УДК 519.6, 517.9

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д. А. Силаев

Введение

Предлагается численно решить задачи математической физики, используя различные методы:

1. Посчитать по формуле, представляющей точное решение задачи в виде ряда.
2. Применить разностный метод.
3. Применить метод конечных элементов. В качестве конечных элементов использовать фундаментальные сплайны.

Построить графики, показывающие поведение решения. Сравнить различные методы между собой.

1. Уравнение колебания струны.

Рассматривается уравнение колебания жестко закреплённой струны (см.[1], [7])

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad \text{в области} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \tag{1.2}$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u_t\,|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.3}$$

Здесь a – постоянная скорость распространения звука в среде, u – отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные начальное отклонение и начальная скорость отклонения струны.

1.1 Метод разделения переменных. Точное решение исходной задачи.

Для получения точного решения исходной задачи (1.1)-(1.3) применим метод разделения переменных Фурье [7]. Будем искать решение в виде:

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение (1.1), получим

$$T''X = a^2 X'' T$$

Разделим это равенство на a^2TX. Тогда

$$T''/(a^2T) = X''/X = -\lambda^2. \tag{1.4}$$

Обратим внимание на то, что функция, стоящая в левой части равенства зависит от t, а в правой – от x. Следовательно, эти величины есть константа. Обозначим эту константу $-\lambda^2$. Рассмотрим правую часть равенства (1.4). Уравнение

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{при условиях} \qquad X(0) = X(1) = 0$$

имеет решение

$$X_k(x) = sin\pi kx, \qquad \lambda = \pi k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Тогда из левой части (1.4) следует, что

$$T_k'' + a^2\pi^2k^2T_k = 0$$

и

$$T_k(t) = A_k cos a\pi kt + B_k sin a\pi kt.$$

Используя линейность исходной задачи (линейная комбинация решений есть решение) отсюда получаем:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k cos a\pi kt + B_k sin a\pi kt) sin\pi kx. \tag{1.5}$$

Подставляя начальные условия (1.3), находим уравнения для определения A_k и B_k:

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k sin\pi kx = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-A_k a\pi k sin a\pi kt + B_k a\pi k cos a\pi kt) sin\pi kx\right)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a\pi k sin\pi kx = \psi(x).$$

Тем самым показано, что искомые A_k и B_k выражаются через коэффициенты Фурье разложений функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по синусам (т.е. функции $\varphi(x)$) и $\psi(x)$ продолжаются нечетным образом на отрезок $[-1,0]$ и получающиеся функции продолжаются периодическим образом с периодом 2). Искомые A_k и B_k определяются по следующим формулам:

$$A_k = 2\int_0^1 \varphi(x) sin\pi kx dx, \quad B_k = \frac{2}{a\pi k}\int_0^1 \psi(x) sin\pi kx dx. \tag{1.6}$$

Итак, ряд (1.5), где A_k и B_k определены (1.6), представляет точное решение задачи (1.1)-(1.3). Скорость сходимости этого ряда, а следовательно и применимость указанных формул для численных расчетов решения определяется гладкостью начальных функций $\varphi(x)$) и $\psi(x)$.

1.2 Разностные методы решения исходной задачи.

Пусть $t^n = n\tau$, $x_k = kh$, где τ, h - шаги сетки по времени и пространственной перменной. Обозначим через $u_k^n = u(t^n, x_k)$. Заменим дифференциальный оператор

$$lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} \tag{1.7}$$

разностным

$$(l^h u^h)_k^n = \frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\tau^2} - a^2\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} \tag{1.8}$$

Здесь u^h означает сужение функции u на сетку или сеточную функцию.

Задача 1. Проверить, что для любой гладкой функции $f(x)$

$$\frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2} = f_k'' + \frac{h^2}{12}f_k^{IV} + O(h^4) \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует, что

$$\|(l^h u^h) - (lu)^h\| \le C|h|^2, \quad \text{где} \quad |h|^2 = \tau^2 + h^2, \quad C = C(max(|u_{xxxx}|, |u_{tttt}|)).$$

В этом случае говорят, что разностный оператор (1.8) аппроксимирует дифференциальный (1.7) с порядком 2 [2].

Заметим, что

$$u_{tttt} = (a^2 u_{xx})_{tt} = (a^2(a^2 u_{xx}) = a^4 u_{xxxx}.$$

Поэтому

$$(l^h u^h)_k^n = (lu)_k^n + \frac{\tau^2}{12}(u_{tttt})_k^n - a^2\frac{h^2}{12}(u_{xxxx})_k^n + O(t^4) + O(h^4) =$$

$$= (lu)_k^n + \frac{a^2 h^2}{12}(u_{xxxx})_k^n(\frac{a^2\tau^2}{h^2} - 1) + O(t^4) + O(h^4).$$

При $h^2 = a^2\tau^2$ разностная схема

$$(l^h u^h)_k^n = \frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\tau^2} - a^2\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} = 0 \tag{1.10}$$

будет обладать 4-ым порядком аппроксимации.

Устойчивость разностной схемы (1.10) будем устанавливать на основании **спектрального** признака [3]. Будем искать решение (1.10) в виде $u_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$. Тогда

$$\lambda^n e^{ik\varphi}\{\frac{1}{\tau^2}(\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}) - \frac{a^2}{h^2}(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\} = 0$$

Так как $e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi} = -4sin^2\frac{\varphi}{2}$, то

$$\lambda^2 - 2\left(1 - 2a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\lambda + 1 = 0.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы $|\lambda| \le 1 + C\tau$. По теореме Виета $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Это означает, что если $D > 0$, то корни действительные и различные и тем самым схема окажется неустойчивой. Поэтому необходимо, чтобы корни были комплексно сопряженными и

$$D/2 = (1 - 2a^2 sin^2\frac{\varphi}{2})^2 - 1 = -4a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}(1 - \frac{a^2\tau^2}{h^2}sin^2\frac{\varphi}{2}) \le 0$$

Отсюда следует, что необходимо, чтобы было выполнено условие на шаги сетки

$$\frac{|a|\tau}{h} \le 1. \tag{1.11}$$

Заметим, что на границе устойчивости разностная схема (1.10) имеет 4-ый порядок аппроксимации.

1.3 Решение уравнения колебания струны методом конечных элементов, основанным на $S-$сплайн-аппроксимации.

