Курс лекций   А.В. Дмитрука
"Вариационное исчисление и оптимальное управление"
Мехмат, 4 курс 2 поток, осень 2008 года
Лекции 14–16

Условия "второго порядка" в задачах на экстремум

Вспомним сначала обычную задачу минимизации функции многих переменных:

$f(x) \to \min$, где $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция в окрестности точки x_0. Пусть в точке x_0 выполнено необходимое условие первого порядка для локального минимума: $f'(x_0) = 0$. Из курса анализа известно, что необходимое условие второго порядка есть неравенство $f''(x_0) \geqslant 0$ (неотрицательная определенность матрицы вторых производных), а достаточное условие второго порядка есть неравенство $f''(x_0) > 0$ (положительная определенность этой матрицы).

Оба этих неравенства могут быть записаны также в виде оценки снизу второго дифференциала f :

$$d^2 f(x_0) = \ (f''(x_0)\,\bar{x}, \bar{x}) \geqslant c\,||\bar{x}||^2 \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $c = 0$ соответствует необходимому условию, а $c > 0$ достаточному (последнее вытекает из компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.)

Проверка указанной знакоопределенности квадратичной формы $d^2 f(x_0)$ или соответствующей матрицы $f''(x_0)$ может быть проведена с помощью критерия Сильвестра или путем вычисления ее собственных значений.

Каков аналог этих условий для задач в бесконечномерном пространстве?

Пусть x есть элемент банахова пространства X, а функция f по-прежнему дважды дифференцируема в окрестности x_0. Нетрудно показать (повторяя стандартное доказательство для конечномерного случая), что здесь по-прежнему неравенство (1) при $c = 0$ будет необходимым условием, а при $c > 0$ достаточным условием локального минимума. В случае выполнения последнего неравенства мы говорим, что квадратичная форма $(f''(x_0)\,\bar{x}, \bar{x})$ положительно определена. (Покажите, что простая положительность этой формы на всех $\bar{x} \neq 0$ может еще не обеспечивать локальный минимум!)

Полученное достаточное условие, однако, имеет существенный дефект: оно может выполняться только в случае, когда пространство X изоморфно гильбертову пространству, т.е. в нем можно ввести эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением. (Докажите это простое утверждение!). Это нас не устраивает, поскольку в большинстве задач на экстремум естественное пространство не гильбертово — например, практически во всех задачах оптимального управления, которые ставятся в пространстве L_∞ . Для банахова пространства квадрат нормы – слишком грубая величина, чтобы оценивать ею снизу $d^2 f(x_0)$.

Из этих соображений возникает идея о замене квадрата нормы $||\bar{x}||^2$ некоторым более слабым (тонким) квадратичным функционалом $\gamma(\bar{x})$ так, чтобы все-таки оценка $d^2 f(x_0) \geqslant c\,\gamma(\bar{x})$ при $c > 0$ обеспечивала наличие локального минимума. Оказывается, что в некоторых случаях выбор такого функционала $\gamma(\bar{x})$ возможен, и тогда следует говорить не об условиях "второго порядка", а более точно — об условиях данного квадратичного порядка γ. Именно эта идея и будет сейчас реализована.

Задача с ограничениями равенства в банаховом пространстве при наличии разложений с квадратичными членами порядка γ

Рассмотрим задачу

$$J = f(x) \to \min, \qquad\qquad g(x) = 0, \tag{2}$$

где $X, Y -$ банаховы пространства, отображения $f : X \to \mathbb{R}$ (функционал задачи) и $g : X \to Y$ (оператор равенства) определены в окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ и строго дифференцируемы в x_0, причем $g'(x_0)$ действует "на", т.е. выполнено условие Люстерника. (Ограничения типа неравенства $f_i(x) \leqslant 0$ мы пока не рассматриваем, чтобы избежать дополнительных технических усложнений.)

Предположим далее, что в пространстве X задана еще одна норма $||x||_a$ (от слова *another*), более слабая, чем исходная (т.е. выполнена оценка $||x||_a \leqslant const\,||x||$ для всех $x \in X$), а отображения f и g имеют следующие разложения в точке x_0 (мы здесь выпишем его только для одного отображения, а второе аналогично):

$$g(x_0 + \bar{x}) = \; g(x_0) \; + \; g'(x_0)\bar{x} \; + \; \frac{1}{2}\, Q_g(\bar{x}, \bar{x}) \; + \; r_g(\bar{x}), \tag{3}$$

где билинейное отображение $Q_g : X \times X \to Y$ ограничено сверху относительно новой нормы, т.е. удовлетворяет оценке

$$||Q_g(x', x'')|| \; \leqslant \; C_g\, ||x'||_a \; ||x''||_a \tag{4}$$

с некоторой константой C_g (это эквивалентно тому, что $||Q_g(\bar{x}, \bar{x})|| \leqslant \mathrm{const}\; ||\bar{x}||_a^2$), а остаточный член удовлетворяет оценке

$$||r_g(\bar{x})|| = o\,(||\bar{x}||_a^2) \qquad \text{при} \qquad \bar{x} \to 0. \tag{5}$$

Функционал $\gamma(\bar{x}) = ||\bar{x}||_a^2$ назовем квадратичным порядком задачи (2).

Таким образом, у обоих отображений $f,\, g$ квадратичные части разложений $= O(\gamma(\bar{x}))$, а остатки $=\; o(\gamma(\bar{x}))$.

Пусть для точки x_0 выполнено необходимое условие первого порядка — правило множителей Лагранжа, т.е. существует элемент $y^* \in Y^*$ такой, что функция Лагранжа $L(x) = f(x) + y^* g(x)$ стационарна в точке x_0 : $\quad L'(x_0) = f'(x_0) + y^* g'(x_0) = 0.$ (Коэффициент при функционале $\alpha_0 = 1$ в силу невырожденности g .)

Отсюда и из разложений (3) для f, g вытекает, что функция Лагранжа имеет разложение

$$L(x_0 + \bar{x}) = L(x_0) + \frac{1}{2}\,\Omega(\bar{x}) + r_L(\bar{x}), \tag{6}$$

где квадратичный функционал $\Omega(\bar{x}) = Q_f(\bar{x},\bar{x}) + y^* Q_g(\bar{x},\bar{x})$ играет роль $d^2 L(x_0)$, а остаток $r_L(\bar{x}) = o\,(\gamma(\bar{x}))$ при $\bar{x} \to 0$.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условия порядка γ) .
а) Пусть $x_0 -$ точка локального минимума в задаче (2). Тогда

$$\Omega(\bar{x}) \geqslant 0 \qquad\qquad \forall\, \bar{x} \in ker\, g'(x_0). \tag{7}$$

б) Пусть для некоторого $c > 0$

$$\Omega(\bar{x}) \geqslant c\,\gamma(\bar{x}) \qquad\qquad \forall\, \bar{x} \in ker\, g'(x_0). \tag{8}$$

Тогда $x_0 -$ точка строгого локального минимума в задаче (2).

Доказательство. Считаем $f(x_0) = 0$. Обозначим $K = ker\, g'(x_0)$.

а) Возьмем любой $\bar{x} \in K$. В силу (3)–(5) $g(x_0 + \varepsilon\bar{x}) = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0+$. Отсюда по теореме Люстерника об оценке расстояния найдется поправка $\tilde{x}_\varepsilon$ с оценкой $||\tilde{x}_\varepsilon|| = O(\varepsilon^2)$, такая что точка $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}_\varepsilon$ удовлетворяет ограничению равенства $g(x_\varepsilon) = 0$.

Из локального минимума в точке x_0 следует, что при малых $\varepsilon > 0$

$$L(x_\varepsilon) = (f + y^* g)(x_\varepsilon) = f(x_\varepsilon) \geqslant f(x_0) = L(x_0).$$

Согласно (6) $L(x_\varepsilon) - L(x_0) = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\,\Omega(\bar{x}) + o(\varepsilon^2) \geqslant 0$, откуда $\Omega(\bar{x}) \geqslant 0$, ч.т.д.

