Лекция 13-14. Теорема существования и единственности решения уравнения, описывающего стационарный осесимметрический пограничный слой.

Пусть жидкость обтекает выпуклое тело. Мы рассмотрим два случая — плоский и осесимметрический. В плоском случае тело занимает область вида $G \times \mathbb{R}$, где G — плоская область с гладкой границей, симметричная относительно прямой l. Через γ обозначим кривую, задающую часть границы, лежащую по одну сторону от l. В осесимметрическом случае обозначим через l ось вращения, через γ — образующую тела. При этом будем считать, что хотя бы один из концов кривой γ лежит на l.

Рассмотрим плоскость, содержащую l и γ. Она разбивается на выпуклую замкнутую область G, которую занимает тело, и дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus G$, которое заполняет жидкость. Обозначим через x натуральный параметр на γ, через $r(x)$ — расстояние от точки $\gamma(x)$ до оси l. Теперь введем координаты x и y в $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Пусть $a \in \mathbb{R}^2 \setminus G$, p_a — ближайшая к a точка на G (так как область G выпукла, то точка p_a единственна). Тогда p_a принадлежит границе G и отрезок $[a,\, p_a]$ перпендикулярен кривой γ. Если $p_a = \gamma(x)$, y — расстояние от a до G, то точке a сопоставим координаты $(x,\, y)$.

Всюду далее будем предполагать, что

$$r(0) = 0,\ r_x(0) \neq 0,\ r(x) > 0 \text{ при } x > 0. \tag{1}$$

Пусть $U(t,\, x)$ — продольная скорость внешнего потока. При этом предполагается, что

$$U(t,\, 0) = 0,\ U(t,\, x) > 0 \text{ при } x > 0,\ U_x(t,\, x) > 0 \text{ при } x \geqslant 0. \tag{2}$$

В плоском случае система уравнений Прандтля имеет вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy}, \\ u_x + v_y = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x,\, y),\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = 0,\ v|_{y=0} = v_0(t,\, x), \\ u(t,\, x,\, y) \underset{y\to\infty}{\to} U(t,\, x), \\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

в осесимметрическом —

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy}, \\ (ru)_x + (rv)_y = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x,\, y),\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = 0,\ v|_{y=0} = v_0(t,\, x), \\ u(t,\, x,\, y) \underset{y\to\infty}{\to} U(t,\, x), \\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty \end{cases} \tag{4}$$

(см. предыдущие лекции).

1 Переход к переменным Крокко в осесимметрическом случае.

Пусть u — решение системы (4). Предположим, что $u_y > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant y < \infty$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\tau = t,\ \xi = x,\ \eta = \frac{u(t,\,x,\,y)}{U(t,\,x)},\ w = \frac{u_y(t,\,x,\,y)}{U(t,\,x)}. \tag{5}$$

Обратная замена имеет вид

$$y = \int\limits_0^\eta \frac{ds}{w(t,\,x,\,s)}, \quad u(t,\,x,\,y) = U(t,\,x)\eta.$$

Переменные (5) называются *переменными Крокко.*

Пусть каждого t, x выполнено

$$\frac{u_y(t,\,x)}{U(t,\,x)} \to 0, \quad y \to \infty. \tag{6}$$

Покажем, что функция w удовлетворяет уравнению

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant X,\ 0 \leqslant \eta < 1 \tag{7}$$

и граничным условиям

$$w|_{\tau=0} = w_0 \equiv \frac{u_{0y}}{U},\ w|_{\eta=1} = 0,\ (\nu w w_\eta - v_0 w + C)|_{\eta=0} = 0, \tag{8}$$

где

$$A = (\eta^2-1)U_x + (\eta-1)\frac{U_t}{U},\ B = -\eta U_x + \eta\frac{r_x U}{r} - \frac{U_t}{U},\ C = U_x + \frac{U_t}{U}.$$

Сначала исключим v. Для этого умножим первое уравнение (4) на r, продифференцируем по y, воспользуемся вторым уравнением и получим

$$r(uu_x)_y - (ru)_x u_y + rvu_{yy} - r(u_t)_y = \nu r u_{yyy}. \tag{9}$$

Чтобы исключить v из этого уравнения, умножим его на u_y и воспользуемся первым уравнением (4). Тогда получится уравнение

$$u_y(u_{ty} + uu_{xy}) - \frac{r_x}{r}uu_y^2 + (U_t + UU_x)u_{yy} - (u_t + uu_x)u_{yy} = \nu(u_y u_{yyy} - u_{yy}^2).$$