Пусть $x_k = kh$, где h - шаг сетки по пространственной переменной. Начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из условия (1.3) продолжим нечетным образом на отрезок $[-1, 1]$, а затем периодическим образом на всю прямую. Приближенное решение задачи (1.1)-(1.3) будем искать в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k(t) S_k(x), \tag{1.12}$$

где $A_k(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения функции $u(t,x)$ по фундаментальной системе сплайнов $S_k(x)$. В качестве $S_k(x)$ будем брать полулокальные сглаживающие периодические с периодом 2 сплайны класса $\mathbf{C}^2$ (дважды непрерывно дифференцируемые), состоящие из полиномов 5-ой степени (см. Приложение). Подставим разложение (1.12) в уравнение (1.1). Имеем:

$$\sum_{k=0}^{K-1} A_k''(t)S_k(x) - a^2 A_k(t)S_k(x) = 0.$$

Это равенство умножим на $S_j(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[-1,1]$. Для нахождения коэффициентов $A_k(t)$ получим систему линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{k=0}^{K-1} a_{jk}A_k'' - a^2 b_{jk}A_k = 0, \qquad j = 0,1,\ldots,K-1, \tag{1.13}$$

где

$$a_{jk} = \int_{-1}^{1} S_k S_j dx, \qquad b_{jk} = \int_{-1}^{1} S_k'' S_j dx = -\int_{-1}^{1} S_k' S_j' dx,$$

так как из-за периодичности

$$S_j S_k'\big|_{-1}^{1} = 0.$$

Подставим начальные условия (1.3) в разложение (1.12). Получим:

$$\sum_{k=0}^{K-1} A_k(0)S_k(x) = \varphi(x), \qquad \sum_{k=0}^{K-1} A_k'(0)S_k(x) = \psi(x).$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов разложения $A_k(t)$ следует решить систему линейных дифференциальных уравнений (1.13) при начальных условиях:

$$A_k(0) = \varphi_k, \quad A_k'(0) = \psi_k, \qquad k = 0,1,\ldots,K-1, \tag{1.14}$$

где φ_k, ψ_k – коэффициенты приближенного разложения функций $\varphi(x), \psi(x)$ по фундаментальным сплайнам $S_k(x)$. Указанная система (1.13) может быть решена приближенно методом Рунге-Кутта высокого порядка аппроксимации [8].

1.4 Решение уравнения колебания струны методом характеристик. Точное аналитическое решение задачи.

Для уравнения колебания струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.15}$$

уравнение для характеристик ищется в виде:

$$(dx)^2 = a^2(dt)^2 \qquad , \tag{1.16}$$

откуда получается два семейства характеристик

$$\xi = x - at \quad \text{и} \quad \eta = x + at \tag{1.17}$$

(см. метод Даламбера [1],[7]). Если ξ и η принять за новые переменные, то

$$u_t = u_\xi(-a) + u_\eta a, \qquad u_x = u_\xi + u_\eta \quad ,$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}a^2 - 2u_{\xi\eta}a^2 + u_{\eta\eta}a^2, \qquad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \quad . \tag{1.18}$$

Подставляя (1.18) в (1.1), получим

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

откуда

$$u = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x - at) + F_2(x + at),$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции.

Теперь рассмотрим уравнение (1.15) с граничными условиями

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=1} = 0 \quad . \tag{1.19}$$

и начальными условиями (1.3). Из п. 1.1 мы видели, что аналитическое решение задачи (1.1)-(1.3) представляет из себя линейную комбинацию периодических с периодом 2 нечетных функций. Поэтому мы можем свести краевую задачу (1.1)-(1.3) к решению задачи Коши, если начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжим на отрезок $[-1, 0]$ нечетным образом, а затем периодически с периодом 2 на всю прямую. Так продолженные функции будем обозначать теми же буквами. Из начальных условий следует, что

$$F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x), \quad -aF_1'(x) + aF_2'(x) = \psi(x).$$

Решая эту систему, находим, что

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta)d\zeta \quad , \tag{1.20}$$

где φ и ψ - продолженные начальные функции.

Особенно физически просто выглядит решение, если $\psi = 0$: начальная функция φ делится пополам, каждая из половинок двигается со скоростью a, одна – вправо, а другая – влево, а затем эти две "бегущие волны"складываются. Решение симметрично относительно замены времени t на $-t$. Гладкость сохраняется для любого момента времени.

2. Уравнение теплопроводности.

Рассмотрим уравнение теплопроводности (см.[1],[7])

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad \text{в области} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \tag{2.2}$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.3}$$

Здесь a^2 – постоянный коэффициент теплопроводности , $u(t, x)$ – искомая температура в точке x в момент времени t, $\varphi(x)$ – заданная температура в начальный момент времени.

2.1 Метод разделения переменных. Точное аналитическое решение задачи.

Для получения точного решения исходной задачи (2.1)-(2.3) применим метод разделения переменных Фурье [7]. Будем искать решение в виде:

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение (2.1), получим

$$T'X = a^2X''T$$

Разделим это равенство на a^2TX. Тогда

$$T'/(a^2T) = X''/X = -\lambda^2. \tag{2.4}$$

Обратим внимание на то, что функция, стоящая в левой части равенства зависит от t, а в правой – от x. Следовательно, эти величины есть константа. Обозначим эту константу $-\lambda^2$. Рассмотрим правую часть равенства (2.4). Уравнение

$$X'' + \lambda^2X = 0 \quad \text{при условиях} \qquad X(0) = X(1) = 0$$

имеет решение

$$X_k(x) = sin\pi kx, \qquad \lambda = \pi k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Тогда из левой части (2.4) следует, что

$$T_k' + a^2\pi^2k^2T_k = 0$$

и

$$T_k(t) = A_ke^{-a^2\pi^2k^2t}.$$

Используя линейность исходной задачи (линейная комбинация решений есть решение) отсюда получаем:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_ke^{-a^2\pi^2k^2t}sin\pi kx. \tag{2.5}$$

Подставляя начальное условие (2.3), находим уравнения для определения A_k :

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_ksin\pi kx = \varphi(x),$$

Тем самым показано, что искомые A_k выражаются через коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi(x)$ по синусам (т.е. функции $\varphi(x)$) продолжаются нечетным образом на отрезок $[-1,0]$ и получающуюся функцию продолжается периодическим образом с периодом 2). Искомые A_k определяются по следующим формулам:

$$A_k = 2\int_0^1 \varphi(x)sin\pi kxdx, \quad . \tag{2.6}$$

Итак, ряд (2.5), где A_k определены (2.6), представляет точное решение задачи (2.1)-(2.3). Скорость сходимости этого ряда, а следовательно и применимость указанных формул для численных расчетов решения определяется гладкостью начальной функции $\varphi(x)$) .

2.2 Метод характеристик. Интеграл Пуассона.

Другой вид точного аналитического решения можно получить, решая задачу Коши для уравнения (2.1). Для этого начальную функцию $\varphi(x)$) продолжим нечетным образом на отрезок $[-1, 0]$, а затем периодическим образом (с периодом 2) на всю прямую. Так полученную функцию обозначим $\widetilde{\varphi(x)}$. Решение задачи Коши даёт интеграл Пуассона [6], [7]:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi(\xi)} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad . \tag{2.7}$$

Вычисление интеграла трудоёмко, особенно в окрестности $t = 0$. Предпочтительнее использовать другие численные методы, например, разностные методы.