б) Допустим, что строгого минимума в точке x_0 нет, т.е. существует последовательность $\delta x_n \to 0$, $\delta x_n \neq 0$, такая что

$$f(x_0 + \delta x_n) \leqslant 0, \qquad g(x_0 + \delta x_n) = 0. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае оценка (8) нарушается. Обозначим $\gamma_n = \gamma(\delta x_n)$.

Из (9) и разложения (3) получаем

$$g'(x_0)\,\delta x_n + \frac{1}{2}\,Q_g(\delta x_n, \delta x_n) + r_g(\delta x_n) = 0,$$

откуда с учетом (4), (5) следует, что $g'(x_0)\delta x_n = O(\gamma_n)$. По теореме Банаха об открытом отображении существует последовательность $\tilde{x}_n$ с оценкой $||\tilde{x}_n|| = O(\gamma_n)$, такая что $g'(x_0)\tilde{x}_n = -g'(x_0)\delta x_n$. Тогда для $\bar{x}_n = \delta x_n + \tilde{x}_n$ выполнено равенство $g'(x_0)\bar{x}_n = 0$, т.е. $\bar{x}_n \in K$.

Нетрудно показать, что при этом $\gamma(\bar{x}_n) = \gamma_n + o(\gamma_n) \sim \gamma_n$. (Покажите!)

Из (9) следует, что $L(x_0 + \delta x_n) = f(x_0 + \delta x_n) + y^* g(x_0 + \delta x_n) \leqslant 0$.
Отсюда в силу (6) $L(x_0 + \delta x_n) = \frac{1}{2}\,\Omega(\delta x_n) + o(\gamma_n) \leqslant 0$, и поэтому $\Omega(\delta x_n) \leqslant o(\gamma_n)$.

Тогда для $\bar{x}_n = \delta x_n + \tilde{x}_n$ с учетом (4) имеем

$$\Omega(\bar{x}_n) = \Omega(\delta x_n) + 2Q_L(\delta x_n, \tilde{x}_n) + \Omega(\tilde{x}_n) \leqslant o(\gamma_n).$$

При больших n получаем, что для $\bar{x}_n \in K$ выполнено $\Omega(\bar{x}_n) \leqslant \frac{c}{2}\,\gamma(\bar{x}_n)$, что противоречит оценке (8). □

Изложенная здесь схема получения квадратичных условий локального минимума для задачи (2) в банаховом пространстве называется схемой двух норм ("two-norm approach" в зарубежной литературе).

Задача Лагранжа с концевыми ограничениями равенства

Применим теперь изложенную выше абстрактную схему к задаче Лагранжа КВИ:

$$J = \varphi(p) \to \min, \qquad \eta(p) = 0, \qquad \dot{x} = f(t,x,u). \tag{10}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $p = (x(0),\, x(T)) \in \mathbb{R}^{2n}$, функции φ, η размерностей $1, m$ определены на открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n}$ и дважды гладкие на нем, функция f определена на открытом множестве $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$ и имеет на нем производные f_x, f_u, f_{xx}, f_{xu}, f_{uu}, непрерывные по совокупности переменных (t,x,u). Отрезок времени $\Delta = [0,T]$ фиксирован.

Как и раньше, допустимый процесс — это пара функций $w = (x,u) \in W = AC(\Delta) \times L_\infty(\Delta)$, такая что ее график $(t, x(t), u(t))$ лежит "строго внутри" $\mathcal{Q}$, вектор концов $p = (x(0), x(T)) \in \mathcal{P}$, и при этом выполнены оба ограничения равенства задачи.

Пусть дан некоторый допустимый процесс $w^0 = (x^0, u^0)$. Будем считать, что для него выполнено условие Люстерника, т.е. ограничения равенства в точке w^0 невырождены. Оператор, задающий равенства, имеет здесь вид $g:\, W \to L_1(\Delta) \times \mathbb{R}^m$,

$$g(x,u) = (\,\dot{x} - f(t,x,u), \quad \eta(x(0), x(T))\,).$$

Необходимое условие первого порядка слабого минимума для процесса w^0 (уравнение Эйлера–Лагранжа) состоит в том, что существует липшицева $n-$ мерная функция $\psi(t)$ и вектор $\beta \in \mathbb{R}^m$, такие что

$$-\dot{\psi} = H_x(t, x^0(t), u^0(t)), \qquad\qquad H_u(t, x^0(t), u^0(t)) = 0,$$

$$\psi(0) = l_{x_0}(p^0), \qquad\qquad \psi(T) = -l_{x_T}(p^0),$$

где $H = \psi\, f(t,x,u)$, $\quad l(p) = \varphi(p) + \beta\eta(p)$. Считаем, что эти условия выполнены.

Нас интересует, доставляет ли процесс w^0 слабый минимум. (Как мы знаем, в задаче (10) он эквивалентен локальному минимуму относительно нормы в W.)

В качестве квадратичного порядка для задачи (10) возьмем функционал

$$\gamma(\bar{w}) = |\bar{x}(0)|^2 + |\bar{x}(T)|^2 + \int_0^T (|\bar{x}|^2 + |\bar{u}|^2)\, dt,$$

и соответственно положим $||\bar{w}||_a = \sqrt{\gamma(\bar{w})}$. Ясно, что эта норма слабее исходной нормы $||\bar{w}|| = |\bar{x}(0)| + ||\dot{\bar{x}}||_1 + ||\bar{u}||_\infty$ пространства W.

При сделанных предположениях о гладкости f, φ, η функционал J и оператор g, очевидно, имеют требуемые разложения с точностью до квадратичных членов порядка γ на процессе w^0 (как и вообще на любом допустимом процессе). Для J и второй компоненты g это очевидно, так как это просто дважды гладкие функции конечномерного аргумента $p = (x(0), x(T))$, а для первой компоненты g это разложение имеет вид (3), в котором и квадратичная часть, и остаток возникают от разложения функции f в точке $(t, x^0(t), u^0(t))$:

$$Q(\bar{w}, \bar{w})(t) \; = -(f''_{ww}(t, w^0(t))\, \bar{w}(t), \bar{w}(t)) =$$

$$= -(f''_{xx}\, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) - 2(f''_{ux}\, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - (f''_{uu}\, \bar{u}(t), \bar{u}(t))$$

(все производные берутся в точке $(t, x^0(t), u^0(t))$), а для остатка справедлива оценка

$$|\, r(t, \bar{w}(t))| \;\leqslant\; \mu(|\bar{w}(t)|)\; |\bar{w}(t)|^2,$$

где μ есть модуль непрерывности функции f''_{ww} в некоторой трубке вокруг процесса w^0. Ясно, что

$$\int_0^T |Q(\bar{w}, \bar{w})(t)|\, dt \;\leqslant\; \mathrm{const} \int_0^T (|\bar{x}|^2 + |\bar{u}|^2)\, dt \;\leqslant\; \mathrm{const}\, \cdot \gamma(\bar{w}),$$

и соответствующая билинейная форма удовлетворяет оценке (4), а норма остатка в L_1 имеет оценку

$$\int_0^T |r(t, \bar{w}(t))|\, dt \;\leqslant\; \mu(||\bar{x}||_C + ||\bar{u}||_\infty)\, \gamma(\bar{w}) \;=\; o\,(\gamma(\bar{w})).$$

Таким образом, предположения нашей абстрактной схемы выполнены.

Функция Лагранжа здесь имеет вид

$$L(w) = l(p) + \int_0^T \psi\, (\dot{x} - f(t, x, u))\, dt,$$

где $l = \varphi + \beta\eta$, и тогда квадратичная часть ее разложения (второй дифференциал или вторая вариация) есть

$$\Omega(\bar{w}) = \; (l''_{pp}\, \bar{p}, \bar{p}) - \int_0^T \Big((H''_{xx}\, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) + 2(H''_{ux}\, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (H''_{uu}\, \bar{u}(t), \bar{u}(t)) \Big)\; dt. \quad (11)$$

Подпространство $K = ker\, g'(w^0)$ состоит из всех $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{u})$, удовлетворяющих равенствам

$$\dot{\bar{x}} = f_x\, \bar{x} + f_u\, \bar{u}, \qquad \eta_{x_0}\, \bar{x}(0) \;+\; \eta_{x_T}\, \bar{x}(T) = 0. \quad (12)$$

Теорема 1 в этом случае дает следующий результат.