Теперь перейдем к переменным Крокко. Имеем $\eta_y = w$,

$$u_{yy} = U w_\eta \eta_y = U w w_\eta, \tag{10}$$

$u_{yyy} = U(w_\eta w)_y = U(w_{\eta\eta}w^2 + w w_\eta^2)$. Значит,

$$u_y u_{yyy} - u_{yy}^2 = U^2 w^3 w_{\eta\eta},$$

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = (Uw)_x Uw - (U\eta)_x (Uw)_y =$$

$$= U_x w\cdot Uw + Uw_x\cdot Uw - (U_x\eta + U\eta_x)Uw_\eta w = UU_x w^2 + U^2 w w_x - U_x U w w_\eta \eta - U^2 w w_\eta \eta_x =$$

$$= UU_x w^2 + U^2 w w_\xi + U^2 w w_\eta \eta_x - UU_x w w_\eta \eta - U^2 w w_\eta \eta_x = UU_x w^2 + U^2 w w_\xi - UU_x w w_\eta \eta,$$

и аналогично
$$u_y u_{ty} - u_t u_{yy} = Uw(U_t w + U w_\tau - U_t \eta w_\eta).$$
Отсюда
$$u(u_y u_{xy} - u_x u_{xy}) + (u_y u_{ty} - u_t u_{yy}) =$$
$$= Uw\eta\left((U_t + UU_x)w + U(w_\tau + U w_\xi) - (U_t + UU_x)\eta w_\eta\right).$$
Наконец, $uu_y^2 = U^3 w^2 \eta$. Подставив все это в (9) и сократив на $U^2 w$, получаем (7).

Теперь докажем (8). Первое равенство следует из условия $u(t,\, x,\, y) \underset{y\to\infty}{\to} U(t,\, x)$, второе равенство — (6). Подставив $y = 0$ в равенство $u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy}$ и воспользовавшись (10), получаем третье равенство (так как $u|_{y=0} = 0$ для любого t, x, то $u_t|_{y=0} = 0$ и $uu_x|_{y=0} = 0$).

2 Теорема существования и единственности для стационарного осесимметрического пограничного слоя.

В стационарном случае уравнения Прандтля в переменных Крокко имеют вид
$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant X,\ 0 \leqslant \eta < 1, \tag{11}$$
$$w|_{\eta=1} = 0,\ (\nu w w_\eta - v_0 w + C)|_{\eta=0} = 0, \tag{12}$$
где
$$A = (\eta^2 - 1)U_x,\ B = -\eta U_x + \eta\frac{r_x U}{r},\ C = U_x.$$
Заметим, что
$$-U_x + \frac{r_x U}{r} \to 0 \text{ при } x \to 0. \tag{13}$$
В самом деле, функция $\frac{U}{r}$ непрерывно дифференцируема в нуле и ее производная при $x \neq 0$ равна $\frac{1}{r}\left(U_x - \frac{r_x U}{r}\right)$ и ограничена, а $r(0) = 0$.

В работе О.А. Олейник [1] были доказаны существование и единственность решения задачи (11), (12) для достаточно малых X и найдена асимптотика функции $w(\xi,\, \eta)$ при $\eta \to 1$. В частности, было показано, что производные решения не являются ограниченными.

Теорема 1. *Пусть r, U дважды непрерывно дифференцируемы, $U_x > 0$, $U(0) = 0$, $|U_{xx}| \leqslant N_1 x$, $v_0 \leqslant N_2 x$ ($N_i > 0$ — константы), v_0 имеет ограниченную производную, и выполнены условия (1) и (2). Тогда найдется такое $X_1 = X_1(U,\, r,\, v_0) > 0$, что в области $G_{X_1} = \{0 \leqslant \xi \leqslant X_1,\ 0 \leqslant \eta < 1\}$ существует решение задачи (11), (12), обладающее следующими свойствами:*