Замечание. Обратим внимание, что интеграл берётся по всей прямой. Это связано с тем, что единственная характеристика уравнения (2.1) параллельна оси x, или, другими словами, скорость распространения возмущения (или звука) в уравнении равна бесконечности.

2.3 Разностные методы решения задачи распространения тепла.

2.3.1 Явная разностная схема.

Пусть $t^n = n\tau, x_k = kh$, где τ, h – шаги сетки по времени и пространственной переменной x, $u_k^n = u(t^n, x_k)$ – сеточная функция, $Kh = 1$. Заменим дифференциальное уравнение (2.1) явной разностной схемой [3]:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} \quad , k = 1, 2, \dots K-1 \tag{2.8}$$

с условиями

$$u_k^0 = \varphi(x_k), \quad u_0^{n+1} = u_K^{n+1} = 0 \quad . \tag{2.9}$$

Порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$.

Условие устойчивости. Подставляя $u_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$ в уравнение (2.8), получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = a^2 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h^2} = -4 \frac{a^2 sin^2 \frac{\varphi}{2}}{h^2} \quad .$$

Отсюда $\quad \lambda = 1 - 4\frac{a^2\tau}{h^2} sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad$. Из условия $|\lambda| \leq 1 + C\tau$ следует, что

$$\frac{a^2\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad . \tag{2.10}$$

Условие (2.10), в частности, означает, что при уменьшении шага h в 10 раз следует шаг по времени τ уменьшить в 100 раз (см. *Замечание* предыдущего пункта). Это требование весьма ограничительно при реальных вычислениях.

2.3.2 Неявная разностная схема.

В случае неявной схемы уравнение (2.8) заменяется следующим:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots K-1, \quad K = \frac{1}{h} \quad . \tag{2.11}$$

Это уравнение дополняется условиями (2.9).

Порядок аппроксимации как и для явной схемы $O(\tau, h^2)$.

Условие устойчивости. Подставляя $u_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$ в уравнение (2.11), получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = a^2 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h^2}\lambda = -4\frac{a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}}{h^2}\lambda \quad .$$

Отсюда $|\lambda| = \frac{1}{1+4\frac{a^2\tau}{h^2}sin^2\frac{\varphi}{2}} \leq 1$ для любых φ. Схема безусловно устойчивая.

Систему линейных уравнений (2.11),(2.9) запишем в виде:

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k + c_k y_{k-1} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots K - 1, \tag{2.12}$$

$$a_0 y_1 + b_0 y_0 = d_0, \quad b_K y_K + c_K y_{K-1} = d_K, \quad \text{где} \tag{2.13}$$

$$y_k = u_k^{n+1}, \quad a_k = c_k = -\frac{a^2\tau}{h^2}, \quad b_k = 1 + 2\frac{a^2\tau}{h^2}, \quad d_k = u_k^n, \quad a_0 = 0,$$
$$b_0 = 1, \quad d_0 = 0, \quad b_K = 1, \quad c_K = 0, \quad d_K = 0.$$

Система имеет диагональное преобладание, а именно $b_k > |a_k| + |c_k|$.

Для решения системы (4.1),(4.2) с трёхдиагональной матрицей разработан метод прогонки И.М.Гельфандом и О.В.Локуциевским в 1952 г [9] (см. Приложение 1).

2.4 Разностные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнения теплопроводности.

2.4.1 Разностная схема второго порядка аппроксимации.

Так как

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = (u_t)_k^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \quad , \tag{2.14}$$

то, смешивая с коэффициентом $\frac{1}{2}$ явную (2.8) и неявную (2.11) схемы, получим схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$ вида:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}\right), \quad k = 1, \ldots K - 1. \tag{2.15}$$

Это уравнение дополняется условиями (2.9). Система (2.15),(2.9) решается методом прогонки.

Условие устойчивости. Подставляя $u_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$ в уравнение (2.15), получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = a^2 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2h^2}(\lambda + 1) = -2\frac{a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}}{h^2}(\lambda + 1) \quad .$$

Пусть

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad . \tag{2.16}$$

Тогда

$$\mu = -2\frac{a^2\tau sin^2\frac{\varphi}{2}}{h^2} \leq 0 \quad \text{для любого} \quad \varphi \quad .$$

Так как конформное отображение (2.16) отображает внутренность единичного круга на левую полуплоскость [10], то тем самым безусловная устойчивость разностной схемы (2.15) установлена.

2.4.2 Разностная схема порядка аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности (2.1)

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad .$$

Так как

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = (u_{xx})_k + \frac{h^2}{12}(u_{xxxx})_k + O(h^4)$$

(см. Задачу 1 в п.1.2), а в силу уравнения (2.1)

$$u_{xx} = \left(\frac{u}{a^2}\right)_t \quad ,$$

то

$$(u_{xxxx})_k = \frac{1}{h^2}\left(\left(\left(\frac{u}{a^2}\right)_t\right)_{k+1} - 2\left(\left(\frac{u}{a^2}\right)_t\right)_k + \left(\left(\frac{u}{a^2}\right)_t\right)_{k-1}\right) + O(h^2).$$

В силу (2.14)

$$\frac{1}{2}\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{k+1}^{n} - 2u_k^{n} + u_{k-1}^{n}}{h^2} = \frac{1}{12}\frac{\left(\frac{u}{a^2}\right)_{k+1}^{n+1} - \left(\frac{u}{a^2}\right)_{k+1}^{n}}{\tau} +$$

$$+\frac{5}{6}\frac{\left(\frac{u}{a^2}\right)_{k}^{n+1} - \left(\frac{u}{a^2}\right)_{k}^{n}}{\tau} + \frac{1}{12}\frac{\left(\frac{u}{a^2}\right)_{k-1}^{n+1} - \left(\frac{u}{a^2}\right)_{k-1}^{n}}{\tau} \quad k = 1, 2, \ldots K-1, \quad K = \frac{1}{h} \quad , \tag{2.17}$$

(см. [11] с. 194 схема 12). Эта система дополняется условиями (2.9) и решается методом прогонки.

Порядок аппроксимации на решении уравнения (2.1) $O(\tau^2, h^4)$.

Условие устойчивости. Подставляя $u_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$ в уравнение (2.17), получим:

$$a^2\frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2h^2}(\lambda + 1) = \frac{1}{12}\frac{\lambda - 1}{\tau}(e^{i\varphi} + 10 + e^{-i\varphi}) = -2\frac{a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}}{h^2}(\lambda + 1) \quad .$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = -\frac{12\tau a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}}{(5 - cos\varphi)h^2} \leq 0$$

для любого φ. Тем самым безусловная устойчивость схемы установлена (см. предыдущий пункт).