Теорема 2.
а) Пусть $w^0 -$ точка слабого минимума в задаче (10). Тогда

$$\Omega(\bar{w}) \geqslant 0 \qquad \forall\, \bar{w} \in K. \tag{13}$$

б) Пусть для некоторого $c > 0$

$$\Omega(\bar{w}) \geqslant c\,\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in K. \tag{14}$$

Тогда $w^0 -$ точка строгого слабого минимума в задаче (10).

Таким образом, мы получили необходимое и достаточное условия порядка γ для слабого минимума в задаче (2) — неравенства (13) и (14). Их проверка приводит нас к вопросу о знакоопределенности квадратичного функционала $\Omega(\bar{w})$ вида (11) на подпространстве K вида (12) относительно введенного квадратичного порядка $\gamma(\bar{w})$. Для упрощения изложения мы далее ограничимся рассмотрением случая, когда в задаче (10) правый конец траектории закреплен: $x(T) = x^0_T$, а на левом конце имеется ограничение равенства $\eta(x(0)) = 0$. В записи подпространства K мы тогда имеем равенства $\bar{x}(T) = 0$, $\eta'(x^0(0))\,\bar{x}(0) = 0$. Указанный вопрос удобно рассмотреть в общей постановке, к чему мы сейчас и перейдем.

Задача о знакоопределенности квадратичного функционала

Итак, мы пришли к изучению квадратичного функционала вида

$$\Omega(\bar{u}) = (S\bar{x}(0), \bar{x}(0)) + \int_0^T ((Q\bar{x}, \bar{x}) + 2(P\bar{x}, \bar{u}) + (R\bar{u}, \bar{u}))\, dt, \tag{16}$$

на подпространстве (обозначим его временно) $N \subset L_\infty(\Delta)$, состоящем из всех функций $\bar{u}(t)$, для которых решение уравнения

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \qquad \bar{x}(T) = 0, \tag{17}$$

удовлетворяет левому граничному условию

$$C\,\bar{x}(0) = 0. \tag{18}$$

(Мы перешли к независимому переменному $\bar{u}$, так как $\bar{x}$ можно выразить через $\bar{u}$ в силу (17).)

Здесь $S -$ симметричная $n \times n$-матрица, $C - m \times n$-матрица, матрицы A, B, Q, P, R соответствующих размерностей имеют измеримые ограниченные коэффициенты, из них Q, R симметричны. Конкретная связь этих матриц с соответствующими коэффициентами функционала (11, 12) нам с этого момента уже не важна. Более того, поскольку теперь мы все время будем работать только с вариациями $\bar{x}$, $\bar{u}$, далее черту над ними писать не будем.

Нас интересует знакоопределенность функционала $\Omega(u)$ на на подпространстве N относительно квадратичного порядка

$$\gamma(u) = |x(0)|^2 + \int_0^T (|x|^2 + |u|^2)\, dt,$$

т.е. выяснение того, будет ли выполняться неравенство

$$\Omega(u) \geqslant c\,\gamma(u) \qquad \forall\, u \in N \tag{19}$$

при $c = 0$ или некотором $c > 0$.

Первое что мы заметим, это то, что в силу уравнения (17) $||x||_C \leqslant \text{const}\, ||u||_1$, откуда

$$|x(0)|^2 + \int_0^T |x|^2\, dt \leqslant \text{const} \int_0^T |u|^2\, dt,$$

и поэтому $\gamma(u)$ можно заменить на $\int_0^T |u|^2\, dt$ (т.е. выбросить первые два члена из $\gamma(u)$), при этом качественный характер оценки (19) не изменится. Таким образом, вместо неравенства (19) мы будем изучать выполнение неравенства

$$\Omega(u) \geqslant c\,||u||_2^2 \qquad \forall\, u \in N. \tag{20}$$

Далее обратим внимание на следующее обстоятельство. Пространство $L_\infty(\Delta)$ всюду плотно в $L_2(\Delta)$ относительно нормы последнего, а функционал Ω непрерывен относительно нормы $||u||_2$ (Почему?) Справа в (20) стоит квадрат этой нормы. Поэтому естественно было бы рассматривать неравенство (20) не в пространстве $L_\infty(\Delta)$, а в пространстве $L_2(\Delta)$ – это его естественная область определения. Надо лишь проверить, что подпространство $N \subset L_\infty(\Delta)$ будет также всюду плотно в соответствующем подпространстве $K \subset L_2(\Delta)$. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма о плотности. Пусть в локально выпуклом топологическом векторном пространстве H имеется всюду плотное линейное многообразие D и подпространство K, заданное равенствами $(a_i, u) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, где $a_i \in H^*$. Тогда $K \cap D$ плотно в K.

Доказательство. По соображениям индукции достаточно рассмотреть случай $m = 1$. Таким образом, $K = \{u \in H :\ (a, u) = 0\}$, $\ a \neq 0$. Возьмем любую точку $u_0 \in K$ и любую ее окрестность $\mathcal{O}(u_0)$, которую можно считать выпуклой. Нам надо найти $\hat{u} \in \mathcal{O}(u_0)$, такую что $\hat{u} \in K \cap D$. Так как D всюду плотно, в непустом открытом множестве $\{u :\ (a, u) > 0\} \cap \mathcal{O}(u_0)$ найдется точка $u_1 \in D$, а в непустом открытом множестве $\{u :\ (a, u) < 0\} \cap \mathcal{O}(u_0)$ найдется точка $u_2 \in D$. Так как $\mathcal{O}(u_0)$ выпукло, а D есть линейное многообразие, весь отрезок $[u_1, u_2]$ содержится в $\mathcal{O}(u_0) \cap D$, и при этом для некоторой его промежуточной точки $\hat{u}$ будет выполнено равенство $(a, \hat{u}) = 0$, т.е. получаем $\hat{u} \in \mathcal{O}(u_0) \cap D$ и одновременно $\hat{u} \in K$, ч.т.д. $\square$

У нас $H = L_2(\Delta)$, $\ D = L_\infty(\Delta)$, подпространство K состоит из всех $u \in L_2(\Delta)$, для которых решение уравнения (17) удовлетворяет $m-$ мерному равенству

(18). Согласно доказанной лемме, множество N, состоящее из функций $u \in L_\infty(\Delta)$, удовлетворяющих этому условию, всюду плотно в K.

Подпространство K будем иногда обозначать как K_T, если надо указать отрезок $\Delta = [0, T]$, на котором рассматриваются функции $x(t)$, $u(t)$.

Итак, в пространстве $L_2[0, T]$ имеется подпространство K_T, заданное равенствами (17, 18), и нас интересует выполнение оценки

$$\Omega(u) \;\geqslant\; c\,||u||_2^2 \qquad \forall\, u \in K_T \tag{21}$$

при $c = 0$ или некотором $c > 0$.

Первое нетривиальное условие для выполнения (21) касается матрицы $R(t)$ при квадрате управления в Ω и состоит в следующем.

Теорема 3 (необходимое условие Лежандра). Пусть $\Omega \geqslant 0$ на K. Тогда $R(t) \geqslant 0$ для п.в. $t \in \Delta$.

Доказательство проведем здесь для случая, когда матрица $R(t)$ непрерывна. Допустим, существует вектор $v \in \mathbb{R}^r$ и точка $t_0 \in \Delta$, такие что $(R(t_*)\,v, v) < 0$. Умножая v на некоторое положительное число, считаем, что $(R(t_*)\,v,\, v) = -2$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{O}(t_*)$ будет $(R(t)\,v, v) \leqslant -1$. Для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ возьмем некоторый отрезок Δ_ε длины ε, лежащий целиком в указанной окрестности $\mathcal{O}(t_*)$.

