothing spline of class C^1. Journal of Mathematical Sciences ISSN 1072-3374 Vol. 143. No. 4. June 2007, p. 3401-3414

[6] Амилющенко А.В., Лукьянов А.И., Силаев Д.А. Применение сплайна для приближения гладких периодических функций. Вестник московского университета. N6, 1996 г. Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященные 175-летию Чебышева. Т.1, с.22-25.

[7] Груздев В.А., Силаев Д.А. Некоторые математические вопросы автоматизированной обработки фотографических изображений. В кн.: Некоторые вопросы математики и механики. М.: Изд-во МГУ, 1981, с.52.

[8] Уолш Дж., Алберг Дж., Нильсон Э. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Наука, 1976.

[9] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.

[10] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

[11] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.

[12] Силаев Д.А., Коротаев Д.А. S-сплайн на круге. Тезисы конференции "Математика. Компьютер. Образование.", Пущино, Январь 2003 г. с.157.