2.5 Решение уравнения теплопроводности методом конечных элементов, основанным на $S-$сплайн-аппроксимации.

Рассмотрим уравнение теплопроводности (2.1)с условиями (2.2),(2.3). Начальную функцию $\varphi(x)$ продолжим нечетным образом на отрезок $[-1, 0]$, а затем периодически (с периодом 2) на всю прямую. Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k(t) S_k(x) \quad , \tag{2.18}$$

где $S_k(x)$ – фундаментальные периодические полулокальные сглаживающие сплайны класса $\mathbf{C}^2$. Подставляя выражение (2.18) в уравнение (2.1), получим:

$$\sum_{k=0}^{K-1}\left(A_k'(t)S_k(x) - a^2 A_k(t) S_k''(x)\right) = 0 \quad .$$

Домножим это равенство на $S_j(x)$ и проинтегрируем по x по отрезку $[-1,1]$. Получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$\sum_{k=0}^{K-1}\left(a_{jk}A_k'(t)+a^2b_{jk}A_k(t)\right)=0, \tag{2.19}$$

где

$$a_{jk}=\int\limits_0^1 S_k(x)S_j(x)dx \quad , \quad b_{jk}=\int\limits_0^1 S_k'(x)S_j'(x)dx$$

Здесь мы воспользовались нечетностью функций $S_k(x)$ и тем, что

$$b_{jk}=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 S_k''S_jdx=-\left.\frac{1}{2}S_k'(x)S_j(x)\right|_{-1}^1+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 S_k'S_j'dx=\int\limits_0^1 S_k'S_j'(x)dx \quad .$$

в силу периодичности $S_k(x)$ внеинтегральный член равен нулю. Полученная система (2.19) дополняется начальными условиями:

$$u(0,x)=\varphi(x)\approx\varphi^K(x)=\sum_{k=0}^{K-1}A_k(0)S_k(x) \quad ,$$

откуда

$$A_k(0)=\varphi_k \quad . \tag{2.20}$$

Здесь φ_k – коэффициенты разложения функции $\varphi^K(x)$ по $S_k(x)$, т.е.

$$\varphi^K(x)=\sum_{k=0}^{K-1}\varphi_kS_k(x) \quad .$$

Для гладких $\varphi\in\mathbf{C}^6$ известна оценка

$$\|\varphi-\varphi^K\|\le Ch^6 \quad ,$$

где h– шаг разбиения отрезка $[-1,1]$ [15].

Система дифференциальных уравнений (2.19) с начальными условиями (2.20) имеет точное аналитическое решение, а также может быть решено с высокой точностью методом Рунге-Кутта [8].

3. Уравнение Пуассона.

Рассматривается уравнение Пуассона (см.[1], [7])

$$u_{xx}+u_{yy}=f \qquad \text{в области} \qquad \Omega=\{0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1\} \tag{3.1}$$

при граничных условиях

$$u\left|_{x=0}=u\right|_{x=1}=0 \quad , \tag{3.2}$$

$$u\left|_{y=0}=u\right|_{y=1}=0 \quad . \tag{3.3}$$

3.1 Метод разделения переменных. Спектральная задача.

Рассмотрим спектральную задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u \qquad \text{в области } \Omega \tag{3.4}$$

при граничных условиях (3.2), (3.3). Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad . \tag{3.5}$$

Подставляя выражение (3.5) в уравнение (3.4), получим

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y) \quad . \tag{3.6}$$

Разделим это равенство на произведение XY. Тогда

$$\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y}$$

при условиях (3.2), (3.3). Так как слева стоит функция, зависящая от x, а справа – от y, то это равенство возможно только если каждая из его частей есть константа. Получим

$$\frac{X''}{X} = \mu \quad , \quad \frac{Y''}{Y} = \nu \quad , \quad \lambda = \mu + \nu \quad .$$

Решая спектральные задачи

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \quad , \quad X(0) = X(1) = 0 \quad , \tag{3.7}$$

$$Y''(x) - \nu Y(x) = 0 \quad , \quad Y(0) = Y(1) = 0 \quad , \tag{3.8}$$

получим, что

$$X_m = sin\pi mx \quad , \mu_m = -\pi^2 m^2 \quad , Y_s = sin\pi sy \quad , \nu_s = -\pi^2 s^2 \quad , \lambda_{ms} = \mu_m + \nu_s \quad . \tag{3.9}$$

3.2 Метод разделения переменных. Точное решение задачи Пуассона .

Решение исходной задачи Пуассона $u(x, y)$ будем искать в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{m,s=1}^{\infty} u_{ms} sin\pi mx sin\pi sy \quad . \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в уравнение (3.1) имеем

$$\sum_{m,s=1}^{\infty} (-\pi^2 m^2 - \pi^2 s^2) u_{ms} sin\pi mx sin\pi sy = \sum_{m,s=1}^{\infty} a_{ms} sin\pi mx sin\pi sy \quad ,$$

где a_{ms} есть коэффициенты разложения функции $f(x, y)$ в двумерный ряд Фурье по синусам, т.е. функция f продолжена нечетным образом в область $(-1, 1) \times (-1, 1)$, а затем периодическим образом с периодом 2 на всю плоскость.

В качестве примера рассмотрим случай $f(x, y) \equiv 1$. В этом случае вся плоскость распадается на квадратики размера 1×1, внутри каждого из которых функция определена либо $+1$, либо -1. Обратите внимание на то, что эта функция терпит разрыв на границе квадратика, поэтому сходимость соответствующего ряда Фурье будет крайне медленной. Легко показать, что

$$a_{2i+1,2j+1} = \frac{-16}{\pi^2(2i+1)(2j+1)} \quad , \quad i, j = 0, 1, ...$$

и

$$u_{2i+1,2j+1}=\frac{16}{\pi^2(2i+1)(2j+1)[(2i+1)^2+(2j+1)^2]} \quad , \quad i,j=0,1,...$$

Все остальные $u_{ms}=0$. В результате

$$u(x,y)=\sum_{i=0,j=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2i+1)(2j+1)[(2i+1)^2+(2j+1)^2]}sin\pi(2i+1)xsin\pi(2j+1)y \quad . \quad (3.11)$$

3.3 Разностный метод решения задачи Пуассона .