Пусть $u_\varepsilon = v$ на Δ_ε и 0 вне Δ_ε, а x_ε есть соответствующее решение (17). Тогда

$$\int_\Delta (R(t)\,u_\varepsilon\,, u_\varepsilon)\,dt \;=\int_\Delta (R(t)\,v, v)\,dt \;\leqslant\; -\varepsilon.$$

Оценим остальные члены в $\Omega(u_\varepsilon)$. Так как

$$||x_\varepsilon||_C \;\leqslant\; \mathrm{const} \int_0^T |u_\varepsilon|\,dt \;\leqslant\; O(\varepsilon) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

то все остальные члены по модулю $\leqslant O(\varepsilon^2)$, и поэтому $\Omega(u_\varepsilon) \leqslant O(\varepsilon^2) - \varepsilon < 0$ при малых $\varepsilon > 0$. Однако мы еще не получили противоречия с неотрицательностью Ω на K, так как может не выполняться требуемое равенство $Cx_\varepsilon(0) = 0$.

Это равенство может нарушаться лишь на величину порядка $|x_\varepsilon(0)| = O(\varepsilon)$, и поэтому, согласно теореме Банаха об открытом отображении, существует $\tilde u_\varepsilon \in L_2(\Delta)$ с оценкой $||\tilde u_\varepsilon||_2 \leqslant O(\varepsilon)$, для которого решение (17) дает то же начальное значение: $\tilde x_\varepsilon(0) = x_\varepsilon(0)$. Тогда для управления $u'_\varepsilon = u_\varepsilon - \tilde u_\varepsilon$ получим $x'_\varepsilon = x_\varepsilon - \tilde x_\varepsilon$ с равенством $Cx'_\varepsilon(0) = 0$, т.е. $u'_\varepsilon \in K$.

Нетрудно видеть, что $\Omega(u'_\varepsilon) = \Omega(u_\varepsilon) + o(\varepsilon)$. Проверим здесь лишь основной, лежандровый член:

$$\int_\Delta (R\,(u_\varepsilon - \tilde u_\varepsilon), (u_\varepsilon - \tilde u_\varepsilon))\,dt = \int_\Delta (R\,u_\varepsilon\,, u_\varepsilon)\,dt - 2\int_\Delta (R\,u_\varepsilon\,, \tilde u_\varepsilon)\,dt + \int_\Delta (R\,\tilde u_\varepsilon\,, \tilde u_\varepsilon)\,dt.$$

Предпоследний член оценивается так:

$$\int_\Delta |(R\,u_\varepsilon\,, \tilde u_\varepsilon)|\,dt \;\leqslant\; \mathrm{const}\;||u_\varepsilon||_2\;||\tilde u_\varepsilon||_2 \;\leqslant\; \mathrm{const}\;\sqrt{\varepsilon}\cdot O(\varepsilon) \;=\; O(\varepsilon^{3/2}),$$

а последний член $\leqslant \text{const}\, ||\tilde{u}_\varepsilon||_2^2 = O(\varepsilon^2)$. Таким образом, $u'_\varepsilon \in K$ и при этом $\Omega(u'_\varepsilon) = \Omega(u_\varepsilon) + o(\varepsilon) \leqslant O(\varepsilon^2) - \varepsilon + o(\varepsilon) < 0$, противоречие.

Итак, для случая, когда матрица $R(t)$ непрерывна, теорема доказана. Общий случай, когда $R(t)$ измерима, отличается лишь небольшими техническими деталями, которые мы оставляем читателю. (В качестве t_* надо брать точки *аппроксимативной непрерывности* функции $R(t)$, которые образуют множество полной меры на данном отрезке.) □

Следствие. Если выполнено (21), то $R(t) \geqslant cE$ для п.в. $t \in \Delta$.
Это вытекает из того, что функционал $\widetilde{\Omega}(u) = \Omega(u) - \int_0^T c\,(u,u)\,dt \geqslant 0$ на K, а по теореме 3 его лежандровый коэффициент $\widetilde{R}(t) = R(t) - c\,E \geqslant 0$ для п.в. $t \in \Delta$. □

Дальнейшее исследование знакоопределенности Ω будем проводить в предположении, что выполнено *усиленное условие Лежандра*:

$$\exists\, a > 0 \quad \text{такое, что} \qquad R(t) \geqslant a\,E \quad \text{для п.в. } t \in \Delta. \tag{22}$$

Как мы только что видели, без этого условия Ω не может быть положительно определенным на K. (Неотрицательным он быть может, но без усиленного условия Лежандра проверка неотрицательности Ω представляет собой очень сложную задачу, для которой не существует стандартной процедуры.)

Теорема 4 (Лежандр). Пусть выполнено усиленное условие Лежандра.
Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, T \leqslant \varepsilon$ функционал Ω положительно определен на всем $L_2[0,T]$, и в частности, на K_T.

Доказательство. Из (22) следует, что $\int_\Delta (R\,u, u)\,dt \geqslant a||u||_2^2$. Оценим остальные члены в $\Omega(u)$. Так как

$$||x||_C \leqslant \text{const} \int_0^T 1\cdot|u|\,dt \leqslant \text{const}\, ||1||_2 \cdot ||u||_2 \leqslant \text{const}\, \sqrt{T}\cdot ||u||_2\,,$$

то все остальные члены в $\Omega(u)$ по модулю $\leqslant bT\cdot||u||_2^2$ при некотором b, и тогда при малых $T > 0$ имеем $\Omega(u) \geqslant (-bT + a)\cdot ||u||_2^2 \geqslant \frac{a}{2}\,||u||_2^2$, ч.т.д. □

Итак, при достаточно малых T функционал Ω положительно определен на K_T. Что будет при больших T? Простые примеры показывают, что Ω может иметь отрицательные значения.

Пример 1.

$$\Omega(u) = -x^2(0) + \int_0^T u^2\,dt, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(T) = 0.$$

Положив $u(t) = 1$, получаем $x(t) = t - T$, $x(0) = -T$, поэтому $\Omega(u) = -T^2 + T < 0$ при $T > 1$.

Таким образом, усиленное условие Лежандра обеспечивает положительную определенность функционала Ω на K_T только при малых $T > 0$, но, вообще говоря, не обеспечивает его положительную определенность при больших T. Как найти множества соответствующих T ?

Нижеследующая схема рассуждений предложена американским математиком Хестенсом в 1930-х годах. Читателю предоставляется возможность оценить ее естественность, красоту и общность.

Теория сопряженных точек

Основная идея здесь следующая. Будем изменять T, т.е. будем двигать правый конец отрезка $[0,T]$. Заметим, что при увеличении T подпространство K_T расширяется (в нестрогом смысле), т.е. если $T < T'$, то $K_T \subset K'_T$, ибо любую функцию $u \in K_T \subset L_2[0,T]$ можно, продолжив нулем на $[T,T']$, рассматривать как элемент $L_2[0,T']$, при этом соответствующее "новое" решение $x(t)$ уравнения (17) (с условием $x(T')=0$) будет, очевидно, равняться нулю на $[T,T']$ и совпадать со "старым" решением на $[0,T]$; в частности, по-прежнему будет $Cx(0)=0$, и следовательно, $u \in K'_T$. Поскольку "новая" пара $x(t), u(t)$ равна нулю на $[T,T']$, значение Ω не изменится. Таким образом, множество значений Ω на K_T содержится в множестве значений Ω на K'_T. Если среди значений Ω на K_T были отрицательные, то они сохранятся при любом $T' > T$, т.е. при возрастании T знакоопределенность функционала Ω на K_T не может улучшиться, а может только ухудшиться. Эта монотонность "знака" Ω является ключевым фактом, на котором будет строиться вся дальнейшая теория.

Замечание. Если бы у нас не было условия $x(T)=0$, такие рассуждения уже не прошли бы, так как на дополнительном отрезке $[T,T']$ пара $x(t), u(t)$ не была бы нулевой, поэтому значение Ω могло бы измениться, и мы бы не получили монотонности "знака" Ω. В этом случае вся нижеследующая схема нуждалась бы в довольно громоздкой модификации (чтобы все-таки восстановить утраченную монотонность!), которую мы здесь не рассматриваем, чтобы второстепенные технические конструкции не отвлекали нас от существа дела.

