Лекция 1. Размерности физических величин и пи-теорема.

Как известно, значения физических величин зависят от выбора системы измерения (например, значение длины в километрах не равно значению длины в метрах). Пусть S_1, S_2 — две системы измерения, a — физическая величина. Тогда каждому значению a_1 величины a в системе S_1 соответствует значение a_2 величины a в системе S_2, причем естественно потребовать, чтобы прямое и обратное соответствие были непрерывны. На практике часто ограничиваются более узким классом систем измерения. А именно, рассматриваются положительные величины и такие системы измерения, что переход от одной системы к другой осуществляется линейно (например, измерение длины в километрах, метрах или сантиметрах). Более точно это означает, что если a — физическая величина, то для любых двух систем измерения S_1 и S_2 найдется $\lambda = \lambda_{1\to 2}(a) > 0$ со следующим свойством: если a_1 — значение a в системе S_1, a_2 — значение a в системе S_2, то $a_2 = \lambda a_1$ (λ не зависит от a_1).

Нам понадобится понятие размерности одних физических величин относительно некоторого набора других. Приведем сначала примеры из школьной физики. Пусть в системе измерения S_1 расстояние L измеряется в метрах, время T — в секундах, масса M — в граммах, а в системе S_2 расстояние измеряется в километрах, время — в минутах, масса — в килограммах. Тогда $\lambda_{1\to 2}(L) = \lambda_{1\to 2}(M) = \frac{1}{1000}$, $\lambda_{1\to 2}(T) = \frac{1}{60}$. Скорость v в первой системе измеряется в м/с, в S_2 — в км/мин; энергия E в S_1 измеряется в $\text{г} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$, во второй — в $\text{кг} \cdot \text{км}^2/\text{мин}^2$. Если в первой системе скорость равна $1\,\text{м/с}$, а энергия — $1\,\text{г} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$, то во второй системе скорость равна $\frac{60}{1000}$ км/мин, а энергия — $\frac{60^2}{1000\cdot 1000^2}$ $\text{кг} \cdot \text{км}^2/\text{мин}^2$. Тем самым,

$$\lambda_{1\to 2}(v) = \frac{\lambda_{1\to 2}(L)}{\lambda_{1\to 2}(T)}, \quad \lambda_{1\to 2}(E) = \frac{\lambda_{1\to 2}(M)\lambda_{1\to 2}(L)^2}{\lambda_{1\to 2}(T)^2}.$$

При этом говорят, что скорость и энергия имеют размерность относительно расстояния, времени и массы вида

$$[v] = \frac{[L]}{[T]}, \quad [E] = \frac{[M]\cdot [L]^2}{[T]^2}$$

(это символическая запись, которая часто встречается в учебниках физики).

Дадим теперь формальное определение размерности.

Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — набор физических величин, называемых основными. При этом предполагаем, что для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n > 0$ найдется система измерения, в которой значение p_j равно ξ_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $f : (0, \infty)^n \to (0, \infty)$ — непрерывная функция. Скажем, что физическая величина a имеет размерность вида

$$[a] = f([p_1], \ldots, [p_n]), \tag{1}$$

если для любых двух систем измерения S_1 и S_2 (которые определяются основными величинами) выполнено

$$\lambda = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda_{1\to 2}(a)$, $\lambda_j = \lambda_{1\to 2}(p_j)$, $j = \overline{1, n}$. (Формула (1) — это обозначение, а не действие функции f на набор чисел).

Теорема 1. *Функция f может быть только степенным одночленом, т.е. найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что*

$$[a] = [p_1]^{\alpha_1} \ldots [p_n]^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим три системы измерения: 0, 1 и 2. Тогда $\lambda_{0\to 2}(a) = \lambda_{0\to 1}(a)\lambda_{1\to 2}(a)$, $\lambda_{0\to 2}(p_j) = \lambda_{0\to 1}(p_j)\lambda_{1\to 2}(p_j)$, $j = \overline{1, n}$. Из определения размерности следует, что

$$f(\lambda_{0\to 1}(p_1)\lambda_{1\to 2}(p_1), \ldots, \lambda_{0\to 1}(p_n)\lambda_{1\to 2}(p_n)) = f(\lambda_{0\to 2}(p_1), \ldots, \lambda_{0\to 2}(p_n)) =$$

$$= \lambda_{0\to 2}(a) = \lambda_{0\to 1}(a)\lambda_{1\to 2}(a) = f(\lambda_{0\to 1}(p_1), \ldots, \lambda_{0\to 1}(p_n))f(\lambda_{1\to 2}(p_1), \ldots, \lambda_{1\to 2}(p_n)).$$