Обозначим через $u_{k,m}=u(x_k,y_m)$, где $x_k=kh, y_m=mh$. Рассмотрим следующую разностную задачу

$$\frac{u_{k+1,m}-2u_{k,m}+u_{k-1,m}}{h^2}+\frac{u_{k,m+1}-2u_{k,m}+u_{k,m-1}}{h^2}=f_{k,m} \quad (3.12)$$

Здесь $1\le k,m\le K-1, Kh=1$, $f_{k,m}=f(x_k,y_m)$. Система уравнений (3.12) дополняется граничными условиями

$$u_{0,m}=u_{K,m}=u_{k,0}=u_{k,K}=0 \quad . \quad (3.13)$$

Как показано в ([2], [3]), разностная задача (3.12),(3.21) аппроксимирует дифференциальную задачу (3.1),(3.2) с порядком $O(h^2)$, разностное уравнение является устойчивым и решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной при $h\to 0$.

3.3.1 Численные методы решения разностной задачи Пуассона .

Для малых K система (3.12),(3.21)может быть решена методом исключения Гаусса с выбором главного элемента. Метод матричный прогонки решает эту систему за $O(K^4)$ операций, однако требует $O(K^3)$ элементов оперативной памяти (см. [4]). Здесь мы остановимся на методе простой итерации. Рассмотрим разностное уравнение

$$\frac{u^{n+1}_{k,m}-u^n_{k,m}}{\tau}=\frac{u^n_{k+1,m}-2u^n_{k,m}+u^n_{k-1,m}}{h^2}+\frac{u^n_{k,m+1}-2u^n_{k,m}+u^n_{k,m-1}}{h^2}-f_{k,m} \quad (3.14)$$

Здесь $u^n_{k,m}=u(t^n,x_k,y_m), t^n=n\tau, x_k=kh, y_m=mh, \quad 1\le k,m\le K-1, Kh=1$, $f_{k,m}=f(x_k,y_m)$. Система уравнений (3.12) дополняется граничными условиями

$$u^n_{0,m}=u^n_{K,m}=u^n_{k,0}=u^n_{k,K}=0 \quad . \quad (3.15)$$

Эта система уравнений может быть интерпретирована как разностная задача для следующего параболического уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}-f \qquad \text{в области} \qquad \Omega=\{t>0, \qquad 0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1\} \quad (3.16)$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \quad , \quad (3.17)$$

$$u\,|_{y=0}=u|_{y=1}=0 \quad (3.18)$$

и начальном условии

$$u(0,x,y)=u_0(x,y) \quad . \quad (3.19)$$

Исследование устойчивости. Решение однородного уравнения (3.14)ищем в виде

$$u^n_{k,m}=\lambda^n e^{ik\varphi+im\psi}.$$

Тогда

$$\lambda = 1 - 4\frac{\tau}{h^2}(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2})$$

и из требования $|\lambda| \le 1$ получим условие устойчивости

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{4}.$$

Полагая $\tau = \frac{1}{4}h^2$ в уравнение (3.14), получим следующий итерационный процесс для решения разностной системы Пуассона (3.12),(3.21)

$$u^{n+1}_{k,m} = \frac{1}{4}(u^n_{k+1,m} + u^n_{k-1,m} + u^n_{k,m+1} + u^n_{k,m-1} - h^2 f_{k,m}) \quad . \tag{3.20}$$

Здесь $1 \le k, m \le K-1, Kh = 1,\ f_{k,m} = f(x_k, y_m)$. Система уравнений (3.20) дополняется граничными условиями

$$u^{n+1}_{0,m} = u^{n+1}_{K,m} = u^{n+1}_{k,0} = u^{n+1}_{k,K} = 0 \quad . \tag{3.21}$$

Как показано в ([2]), указанный метод решает разностную систему Пуассона (3.12),(3.21) за $O(K^4 \ln K)$ операций. Для экономии оперативной памяти вновь вычисленное значение $u^{n+1}_{k,m}$ может быть размещено на месте предыдущего итерационного значения $u^n_{k,m}$ (метод Зейделя), что приводит к требованию наличия $O(K^2)$ элементов оперативной памяти.

Другие численные методы решения задачи (3.12),(3.21) можно найти в ([2], [3]).

3.4 Задача Дирихле.

Для случая $f \equiv 1$ задача Пуассона может быть сведена к задаче Дирихле. Пусть

$$v = \frac{x(x-1)}{4} + \frac{y(y-1)}{4} \quad .$$

Обозначим через $w = u - v$. Функция w удовлетворяет следующей задаче Дирихле

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \qquad \text{в области} \qquad \Omega = \{0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1\} \tag{3.22}$$

при граничных условиях

$$w\,|_{x=0} = w|_{x=1} = -\frac{y(y-1)}{4} \quad , \tag{3.23}$$

$$w\,|_{y=0} = w|_{y=1} = -\frac{x(x-1)}{4} \quad . \tag{3.24}$$

Замечание. В окрестности вершины (0,0) решение задачи Пуассона с $f = 1$ может быть представлено в виде

$$u(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{4} - \frac{xy}{\pi}\ln(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{2\pi}\arctan\frac{x^2-y^2}{2xy} + w(x,y),$$

где $w(x,y)$–регулярная функция в окрестности точки (0,0) (см.([5], с. 683).

3.5 Применение S–сплайнов для решения задачи Пуассона.

Рассмотрим уравнение Пуассона в полярной системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -p(r,\varphi) \quad ,(r,\varphi) \in D \tag{3.25}$$

с некоторыми граничными условиями:

$$u(r,\varphi)\,|_{\partial D} = f(r,\varphi)|_{\partial D} \quad . \tag{3.26}$$

Пусть D - некоторая область, лежащая внутри единичного круга. Предлагаемый метод решения состоит в следующих шагах:

1) Представление предполагаемого решения уравнения в виде линейной комбинации фундаментальных сплайнов.

2) Применение метода Галеркина к уравнению в пространстве фундаментальных сплайнов.

3) Подстановка граничных условий

Рассмотрим последовательно эти шаги. Представим решение уравнения в виде

$$S(r,\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=1}^{K_2} u_{i,j} C_i(\varphi) D_j(r) \quad , \tag{3.27}$$

где $C_i(\varphi)$ и $D_j(r)$ - соответствующие фундаментальные одномерные сплайны. Домножим исходное уравнение на r . Теперь будем домножать уравнение скалярно на $C_l(\varphi)D_k(r)$, где пары индексов l,k пробегают все значения $l = 0,1,\ldots,K_1-1; k = 1,\ldots,K_2$, но такие, что $(h_2k, h_1l) \in D$(т.е. только для внутренних узлов области D). В нашем случае в качестве скалярного произведения возьмём интеграл по области D. Получим уравнение:

$$\int\limits_D \{r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = -\int\limits_D p(r,\varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi$$

Заметим, что под интегралом вошел также якобиан r от преобразования в полярные координаты. Теперь подставим разложение (3.27). Полученное уравнение в виду произвольности выбора l и k представляет собой систему для определения коэффициентов $u_{i,j}$. Чтобы сделать её полной, нам необходимо учесть граничные условия, которые дадут нам недостающее число уравнений (подробнее см.([16], [17]).