Будем предполагать, что усиленное условие Лежандра выполнено на любом отрезке $[0,T]$, т.е. что $\forall\, T>0 \;\; \exists\, a(T)>0$, такое что

$$R(t) \;\geqslant\; a(T)E \qquad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \tag{22a}$$

Положим $T_0 = \sup\{\, T :\ \Omega$ положительно определен на $K_T \,\}$.
По теореме 4 $T_0 > 0$ (и не исключен случай $T_0 = +\infty$).

Нетрудно показать, что $\Omega \geqslant 0$ на K_{T_0}. (Здесь надо использовать тот факт, что $\bigcup_{T<T_0} K_T$ плотно в K_{T_0}, который вытекает из леммы о плотности.).

Оказывается, при выполнении усиленного условия Лежандра существует ненулевой элемент $\hat u \in K_{T_0}$, для которого $\Omega(\hat u)=0$. Этот факт мы назовем *прохождением функционала Ω через ноль.* Для его установления удобно ввести следующие понятия, которые представляют и самостоятельный интерес.

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задан квадратичный функционал $\Omega(u) = (G\,u, u)$, где $G : H \to H$ – симметричный линейный ограниченный оператор. Такой (как и любой другой) функционал называется *слабо полунепрерывным снизу*, если из $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0$ вытекает $\underline{\lim}\, \Omega(u_n) \geqslant \Omega(u_0)$.

Определение (Хестенс). Функционал Ω называется *лежандровым*, если он слабо полунепрерывен снизу, и из $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0$, $\Omega(u_n) \to \Omega(u_0)$ вытекает $u_n \Longrightarrow u_0$ (сходимость по норме).

Упражнение. Покажите, что в обоих этих определениях можно считать $u_0 = 0$.

Лемма 1. Пусть лежандровый функционал Ω положителен на замкнутом подпространстве $K \subset H$ (т.е. $\Omega(u) > 0$ для всех ненулевых $u \in K$). Тогда он положительно определен на K (т.е. выполнена оценка (21) с некоторым $c > 0$).

Доказательство. Допустим, положительной определенности нет, т.е. $\exists\, u_n \in K$, для которых $\Omega(u_n) \leqslant o(||u_n||^2)$. Считая в силу однородности, что $||u_n|| = 1$, имеем $\Omega(u_n) \leqslant o(1)$, и тогда $\Omega(u_n) \to 0$. Поскольку единичный шар в H есть слабый компакт, считаем, что $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0$, где $||u_0|| \leqslant 1$. Так как K выпукло и замкнуто, то оно и слабо замкнуто, поэтому $u_0 \in K$. Из слабой полунепрерывности Ω на K получаем $\Omega(u_0) \leqslant 0$, но так как < 0 быть не может, $\Omega(u_0) = 0$. Таким образом, $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ и $\Omega(u_n) \to 0$. Отсюда в силу лежандровости $u_n \Longrightarrow 0$, что противоречит равенству $||u_n|| = 1$. □

Итак, для лежандрового квадратичного функционала положительность и положительная определенность — это одно и то же.

Для функционала Ω вида (16) (концевой плюс интегральный) имеет место следующая

Теорема 5.

а) Ω слабо полунепрерывен снизу на K $\Longleftrightarrow$ выполнено условие Лежандра.

б) Ω лежандров на K $\Longleftrightarrow$ выполнено усиленное условие Лежандра.

Доказательство импликаций $\Longleftarrow$ довольно простое; здесь надо использовать тот факт (сам по себе интересный, докажите!), что из $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0$ следует, что $x_n \rightrightarrows x_0$ (равномерно). Доказательство импликаций $\Longrightarrow$ надо проводить от противного аналогично доказательству необходимого условия Лежандра. Мы оставляем это читателю в качестве упражнений. □

Установим еще одно свойство лежандрового функционала вида (16). Напомним, что согласно (22a) он является лежандровым на K_T при любом $T > 0$.

Лемма 2. Пусть лежандровый функционал Ω положительно определен на K_T . Тогда $\exists\, T' > T$, такое что Ω положительно определен и на $K_{T'}$ (т.е. положительная определенность сохраняется на чуть бо́льшем отрезке).

Доказательство. Возьмем любую монотонную последовательность $T_n \to T + 0$. Допустим, что $\forall\, n$ на подпространстве K_{T_n} положительной определенности (а значит и положительности) нет, т.е. $\exists\, u_n \in K_{T_n}$, $||u_n|| = 1$, для которой $\Omega(u_n) \leqslant 0$.

Так как все $u_n \in K_{T_1}$, а единичный шар в $L_2[0,T_1]$ есть слабый компакт, считаем, что $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0 \in L_2[0,T_1]$, где $||u_0|| \leqslant 1$. Более того, для любого m при $n \geqslant m$ имеем $u_n \in L_2[0,T_m]$, поэтому $u_0 \in L_2[0,T_m]$ (в силу слабой замкнутости $L_2[0,T_m]$ в $L_2[0,T_1]$), а тогда $u_0 \in \bigcap_m L_2[0,T_m] = L_2[0,T]$. Так как подпространство K_{T_1} слабо замкнуто, то $u_0 \in K_{T_1}$, и поэтому $u_0 \in L_2[0,T] \bigcap K_{T_1} = K_T$.

Из слабой полунепрерывности Ω получаем $\Omega(u_0) \leqslant \underline{\lim}\, \Omega(u_n) \leqslant 0$, но так как на K_T по условию Ω положителен, то $u_0 = 0$, $\Omega(u_0) = 0$.

Таким образом, $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ и $\Omega(u_n) \to 0$. Отсюда в силу лежандровости $u_n \Longrightarrow 0$, что противоречит равенству $||u_n|| = 1$. □

Из этой леммы и определения T_0 вытекает, что Ω не может быть положительным на K_{T_0}, т.е. существует ненулевая $\hat{u} \in K_{T_0}$, на которой $\Omega(\hat{u}) = 0$. Поскольку $\Omega \geqslant 0$ на K_{T_0}, данная $\hat{u}$ доставляет минимум Ω на всем K_{T_0}, и следовательно, должна удовлетворять необходимому условию минимума — уравнению Эйлера–Лагранжа.

Покажем, что при $T < T_0$ не может существовать ненулевой $\hat{u} \in K_T$, удовлетворяющей уравнению Эйлера–Лагранжа для Ω на K_T. Это вытекает из следующего простого факта.

Лемма 3. Пусть в гильбертовом пространстве H точка u_0 является стационарной для квадратичной формы $\Omega(u) = (Q\,u, u)$ на подпространстве K, т.е. удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче $\Omega(u) \to \min$, $u \in K$. Тогда $\Omega(u_0) = 0$.

Доказательство. Так как функционал Ω дифференцируем по любому направлению, а K есть подпространство, стационарность u_0 означает, что $\forall\, \bar{u} \in K$ выполнено равенство $\Omega'(u_0)\,\bar{u} = 0$. Возьмем $\bar{u} = u_0$. Так как $\Omega'(u_0)\,u_0 = 2\,\Omega(u_0)$ (формула Эйлера для однородных функционалов), то $\Omega(u_0) = 0$. (Можно просто рассмотреть функцию $\varphi(t) = \Omega(t\,u_0) = t^2\,\Omega(u_0)$, для которой точка $t_0 = 1$ является стационарной.) □

Из этой леммы следует, что если бы при некотором $T < T_0$ существовало ненулевое решение u_0 уравнения Эйлера–Лагранжа для Ω на K_T, то мы бы имели $\Omega(u_0) = 0$, что невозможно в силу положительности Ω на K_T при всех $T < T_0$.

Таким образом, T_0 есть первая точка среди всех $T > 0$, для которых уравнение Эйлера–Лагранжа для Ω на K_T имеет ненулевое (т.е. нетривиальное) решение (тривиальное решение $u \equiv 0$ имеется всегда). Такая точка называется *сопряженной* (иногда *фокальной*) с точкой $T = 0$. Что же мы получили? Вспомним, что определение T_0 имело "дескриптивный" характер, не дающий эффективного способа ее нахождения, а теперь мы пришли к тому, что она может быть найдена путем решения конкретного уравнения!