В силу произвольности выбора систем измерения, получаем, что для любых положительных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ выполнено

$$f(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) = f(x_1, \ldots, x_n)f(y_1, \ldots, y_n).$$

Положим

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n) = \ln f(e^{s_1}, \ldots, e^{s_n}),\ s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\varphi(s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n) = \varphi(s_1, \ldots, s_n) + \varphi(t_1, \ldots, t_n),\ \ s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из непрерывности f следует, что функция φ линейна. В самом деле, нужно показать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi(\lambda s) = \lambda\varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$. Из аддитивности выводятся следующие утверждения:

1. $\varphi(0) = 0$,
2. $\varphi(-s) = -\varphi(s)$,
3. $\varphi(ms) = m\varphi(s)$, $m \in \mathbb{N}$,
4. $\varphi(qs) = q\varphi(s)$, $q \in \mathbb{Q}$.

Отсюда и из непрерывности φ получаем, что $\varphi(\lambda s) = \lambda\varphi(s)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тем самым, найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n) = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n.$$

Значит,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_j\right) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

□

Если $[a] = 1$, то величина a называется безразмерной.

Пусть физические величины $a_1, \ldots, a_n$ имеют размерность относительно основных величин $p_1, \ldots, p_m$. По доказанной выше теореме,

$$[a_j] = [p_1]^{\beta_{j1}} \ldots [p_m]^{\beta_{jm}},\ \ j = \overline{1, m}.$$

Скажем, что размерности системы величин $a_1, \ldots, a_n$ зависимы (независимы), если система векторов $(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}) \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1, n}$, является линейно зависимой (соответственно линейно независимой). Заметим, что если $a_1, \ldots, a_n$ независимы, то для любых положительных $c_1, \ldots, c_n$ найдется система измерения, в которой a_j принимает значение c_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. В самом деле, прологарифмировав (2) для каждого a_j, получаем, что

$$\ln \lambda_{1\to 2}(a_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{jk} \ln \lambda_{1\to 2}(p_k), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

В силу линейной независимости векторов $(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm})$, для любых $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ можно подобрать $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\mu_j = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{jk}\sigma_k$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Отсюда следует утверждение.

Пи-теорема.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$, a — некоторые физические величины, имеющие размерность относительно основных физических величин $p_1, \ldots, p_m$. Предположим, что значения a и $a_1, \ldots, a_n$ связаны равенством

$$a = f(a_1, \ldots, a_n), \tag{3}$$

при этом функция f одна и та же для всех систем измерения. Оказывается, что это соотношение эквивалентно некоторому равенству между безразмерными физическими величинами, при этом их число меньше, чем в (3).

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — максимальная подсистема величин с независимыми размерностями в $\{a, a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда

$$[a_l] = [a_1]^{\beta_{l1}} \ldots [a_k]^{\beta_{lk}}, \ l = k+1, \ldots, n, \quad [a] = [a_1]^{\beta_1} \ldots [a_k]^{\beta_k} \tag{4}$$

для некоторых $\beta_{l1}, \ldots, \beta_{lk}, \beta_1, \ldots, \beta_k$. Введем безразмерные величины

$$\Pi_l = \frac{a_l}{a_1^{\beta_{l1}} \ldots a_k^{\beta_{lk}}}, l = k+1, \ldots, n, \quad \Pi = \frac{a}{a_1^{\beta_1} \ldots a_k^{\beta_k}}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено (3), (4), а величины* Π_l *и* Π *определены соотношением (5). Тогда найдется функция* $F : (0, \infty)^{n-k} \to (0, \infty)$ *такая, что (3) эквивалентно равенству*

$$\Pi = F\left(\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n\right). \tag{6}$$

Доказательство. Подставив выражения (5) в (3), получаем

$$\Pi = a_1^{-\beta_1} \ldots a_k^{-\beta_k} f\left(a_1, \ldots, a_k, a_1^{\beta_{k+1,1}} \ldots a_k^{\beta_{k+1,k}} \Pi_{k+1}, \ldots, a_1^{\beta_{n,1}} \ldots a_k^{\beta_{n,k}} \Pi_n\right),$$

т.е.

$$\Pi = F_0(a_1, \ldots, a_k, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n).$$