4. Приложение 1. Метод прогонки.

Рассмотрим систему

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k + c_k y_{k-1} = d_k, \quad k = 1,2,\ldots K-1, \tag{4.1}$$

$$a_0 y_1 + b_0 y_0 = d_0, \quad b_K y_K + c_K y_{K-1} = d_K, \tag{4.2}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – заданные числа. Решение линейной системы уравнений с трёхдиагональной матрицей (4.1),(4.2) ищется в виде

$$y_{k+1} = P_{k+1} y_k + Q_{k+1}, \tag{4.3}$$

где P_k, Q_k – неизвестные прогоночные коэффициенты. Подставляя (4.3) в (4.1) получаем:

$$y_k = \frac{-c_k y_{k-1} + (d_k - a_k Q_{k+1})}{a_k P_{k+1} + b_k} \quad .$$

Сравнивая это равенство с (4.3), видим, что прогоночные коэффициенты связаны рекуррентным соотношением:

$$P_k = -\frac{a_k}{a_k P_{k+1} + b_k} \quad , \quad Q_k = \frac{d_k - a_k Q_{k+1}}{a_k P_{k+1} + b_k} \quad , k = K-1, \ldots, 1 \quad . \tag{4.4}$$

Из (4.2)

$$y_K = -\frac{c_K}{b_K} y_{K-1} + \frac{d_K}{b_K} = P_K y_{K-1} + Q_K$$

получаем

$$P_K = -\frac{a_K}{b_K} \quad , \quad Q_K = \frac{d_K}{b_K} \quad .$$

Последовательно из (4.4) находим $P_{K-1}, Q_{K-1}, \ldots, P_1, Q_1$ (прямой ход прогонки). Из системы

$$\begin{cases} a_0 y_1 + b_0 y_0 = d_0 \\ y_1 = P_1 y_0 + Q_1 \end{cases}$$

находим

$$y_0 = \frac{d_0 - a_0 Q_1}{b_0 + a_0 P_1} \quad ,$$

затем последовательно $y_1, y_2, \ldots, y_K$ (обратный ход прогонки).

Нетрудно показать, что при выполнении условия диагонального преобладания $b_k > |a_k| + |c_k|$ метод прогонки не накапливает ошибки округления [9] .

4.1 Приложение 2. Разбор одного варианта.

Рассмотрим решение уравнения колебания струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad \text{в области} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t > 0 \tag{4.5}$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \tag{4.6}$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u_t\,|_{t=0} = \psi(x) = 0 \quad , \tag{4.7}$$

где

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} - x, & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

4.1.1 Аналитическое решение в виде ряда Фурье.

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k cos a\pi kt sin k\pi x,$$

где

$$B_k = 2\int_0^1 \varphi(x) sin k\pi x dx \quad = \quad \frac{2}{k^2\pi^2}(2 sin\frac{k\pi}{4} - sin\frac{k\pi}{2}).$$

Подробнее:

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi^2}(\sqrt{2}-1) cos a\pi t sin \pi x + \frac{1}{\pi^2} cos 2a\pi t sin 2\pi x + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{9\pi^2} cos 3a\pi t sin 3\pi x + \ldots$$

Видим, что коэффициенты Фурье медленно убывают. Мажорантой этого ряда является ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

который медленно сходится. Необходимо порядка 70 слагаемых, чтобы посчитать решение с относительной погрешностью 1% , что делает этот метод мало эффективным при практических вычислениях.

4.2 Приложение 3. S-сплайн аппроксимация.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, $h = (b-a)/K$ — шаг сетки. Разобьём отрезок $[a,b]$ на группы, для этого введём на $[a,b]$ ещё одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh, m \in N$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке $[0,H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $(y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$. Обозначим через

$$P_S^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \sum_{i=p+1}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Рассмотрим функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2$$

В классе P_S^n ищется такой полином, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \longrightarrow \min(a_{p+1}, \ldots, a_n)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g'_{l-1}(H), \ldots, a_2^l = \frac{1}{2} g''_{l-1}(H) \text{ при } l = 0, 1, \ldots, L-1. \quad (4.9)$$

В случае периодического $S-$сплайна здесь при $l = 0$ выполнено $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$. Так как $a_0^l = g_l(0), a_1^l = g'_l(0), a_l^2 = \frac{g''_l(0)}{2}$, то условия (4.9) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае коэффициенты a_0^0, a_1^0, a_2^0 задаются начальными условиями $y_0, y'_0, \frac{y''_0}{2}$[1]. Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно, будем предполагать, что если функция $f \in \mathbf{C}^6[a,b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a + kh, k = 0, 1, \ldots, K$ своими значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^6$. Здесь

[1]В случае если функция задана таблицей, то y'_0, y''_0, можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,

$$y'_0 = -\frac{1}{60h} [147y_0 - 360y_1 + 450y_2 - 400y_3 + 225y_4 - 72y_5 + 10y_6] + O(h^5), \quad (4.10)$$

$$y''_0 = \frac{1}{180h^2} [812y_0 - 3132y_1 + 5265y_2 - 5080y_3 + 2970y_4 - 972y_5 + 137y_6] + O(h^4). \quad (4.11)$$

L – число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции или число полиномов,составляющих сплайн. Кроме того, здесь $M+1$ – количество точек осреднения, $m+1$ – количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l – точка привязки полинома g_l, $M-m+1$ – число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \geq m+1$.

О п р е д е л е н и е 1. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на каждом отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам a_3, a_4, a_5. Для этого продифференцируем $\Phi^l(g)$ по этим коэффициентам и полученные производные приравняем к нулю. Получим

$$\left\{ \begin{array}{r} a_3^l h^3 S_6 + a_4^l h^4 S_7 + a_5^l h^5 S_8 = c_1^l, \\ a_3^l h^3 S_7 + a_4^l h^4 S_8 + a_5^l h^5 S_9 = c_2^l, \\ a_3^l h^3 S_8 + a_4^l h^4 S_9 + a_5^l h^5 S_{10} = c_3^l. \end{array} \right. \tag{4.12}$$

Здесь

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^{M} \left[(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2) k^{j+2} \right]. \tag{4.13}$$