Прежде чем выписать это уравнение, введем еще одно понятие, связанное с линейной системой

$$\dot{x} = A(t)\,x \,+\, B(t)\,u. \tag{23}$$

Определение. Система (23) называется *управляемой* на отрезке $[0,T]$, если для любых векторов $a_0, a_T \in \mathbb{R}^n$ найдется $u \in L_2[0,T]$, для которой решение уравнения (23) с начальным условием $x(0)=a_0$ имеет концевое значение $x(T)=a_T$.

Другими словами, любые две точки пространства $\mathbb{R}^n$ можно соединить решением системы (23) с некоторым управлением $u(t)$. (Покажите, что в этом определении можно положить либо $a_0=0$, либо $a_T=0$.)

Имеется следующий критерий управляемости системы (23).

Лемма 4. Система (23) неуправляема на отрезке $[0,T]$ $\Longleftrightarrow$ существует ненулевая липшицевая вектор-функция $\psi(t)$, для которой одновременно выполнены два равенства (если считать ψ вектор-строкой):

$$\dot{\psi} = -\psi A, \qquad \psi\, B = 0 \qquad \text{п.в. на} \quad [0,T]. \tag{24}$$

или (если считать ψ вектор-столбцом):

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \qquad B^*\psi = 0 \qquad \text{п.в. на} \quad [0,T]. \tag{24$'$}$$

(Мы надеемся, что эта неоднозначность в представлении ψ не вызовет недоразумений.)

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть такое $\psi \neq 0$ есть. Тогда для любого решения системы (23) $(\psi\, x)^{\boldsymbol{\cdot}} = -\psi A x + \psi(Ax+Bu) = 0$, поэтому $\psi(0)\,x(0) = \psi(T)\,x(T)$. Отсюда следует, что если $x(0)=0$, то $\psi(T)\,x(T)=0$, т.е. концевой вектор $x(T)$ всегда лежит в подпространстве, ортогональном ненулевому вектору $\psi(T)$, а это означает, что управляемости нет.

($\Longrightarrow$) Пусть нет управляемости, т.е. множество правых концов $L=\{x(T)\}$ всевозможных решений системы (23) с начальным условием $x(0)=0$ не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Тогда L – собственное подпространство, и существует ненулевой вектор $\xi \perp L$. Пусть липшицева функция $\psi(t)$ есть решение уравнения $\dot{\psi} = -\psi A$ с конечным условием $\psi(T)=\xi$ (такая ψ заведомо существует). Тогда для любого решения системы (23) $(\psi\, x)^{\boldsymbol{\cdot}} = \psi B u$, поэтому

$$\psi(T)\,x(T) - \psi(0)\,x(0) \;=\; \int_0^T \psi B u\, dt.$$

Если $x(0)=0$, то $x(T)\in L$, поэтому $\psi(T)=\xi \perp x(T)$, и тогда $\int_0^T \psi B u\, dt = 0$. Так как это выполнено $\forall\, u \in L_2[0,T]$, то $\psi(t)B(t)=0$ п.в. на $[0,T]$, т.е. $\psi(t)$ есть ненулевое решение системы (24). □

Замечание. Для выписывания системы (24) нет надобности составлять матрицы A, B, соответствующие системе (23), что бывает довольно неудобно при больших размерностях. Гораздо проще составить "укороченную" функцию Понтрягина $H=\psi(Ax+Bu)$ и написать уравнения $-\dot{\psi} = H_x$, $H_u = 0$. Это и есть система (24).

Далее будем предполагать, что наша система (23) управляема на отрезке $[0,T]$ при любом $T>0$. Выпишем уравнение Эйлера–Лагранжа (необходимое условие минимума) для Ω на K_T. Для квадратичного функционала оно называется также уравнением Эйлера–Якоби.

Пусть c_j есть строки матрицы C, т.е. ограничение (18) в левом конце может быть записано в виде $c_j\, x(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$ Без нарушения общности считаем, что векторы c_j линейно независимы.

Выполнение уравнения Эйлера–Лагранжа для функции $u \in L_2[0,T]$ и соответствующего $x \in AC[0,T]$ означает, что $\exists\, \alpha \geqslant 0, \quad \beta \in \mathbb{R}^m$ и липшицева функция $\psi(t)$ (которую здесь удобнее считать вектор-столбцом), такие что $\alpha + |\beta| > 0$ (набор нетривиален), и для функции Понтрягина

$$H = \psi(Ax + Bu) - \frac{\alpha}{2}\,((Qx, x) + 2(Px, u) + (Ru, u))$$

и концевой функции Лагранжа

$$l(x_0) = \frac{\alpha}{2}\,(Sx(0), x(0)) + \sum \beta_j\,(c_j,\, x(0))$$

должны выполняться равенства:

$$-\dot{\psi} = H_x \;=\; A^*\psi - \alpha(Qx + P^*u), \tag{25}$$

$$H_u \;=\; B^*\psi - \alpha(Px + Ru) = 0, \tag{26}$$

$$\psi(0) = l_{x(0)} = \;\alpha Sx(0) + \sum \beta_j\, c_j\,. \tag{27}$$

Покажем, что в предположении управляемости системы (23) здесь всегда $\alpha > 0$. Действительно, если $\alpha = 0$, то (25) и (26) превращаются в равенства $(24')$, которым может удовлетворять лишь $\psi(t) \equiv 0$. Тогда (27) дает $\sum \beta_j\, c_j = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов c_j вытекает, что все $\beta_j = 0$, и тогда нарушено условие нетривиальности. (Фактически здесь мы доказали, что при управляемости системы (23) и линейной независимости векторов c_j ограничения равенства (17, 18) невырождены.)

Итак, $\alpha > 0$, поэтому полагаем $\alpha = 1$, и тогда (25)–(27) превращаются в равенства

$$-\dot{\psi} \;=\; A^*\psi - Qx - P^*u, \tag{28}$$

$$B^*\psi - Px - Ru = 0, \tag{29}$$

$$\psi(0) = \; Sx(0) + \sum \beta_j\, c_j\,. \tag{30}$$

Если считать, что равенство $Cx(0) = 0$ задает подпространство $M \subset \mathbb{R}^n$, то условие трансверсальности (30) может быть записано так: $\psi(0) - Sx(0) \perp M$.

Заметим, что усиленное условие Лежандра позволяет выразить из равенства (29) управление u через x и ψ : $\quad u = R^{-1}(B^*\psi - Px)$. Подставив это выражение в (23) и (28), мы получим систему линейных однородных уравнений относительно $2n-$ мерного переменного (x, ψ) вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t)\, x + \mathcal{B}(t)\, \psi, \qquad \dot{\psi} = \mathcal{C}(t)\, x + \mathcal{D}(t)\, \psi, \tag{31}$$

с некоторыми измеримыми ограниченными матрицами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.
На правом конце имеются n условий: $x(T)=0$, а $\psi(T)$ свободно; на левом также есть n условий: $x(0)\in M$ (m условий) и $\psi(0)-Sx(0)\perp M$ ($n-m$ условий). Итого $2n$ краевых условий.

Напомним, что для нахождения сопряженной точки T_0 нас интересует ненулевое $u\in L_2[0,T]$, удовлетворяющее соотношениям (17), (18), (28)–(30). Во что превращается нетривиальность u при переходе к системе (31) относительно $x,\,\psi$?

Лемма 5. Нетривиальность функции $u(t)$ эквивалентна нетривиальности пары функций $(x(t),\,\psi(t))$.

Доказательство. Если $u(t)\equiv 0$, то в силу (17) $x(t)\equiv 0$, тогда (28), (29) превращаются в (24′), откуда в силу управляемости $\psi(t)\equiv 0$, ч.т.д.