При этом функция F_0 одна и та же для всех систем измерения. Покажем, что F_0 не зависит от $a_1, \ldots, a_k$, и тогда получим (6). Выберем систему измерения, в которой $a_j = 1$, $j = 1, \ldots, k$ (она существует, так как $a_1, \ldots, a_k$ независимы) и пусть ξ_j — значения Π_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, ξ — значение Π в этой системе. Тогда

$$\xi = F_0(1, \ldots, 1, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n).$$

Пусть $c_1, \ldots, c_k$ — произвольный набор положительных чисел. Найдется система измерения, в которой значения a_j равны c_j. Так как $\Pi, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$ являются безразмерными и F_0 не зависит от выбора системы измерения, то $\xi = F_0(c_1, \ldots, c_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. Значит, $F_0(c_1, \ldots, c_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) = F_0(1, \ldots, 1, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. □

Пи-теорему удобно применять для подбора формул. Сначала рассмотрим два простых примера из механики.

Пример 1. Пусть тело массы m совершает колебания на пружине с коэффициентом жесткости k. Как известно, период его колебаний не зависит от амплитуды x_0. Оказывается, это можно объяснить исходя из соображений размерности. В самом деле, период колебаний однозначно определяется по m, k и x_0, т.е. $T = f(m, k, x_0)$. Величины m, k и x_0 независимы, $[k] = [m]/[T^2]$. Полагаем $T\sqrt{\frac{k}{m}}$ в соответствии с (5). Применяя пи-теорему, получаем,что $T\sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const}$.

Пример 2. Рассмотрим маятник длины l с грузом массы m в постоянном гравитационном поле с ускорением свободного падения g. Пусть x_0 — амплитуда, T — период колебаний. Тогда $T = f(l, m, g, x_0)$. Система l, m, g является максимальной независимой подсистемой и $[T] = \frac{[l]^{1/2}}{[g]^{1/2}}$. Полагаем $\Pi = \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$, $\Pi_4 = \frac{x_0}{l}$. Применяя пи-теорему, получаем $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\varphi\left(\frac{x_0}{l}\right)$ (т.е. T не зависит от массы груза).

Соображения размерности бывает полезно применять и для подбора специальных решений уравнений в частных производных.

Пример 3. Найдем фундаментальное решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \quad a|_{t=0} = \delta(x). \tag{7}$$

Здесь t является временем, x — координатой.

Чтобы левая и правая части уравнения имели одну и ту же размерность, нужно, чтобы $[\nu] = \frac{[x]^2}{[t]}$. Из вида граничных условий можно понять, какую размерность должна иметь величина a:[1] взяв безразмерную величину $\xi = x/L$, где L — фиксированное значение длины, получаем, что $a|_{t=0} = \delta(L\xi) = \frac{1}{L}\delta(\xi)$, т.е. $[a] = \frac{1}{[L]}$. Равенство $\delta(L\xi) = \frac{1}{L}\delta(\xi)$ получается следующим образом: для пробной функции φ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(L\xi)\,d\xi = \frac{1}{L}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(L\xi)\,dL\xi = \frac{1}{L}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x/L)\delta(x)\,dx = \frac{1}{L}\varphi(0) = \frac{1}{L}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\delta(\xi)\,d\xi.$$

Итак, нам нужно найти зависимость вида $a = f(t, x, \nu)$. Здесь x, t — максимальная независимая подсистема. Полагаем $\Pi_3 = \frac{\nu t}{x^2}$, $\Pi = ax$. Применяя пи-теорему, получаем, что $ax = F\left(\frac{\nu t}{x^2}\right)$. Для решения уравнения удобнее взять подстановку $a = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\psi\left(\frac{x^2}{\nu t}\right)$ (чтобы вторая производная по x имела более простой вид). Подставляем это в (7), обозначаем $z = \frac{x^2}{\nu t}$ и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{2}\psi(z) - z\psi'(z) = 4z\psi''(z) + 2\psi'(z),$$

то есть $\left(z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\right)\left(4\frac{d}{dz} + 1\right)\psi(z) = 0$. Одно из решений имеет вид $\psi(z) = Ce^{-z/4}$, откуда $a(t, x) = \frac{C}{\sqrt{\nu t}}e^{-x^2/4\nu t}$. Константа C находится из граничного условия: если $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$h(0) = C\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\nu t}}\int\limits_{\mathbb{R}} h(x)e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}\,dx = C\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} h(\sqrt{\nu t}z)e^{-z^2/4}\,dz = Ch(0)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-z^2/4}\,dz,$$

т.е. $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

[1]Эти рассуждения имеют физический уровень строгости, однако нам этого достаточно, чтобы подобрать хотя бы одно решение уравнения.