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов S-сплайна, состоит из уравнений двух видов: а) уравнений склейки для каждой пары последовательных полиномов (4.9); б) уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при нулевой, первой и второй степенях. Сделаем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0, 1, 2, 3$. При этом уравнения а) будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{r} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + m^2\tilde{a}_2^{l-1} + m^3\tilde{a}_3^{l-1} + m^4\tilde{a}_4^{l-1} + m^5\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m\tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2\tilde{a}_3^{l-1} + 4m^3\tilde{a}_4^{l-1} + 5m^4\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \\ \tilde{a}_2^{l-1} + 3m\tilde{a}_3^{l-1} + 6m^2\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^3\tilde{a}_5^{l-1} = \tilde{a}_2^l. \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Уравнения б) из системы(4.12) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{r} S_3\tilde{a}_0^l + S_4\tilde{a}_1^l + S_5\tilde{a}_2^l + S_6\tilde{a}_3^l + S_7\tilde{a}_4^l + S_8\tilde{a}_5^l = P_1^l, \\ S_4\tilde{a}_0^l + S_5\tilde{a}_1^l + S_6\tilde{a}_2^l + S_7\tilde{a}_3^l + S_8\tilde{a}_4^l + S_9\tilde{a}_5^l = P_2^l, \\ S_5\tilde{a}_0^l + S_6\tilde{a}_1^l + S_7\tilde{a}_2^l + S_8\tilde{a}_3^l + S_9\tilde{a}_4^l + S_{10}\tilde{a}_5^l = P_3^l, \end{array} \right. \tag{4.15}$$

где

$$P_j^l = \sum_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{j+2}. \tag{4.16}$$

Здесь $l = 0, \ldots, L-1$ – номер полинома, причем если $l = 0$, то в периодическом случае выражение $\tilde{a}^{l-1}$ означает $\tilde{a}^{L-1}$. Перенося в уравнениях (4.14) $\tilde{a}_0^l, \tilde{a}_1^l, \tilde{a}_2^l$ в левую часть, получим в итоге систему уравнений для определения всех коэффициентов полиномов, составляющих периодический S-сплайн. В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать волну над переменными a_k^l.

Запишем полученную систему в матричной форме. Для этого обозначим

$$A_1 = \left\| \begin{array}{ccc} S_3 & S_4 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \\ S_5 & S_6 & S_7 \end{array} \right\|, A_2 = \left\| \begin{array}{ccc} S_6 & S_7 & S_8 \\ S_7 & S_8 & S_9 \\ S_8 & S_9 & S_{10} \end{array} \right\|, B_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, B_2 = \left\| \begin{array}{ccc} m^3 & m^4 & m^5 \\ 3m^2 & 4m^3 & 5m^4 \\ 3m & 6m^2 & 10m^3 \end{array} \right\|.$$

Кроме того, пусть

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ P_3^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ a_2^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_3^l \\ a_4^l \\ a_5^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \ldots, L-1. \qquad (4.17)$$

Тогда систему уравнений для определения коэффициентов периодического S-сплайна можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & -E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ 0 \\ P^1 \\ 0 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix} \qquad (4.18)$$

Матрицу этой системы обозначим G. Здесь $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ – единичная и нулевая матрицы. Отличие аналогичной системы для непериодического S-сплайна, рассмотренного в работе [15], заключается в замене первой строки на стартовые условия, которые можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} X^0 = Y^0, \text{ где } Y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ hy_0' \\ \frac{1}{2}h^2 y_0'' \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

В работе [15] показано, что при $M \geq 3$ существует A_2^{-1} (см. также [16]–[14]). Система (4.18) распадается на систему для нахождения $X^{2l}, \quad l = 0, 1, \ldots, L-1$ вида

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \ldots & 0 & U \\ U & -E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & U & -E & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & U & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 A_2^{-1} P^{L-1} \\ -B_2 A_2^{-1} P^0 \\ -B_2 A_2^{-1} P^1 \\ \vdots \\ -B_2 A_2^{-1} P^{L-2} \end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

и уравнения для нахождения X^{2l+1} вида

$$A_2 X^{2l+1} = P^l - A_1 X^{2l}, \quad l = 0, 1, \ldots, L-1 \quad . \qquad (4.21)$$

Обратим внимание, что получающаяся в результате таких преобразований матрица $U = B_1 - B_2 A_2^{-1} A_1$. Введём обозначения:

$$T_{ijk} = det \begin{Vmatrix} S_i & S_j & S_k \\ S_{i+1} & S_{j+1} & S_{k+1} \\ S_{i+2} & S_{j+2} & S_{k+2} \end{Vmatrix}, \quad t_{ijk} = T_{ijk}/det(A_2). \qquad (4.22)$$

Заметим, что $det(A_2) = T_{678}$. Тогда

$$A_2^{-1} A_1 = \begin{Vmatrix} t_{378} & t_{478} & t_{578} \\ t_{638} & t_{648} & t_{658} \\ t_{673} & t_{674} & t_{675} \end{Vmatrix}$$

и элементы матрицы U будут иметь вид

$$\begin{gathered}
u_{11}=1-t_{378}m^3-t_{638}m^4-t_{673}m^5,\quad u_{12}=m-t_{478}m^3-t_{648}m^4-t_{674}m^5,\\
u_{13}=m^2-t_{578}m^3-t_{658}m^4-t_{675}m^5,\quad u_{21}=-3t_{378}m^2-4t_{638}m^3-5t_{673}m^4,\\
u_{22}=1-3t_{478}m^2-4t_{648}m^3-5t_{674}m^4,\quad u_{23}=2m-3t_{578}m^2-4t_{658}m^3-5t_{675}m^4,\\
u_{31}=-3t_{378}m-6t_{638}m^2-10t_{673}m^3,\quad u_{32}=-3t_{478}m-6t_{648}m^2-10t_{674}m^3,\\
u_{33}=1-3t_{578}m-6t_{658}m^2-10t_{675}m^3\quad .
\end{gathered}\tag{4.23}$$

Легко заметить, что $u_{2,j}=\frac{\partial}{\partial m}(u_{1j}),\quad u_{3,j}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial m^2}(u_{1j}),\quad j=1,2,3.$

Доказаны следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. *Пусть числа m и $M\geq 3$ таковы, что собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L – число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ своими значениями y_k в точках $x_k=a+kh$, h=(b-a)/K, существует и единствен периодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему (4.20). Умножим 1-ю строку системы на матрицу U и сложим со 2-й строкой, полученную 2-ю строку умножим на матрицу U и сложим с 3-й и т.д. Поменяем знаки. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{pmatrix}
E & 0 & \dots & 0 & \dots & -U\\
0 & E & \dots & 0 & \dots & -U^2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & E & \dots & -U^l\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & E-U^L
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X^0\\ X^2\\ \vdots\\ X^{2(l-1)}\\ \vdots\\ X^{2(L-1)}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} D_0\\ D_1\\ \vdots\\ D_{(l-1)}\\ \vdots\\ D_{(L-1)}\end{pmatrix},\tag{4.24}$$

где

$$D_0=B_2A_2^{-1}P^{L-1},\quad D_l=\sum_{j=0}^{l-1}U^jB_2A_2^{-1}P^{l-1-j}-U^lB_2A_2^{-1}P^{L-1},\quad l=0,1,\dots,L-1.$$

По условию теоремы $det(E-U^L)\neq 0$ и $X^{2(L-1)}=(E-U^L)^{-1}D_{L-1},\quad X^{2l}=D_l+U^{l+1}X^{2(L-1)}$. Тогда из (4.21) $\quad X^{2l+1}=A_2^{-1}(P_l-A_1X^{2l})\quad$ при $\quad l=0,1,\dots,L-1$. Тем самым все коэффициенты периодического $S-$сплайна найдены.