Обратно: если $x(t)\equiv\psi(t)\equiv 0$, то в силу (29) $u(t)\equiv 0$. □

Итак, для нахождения T_0 нам надо искать ненулевую пару функций $(x(t),\,\psi(t))$, удовлетворяющую однородной системе (31), условиям на левом конце

$$x(0)\in M, \qquad \psi(0)-Sx(0)\perp M, \tag{32}$$

и условию $x(T)=0$ на правом конце.

Это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $2n-$ мерные вектор-столбцы $(f_i,\,g_i)$, где $f_i\in\mathbb{R}^n$, $g_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,n$, образуют базис в подпространстве $M\times M^{\perp}\subset\mathbb{R}^{2n}$. Из вектор-столбцов f_i составим $n\times n-$ матрицу F, а из вектор-столбцов g_i составим $n\times n-$ матрицу G. Для любого i пара функций $(x_i(t),\,\psi_i(t))$, удовлетворяющая системе (31) и начальным условиям $x_i(0)=f_i$, $\psi_i(0)-Sx_i(0)=g_i$, будет ненулевой, и эти пары образуют базис в пространстве решений системы (31) с условиями (32) на левом конце. Любая нетривиальная линейная комбинация таких пар также будет ненулевой, и нам остается лишь найти такую комбинацию, у которой $x(T)=0$. Для этого надо рассмотреть матричные решения $X(t),\,\Psi(t)$ системы (31) с начальными условиями $X(0)=F$, $\Psi(0)-SX(0)=G$, и искать первую точку T, в которой

$$\det X(T)=0\,. \tag{33}$$

Это и есть уравнение для нахождения сопряженной точки T_0. Таким образом, вопрос об определении точной границы, до которой простирается положительная определенность Ω, полностью разрешен.

Пусть теперь T_0 найдена. Что будет при $T>T_0$? Будет ли сразу Ω иметь отрицательные значения на K_T, или какое-то время продержится $\Omega\geqslant 0$?

Вообще говоря, возможно и то, и другое. Для упрощения ситуации примем здесь еще одно предположение. Будем называть систему (23) *вполне управляемой,* если она управляема на любом отрезке $[T',T]$, $0\leqslant T'<T$ (а не только при $T'=0$).

Лемма 6. Пусть система (23) вполне управляема. Тогда $\forall\,T>T_0$ найдется $u\in K_T$, для которой $\Omega(u)<0$.

Доказательство. Пусть $\hat u \neq 0$ есть решение уравнения Э–Л для Ω на K_{T_0}. Как мы знаем, $\Omega(\hat u) = 0$. Возьмем любое $T > T_0$ и продолжим $\hat u(t)$ и соответствующий $\hat x(t)$ нулем на $[T_0, T]$. Тогда $\hat u \in K_T$, и по-прежнему $\Omega(\hat u) = 0$. Мы утверждаем, что на отрезке $[0,T]$ функция $\hat u$ уже не является решением уравнения Э–Л. Действительно, если уравнение Э–Л выполнено с некоторой функцией $\psi(t)$, то в силу (28), (29) на отрезке $[T_0, T]$ получаем соотношения (24), из которых в силу управляемости системы (23) на этом отрезке следует, что на нем $\psi(t) = 0$, и в частности, $\psi(T_0) = 0$. Но так как по условию $\hat x(T_0) = 0$ и пара $\hat x, \psi$ удовлетворяет на $[0, T_0]$ однородной системе (31), то $\hat x(t) = 0$, $\psi(t) = 0$ на всем отрезке $[0, T_0]$, а тогда и $\hat u(t) = 0$, противоречие. Итак, $\hat u$ не удовлетворяет необходимому условию минимума для Ω на K_T, и следовательно, она не является точкой минимума. Поскольку $\Omega(\hat u) = 0$, найдется $u \in K_T$, для которой $\Omega(u) < 0$. $\square$

Итак, для вполне управляемой системы положение сопряженной точки T_0 полностью определяет "знак" функционала Ω на подпространстве K_T:

если $T < T_0$, то Ω положительно определен на K_T,
если $T = T_0$, то $\Omega \geqslant 0$ на K_T, и $\exists\, \hat u \in K_T: \ \hat u \neq 0, \quad \Omega(\hat u) = 0$,
а если $T > T_0$, то $\exists\, u \in K_T: \ \Omega(u) < 0$.

Покажем, что в задачах КВИ полная управляемость всегда есть. Для простейшей задачи КВИ система (23) имеет вид $\dot x = u$. Управляемость этой системы (даже для случая $x \in \mathbb{R}^n$) очевидна. Можно проверить и критерий из леммы 4. Здесь система (24) $\dot\psi = 0$, $\psi = 0$ уже сама содержит равенство $\psi = 0$.

Для задач КВИ со старшими производными система (23) имеет вид

$$\dot x_1 = x_2\,, \qquad \dot x_2 = x_3\,, \qquad \ldots\ldots \qquad \dot x_{k-1} = x_k\,, \qquad \dot x_k = u.$$

Непосредственная проверка управляемости на любом отрезке не совсем очевидна. Проверим критерий из леммы 4. Для этого напишем "укороченную" функцию $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \ldots + \psi_{k-1} x_k + \psi_k u$, и тогда система (24) имеет вид

$$-\dot\psi_1 = 0, \quad -\dot\psi_2 = \psi_1\,, \quad -\dot\psi_3 = \psi_2\,, \quad \ldots\,, \quad -\dot\psi_k = \psi_{k-1}\,, \quad H_u = \psi_k = 0.$$

Из последнего равенства $\psi_k = 0$, двигаясь по цепочке влево, получаем $\psi_{k-1} = 0$, $\psi_{k-2} = 0$, $\ldots$, $\psi_2 = 0$, $\psi_1 = 0$.

Таким образом, изложенная выше теория применима по крайней мере ко всем задачам КВИ.

В заключение этой темы рассмотрим несколько примеров.

В **примере 1** (см. выше) имеем $H = \psi u - \frac12 u^2$, $l = -\frac12 x^2(0)$, поэтому $\dot\psi = 0$, $\psi - u = 0$, откуда $u = \psi = \mathrm{const}$, и так как мы ищем ненулевое решение, считаем $u(t) = 1$, $x(t) = t - T$ (с учетом концевого условия $x(T) = 0$), и тогда условие трансверсальности $\psi(0) = -x(0)$ дает $1 = T$. Наименьшее решение этого уравнения есть $T_0 = 1$.

Пример 2 (гармонический осциллятор).

$$\Omega = \int_0^T (-x^2 + u^2)\, dt, \qquad \dot x = u, \qquad x(0) = x(T) = 0.$$

Здесь уравнение Э–Л есть $\dot\psi = -x, \quad \psi - u = 0,$ откуда $\ddot x = -x.$ Ненулевое решение этого уравнения с начальным значением $x(0) = 0$ с точностью до множителя есть $x(t) = \sin t,$ и первая точка $T,$ в которой выполнено правое граничное условие $\sin T = 0$ есть $T_0 = \pi$.

Пример 2'. Тот же пример, но со свободным левым концом $x(0)$. Здесь попрежнему $\ddot x = -x,$ но на левом конце имеется условие трансверсальности $\psi(0) = 0,$ т.е. $\dot x(0) = 0,$ что дает $x(t) = \cos t.$ Первая точка $T,$ в которой выполнено правое граничное условие $\cos T = 0$ есть $T_0 = \pi/2$.

Пример 3.

$$\Omega = \; s\, x^2(0) \; + \int_0^T (-x^2 + u^2)\, dt, \qquad \dot x = u, \qquad x(T) = 0.$$

Здесь опять $\ddot x = -x,$ и с учетом правого граничного условия получаем $x(t) = \sin(t - T).$ Условие трансверсальности (30) дает $\dot x(0) = s\, x(0),$ т.е. $\cos T = -s \sin T,$ или $-\operatorname{ctg} T = s.$ (Изобразите это на графике.)

Если $s = 0,$ то наименьшее $T = \pi/2$ (как и найдено ранее в примере $2'$) .
Если $s > 0,$ то $T_0 > \pi/2$ (что согласуется с тем, что $s > 0$ улучшает положительность Ω), и при $s \to +\infty$ сопряженная точка $T_0 \to \pi - 0.$
Если же $s < 0,$ то $T_0 < \pi/2$ (что согласуется с тем, что $s < 0$ ухудшает положительность Ω), и при $s \to -\infty$ сопряженная точка $T_0 \to 0+$.

Пример 4.

$$\Omega = \int_0^T (-x^2 + u^2)\, dt, \qquad \ddot x = u, \qquad x(0) = \dot x(0) = x(T) = \dot x(T) = 0.$$

Здесь для приведения к каноническому виду мы должны написать

$$\dot x = y, \qquad \dot y = u, \qquad x(0) = y(0) = x(T) = y(T) = 0.$$

Тогда $H = \psi_x\, y + \psi_y\, u - \frac12 (-x^2 + u^2),$ поэтому $-\dot\psi_x = x, \quad -\dot\psi_y = \psi_x\,, \quad \psi_y - u = 0,$ откуда $x^{(4)} = x,$ и значит

$$\begin{aligned} x(t) &= \; a\cos t + b \sin t + A \operatorname{ch} t + B \operatorname{sh} t,\\ \dot x(t) &= -a \sin t + b\cos t + A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Из условий $x(0) = \dot x(0) = 0$ получаем $a + A = 0, \;\; b + B = 0,$ поэтому

$$\begin{aligned} x(t) &= \; a(\cos t - \operatorname{ch} t) + b(\sin t - \operatorname{sh} t),\\ \dot x(t) &= -a(\sin t + \operatorname{sh} t) + b(\cos t - \operatorname{ch} t). \end{aligned}$$

Нетривиальность функции $u(t)$ с учетом концевых условий эквивалентна нетривиальности функции $x(t)$, которая эквивалентна нетривиальности пары (a, b).
При каких T существует ненулевая пара (a, b), для которой $x(T) = 0$ и $\dot{x}(T) = 0$? Эти два равенства представляют собой линейную однородную систему уравнений относительно (a, b), поэтому определитель этой системы должен равняться нулю:

$$(\cos T - \operatorname{ch} T)^2 + (\sin T - \operatorname{sh} T)(\sin T + \operatorname{sh} T) = 0,$$

что приводит к уравнению $\cos T \operatorname{ch} T = 1$, или, что то же самое, $\cos T = 1/\operatorname{ch} T$. Нетрудно показать, что при $T \leqslant \pi/2$ и тем более при $\pi/2 \leqslant T \leqslant 3\pi/2$ левая часть здесь меньше правой, поэтому ближайшее решение этого уравнения $T_0 \in (3\pi/2,\, 2\pi)$.

Пример 5.

$$\Omega = \int_0^T (-x^2 + u^2)\, dt, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(0) = x(T) = 0, \qquad \int_0^T x\, dt = 0.$$

Здесь для приведения к каноническому виду мы должны написать

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x, \qquad x(0) = y(0) = x(T) = y(T) = 0.$$

Система вполне управляема, поэтому полагаем $\alpha_0 = 1$. Тогда $H = \psi_x u + \psi_y x - \frac{1}{2}(-x^2 + u^2)$, поэтому $-\dot{\psi}_x = x + \psi_y$, $-\dot{\psi}_y = 0$, откуда $\psi_y = \text{const} = \beta$, а $\psi_x = \psi$ удовлетворяет уравнению $\dot{\psi} = -(x + \beta)$, т.е. $(x + \beta)^{\cdot\cdot} = -(x + \beta)$. Отсюда

$$x + \beta = a \sin t + b \cos t.$$

Из условия $x(0) = 0$ следует, что $\beta = b$, т.е. $x(t) = a \sin t + b(\cos t - 1)$.

Условие $\int_0^T x\, dt = 0$ означает

$$a(\cos T - 1) - b(\sin T - T) = 0, \tag{35}$$

а концевое условие $x(T) = 0$ дает равенство

$$a \sin T + b(\cos T - 1) = 0. \tag{36}$$

Функция $x(t)$ ненулевая тогда и только тогда, когда ненулевой будет пара (a, b). Равенства (35)–(36) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно a, b, поэтому она имеет ненулевое решение в том и только том случае, когда определитель матрицы этой системы равен 0:

$$(\cos T - 1)^2 + \sin T\,(\sin T - T) = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем: $T \sin T = 2(1 - \cos T)$, и далее,

$$\sin\frac{T}{2}\cos\frac{T}{2} = 2\sin^2\frac{T}{2}.$$

Если $\sin T/2 = 0$, то получаем $T = 2\pi$. Если же $\sin T/2 \neq 0$, то приходим к равенству $\operatorname{ctg} T/2 = 2/T$, которое не может выполняться при $T < 3\pi$, ибо $\operatorname{tg} x > x$, т.е. $\operatorname{ctg} x < 1/x$ при $0 < x < 3\pi/2$, так что минимальный корень $T_0 = 2\pi$.

Пример 6. $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega = \int_0^T (2P(x,u) + (u,u))\,dt, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(0) = x(T) = 0,$$

где P есть (кососимметричная) матрица поворота на $90°$.

Здесь $H = \psi u - (Px,u) - \frac{1}{2}(u,u)$, поэтому $-\dot{\psi} = Pu$, $\psi - Px - u = 0$. Из первого равенства получаем $\psi = -P(x+2c)$, а из второго $u = \psi - Px = -2P(x+c)$. Таким образом, $(x+c)^{\boldsymbol{\cdot}} = -2P(x+c)$. Это есть уравнение движения по окружности с центром в точке c и угловой скоростью 2, поэтому первый момент, когда $x(0) = x(T)$, есть $T_0 = \pi$. Это и будет сопряженная точка.

(Равенство $x(0) = 0$ достигается выбором радиуса окружности, равного $|c|$. Обратим внимание, что данное уравнение имеет не единственное решение — годится любая окружность, проходящая через 0.)

Пример 7. $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega = \int_0^T (-x_1^2 + u_1^2 + u_2^2)\,dt, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(T) = 0, \qquad x_1(0) + kx_2(0) = 0.$$

Здесь $H = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 - \frac{1}{2}(-x_1^2 + u_1^2 + u_2^2)$, $l = \beta(x_1(0) + kx_2(0))$, поэтому

$$-\dot{\psi}_1 = x_1\,, \qquad -\dot{\psi}_2 = 0\,, \qquad \psi_1 - u_1 = 0, \qquad \psi_2 - u_2 = 0.$$

Отсюда $\ddot{x}_1 = -x_1$, $\ddot{x}_2 = 0$, т.е. $x_1 = a\cos t + b\sin t$, $x_2 = ct + d$. Условия трансверсальности $\psi_1(0) = \beta$, $\psi_2(0) = k\beta$ дают $\dot{x}_2(0) = k\,\dot{x}_1(0)$. Отсюда и из левого граничного условия $x_1(0) + kx_2(0) = 0$ получаем $c = kb$, $a + kd = 0$, и таким образом (в случае $k \neq 0$),

$$x_1 = a\cos t + b\sin t, \qquad x_2 = b\,(kt) - a/k\,.$$

Мы ищем такое T, чтобы существовала ненулевая пара (a,b), для которой выполнялись бы концевые равенства $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$. Это опять линейная однородная система уравнений, определитель которой должен равняться нулю:
$kT\,\cos T + k^{-1}\,\sin T = 0$, т.е.

$$-\operatorname{ctg} T \;=\; \frac{1}{k^2\,T}\,.$$

Очевидно, первое решение этого уравнения $T_0(k) \in (\pi/2,\,\pi)$. При изменении k от нуля до $+\infty$ точка $T_0(k)$ монотонно убывает от π до $\pi/2$, т.е. $|k|$ работает на ухудшение положительности Ω. (Как увидеть это заранее?)

Литература

[ИТ] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.

[АТФ] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, Физматлит, 2006.

[КФ] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

[ОПУ] Оптимальное управление. Коллективная монография кафедры ОПУ (под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М., МЦНМО, 2008.