Т е о р е м а 2. *Пусть периодическая функция $f(x)\in\mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть выполнены предположения $|y_k-f(x_k)|\leq Ch^{6+\varepsilon},\varepsilon\geq 0$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн $S^5_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S^5_{m,M}(x)\in\mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x\in[a,b]$ справедливы оценки:*

$$\left|f^{(p)}-\frac{d^P}{dx^p}S^5_{m,M}(x)\right|\leq C_ph^{6-p},\tag{4.25}$$

$p=0,1,2,3,4,5$ *для* $x\neq\xi_l;$ *при* $p=3,4,5\quad \varphi^{(p)}(\xi_l)\equiv\varphi^{(p)}(\xi_l+0).$

Т е о р е м а 3. *Пусть $\zeta=m/M\zeta_*$. Тогда при достаточно малых m и больших M собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы.*

Это условие устойчивости S-сплайнов аналогично условию устойчивости для кубического случая [12], [13]. Для случая малых значений M (при $3\leq M\leq 20$ в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Оказалось, что при $\zeta=m/M\zeta_*<1$ все собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $max|\lambda_i|$ и аппроксимация $S-$сплайнами устойчива, представлены в таблице.

Собственные числа матрицы U

M	m	λ_1	λ_2	λ_3	$max\|\lambda_i\|$	m/M
4	2	-0,008	-0,231-0,131i	-0,231+0,131i	0,265	$0,25$
5	3	$-0,005$	$-0,0549-0,201i$	$-0,0549+0,201i$	$0,207$	$0,60$
6	2	$0,0266$	$-0,285-0,129i$	$-0,285+0,129i$	$0,312$	$0,33$
6	3	$-0,008$	$-0,263-0,0463i$	$-0,263+0,0463i$	$0,266$	$0,50$
7	2	$0,0732$	$-0,167-0,305i$	$-0,167+0,305i$	$0,347$	$0,285$
7	4	$-0,0069$	$-0,0737-0,214i$	$-0,0737+0,214i$	$0,226$	$0,571$
7	6	$0,00218$	$0,116-0,207i$	$0,116+0,207i$	$0,237$	$0,857$
8	4	$-0,0079$	$-0,265-0,031i$	$-0,265+0,031i$	$0,266$	$0,50$
8	5	$-0,00403$	$0,101-0,178i$	$0,101+0,178i$	$0,204$	$0,625$
8	7	$0,00180$	$-0,0466-0,229i$	$-0,0466+0,229i$	$0,233$	$0,875$
9	5	$-0,00734$	$-0,124-0,201i$	$-0,124+0,201i$	$0,235$	$0,555$
9	8	$0,00134$	$-0,205-0,118i$	$-0,205+0,118i$	$0,236$	$0,888$
10	5	$-0,0078$	$-0,263-0,0407i$	$-0,263+0,0407i$	$0,266$	$0,50$
10	6	$-0,0055$	$-0,0182-0,213i$	$-0,0182+0,213i$	$0,213$	$0,60$
11	7	$-0,00322$	$0,141-0,147i$	$0,141+0,147i$	$0,203$	$0,636$

Аналогичные теоремы доказаны и для непериодического случая.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть $|y_k - f(x_k)| \le Ch^{6+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. Пусть выполнены предположения $|y_0' - f'(x_0)| \le Ch^{5+\varepsilon}$, $|y_0'' - f''(x_0)| \le Ch^{4+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда сплайн $S^5_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S^5_{m,M}(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x \in [a,b]$ справедливы оценки:*

$$\left| f^{(p)} - \frac{d^p}{dx^p} S^5_{m,M}(x) \right| \le C_p h^{6-p}, \tag{4.26}$$

$p = 0,1,2,3,4,5$ *для* $x \ne \xi_l$; *при* $p = 3,4,5$ $\varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + 0)$.

5. Фундаментальный S-сплайн .

Фундаментальный S-сплайн $B_j(x)$ – это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbf{R^{K+1}}$ и $y_0' \in \mathbf{R}, y_0'' \in \mathbf{R}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,\ldots,K\}$, δ_{ij} – символ Кронекера. Легко видеть, что линейная комбинация

$$S(x) = \sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x)$$

является S-сплайном, приближающим данные $\{y_i, i = 0,1,\ldots,K\}$. Заметим, что непериодические фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями y_0', y_0'', принимающими значения 0 или 1.

Список литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.

[2] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1973.

[3] Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1977, с. 49.

[4] Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1987.

[5] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М. : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.

[6] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[7] Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: изд-во "Наука", 1964, с. 162.

[8] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

[9] Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. М.: ТОО "Янус", 1995.

[10] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука",1977.

[11] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во "Мир", 1972.

[12] Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций. В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып.10. М.: Изд-во МГУ, 1984, с.197.

[13] Силаев Д.А., Амилющенко А.В., Лукьянов А.И.,Коротаев Д.О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 . В кн.: Труды семинара имени И.Г.Петровского. Вып. 26, 2007, с. 347-367

[14] Silaev D.A., Amiliyushenko A.V., Luk'janov A.I., and Korotaev D.O. Semilocal smoothing spline of class C^1. Journal of Mathematical Sciences ISSN 1072-3374 Vol. 143. No. 4. June 2007, p. 3401-3414

[15] Силаев Д.А. Дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный сглаживающий сплайн. Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1, математика, механика, 2009, № 5, с. 11 -19

[16] Силаев Д.А., Коротаев Д.О. Решение краевых задач с помощью S-сплайна. Математика. Компьютер. Образование.: Сб. научн. трудов. Том 2. Под ред. Г.Ю.Ризниченко. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006, с. 85-104

[17] Силаев Д.А., Коротаев Д.О. Решение краевых задач с помощью S-сплайна. Компьютерные исследования и моделирование Том 1.№ 2 ISSN 2076-7633, 2009, с. 161-172

[18] Силаев Д.А., Коротаев Д.А. S-сплайн на круге. Тезисы конференции "Математика. Компьютер. Образование.", Пущино, Январь 2003 г. с.157.