1. *w непрерывна в G_{X_1}, w_η непрерывна по η при $\eta < 1$, $ww_{\eta\eta}$ ограничена в G_{X_1};*
2. *найдутся такие $\mu \in (0,\, 1)$ и константы $M_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, что*

$$M_1(1-\eta)\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)} \leqslant w \leqslant M_2(1-\eta)\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)},$$
$$-M_3\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)} \leqslant w_\eta \leqslant -M_4\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)},$$
$$|w_\xi| \leqslant M_5(1-\eta)\sqrt{-\ln\mu(1-\eta)},\ \ ww_{\eta\eta} < -M_6.$$

В любой замкнутой области, лежащей строго внутри G_{X_1}, функция w и ее производные, входящие в уравнение (11), удовлетворяют условию Гельдера. Функция w удовлетворяет уравнению (11) во всех внутренних точках G_{X_1}, при $0 \leqslant \xi \leqslant X_1$ выполняется условие (12).

Эту теорему мы докажем частично: докажем существование и порядковые оценки для $w|_{\xi=0}$. Затем изложим схему доказательства в общем случае.

Теорема 2. *Задача (11), (12) может иметь только единственное решение, непрерывное в G_X, обладающее непрерывными производными w_η, w_ξ, $w_{\eta\eta}$ внутри G_X и такое, что*

1. $w_{\eta\eta} \leqslant 0$,
2. $w \geqslant 0$ *внутри* G_X, $w > 0$ *при* $\eta = 0$,
3. w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$.

Заметим, что если $X \leqslant X_1$, то условия, обеспечивающие единственность, выполнены.

3 Доказательство теоремы единственности.

Идея состоит в следующем: рассматривается функция $\overline{w} = e^{-\alpha\xi}(w_1 - w_2)$, где w_1, w_2 — решения, а α подбирается позже. Для функции $\overline{w}$ выписывается дифференциальное уравнение второго порядка и граничные условия. Далее рассуждения похожи на доказательство принципа максимума для уравнения теплопроводности и опираются на необходимое условие максимума функции в терминах второй производной внутри области или первой производной на границе. Этот же прием будет потом использоваться несколько раз при доказательстве априорных оценок.

Доказательство теоремы 2. Пусть w_1, w_2 — два решения, $\overline{w} = e^{-\alpha\xi}(w_1 - w_2)$. Вычитая равенства (11) с $w := w_1$ и $w := w_2$ и умножив разность на $e^{-\alpha\xi}$, получаем, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\nu w_1^2 \overline{w}_{\eta\eta} - \eta U \overline{w}_\xi + A\overline{w}_\eta + [B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U\eta]\, \overline{w} = 0, \ (\xi, \eta) \in G_X,$$

и граничным условиям

$$\overline{w}|_{\eta=1} = 0, \ \left.\left(\nu\overline{w}_\eta - \frac{U_x}{w_1 w_2}\overline{w}\right)\right|_{\eta=0} = 0. \qquad (14)$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико, то коэффициент при $\overline{w}$ в уравнении будет отрицательным для любого $\xi > 0$. В самом деле, из условий теоремы, определения B, (2) и (13) следует, что

$$B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U\eta \leqslant \eta\left(-U_x + \frac{r_x U}{r} - \alpha U\right) < 0$$

при достаточно большом α, так как $U(x) \geqslant c_1 x$, $\left|-U_x + \frac{r_x U}{r}\right| \leqslant c_2 x$ для некоторых положительных констант c_1, c_2.

Покажем, что функция $\overline{w}$ не может иметь положительного максимума. Предположим обратное.

- Пусть точка максимума расположена внутри области. Тогда в ней $w_\xi = w_\eta = 0$, поэтому
$$\nu w_1^2 \overline{w}_{\eta\eta} = -\left[B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U\eta\right] \overline{w} > 0,$$
т.е. $\overline{w}_{\eta\eta} > 0$, что для точки максимума невозможно.

- Пусть точка максимума расположена на отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$, $\eta = 0$. Из условий теоремы следует, что в этой точке $w_1 > 0$, $w_2 > 0$. Кроме того, $U_x > 0$ и $\overline{w} > 0$, так что $\overline{w}_\eta > 0$ в силу (14), что опять невозможно для точки максимума.

- Пусть $(0, \eta_*)$ — точка максимума, $0 < \eta_* < 1$. Здесь мы будем обозначать ограничения всех функций на отрезок $\{\xi = 0\}$ так же, как сами эти функции. Тогда $\overline{w}_\eta(\eta_*) = 0$ и

$$\nu w_1^2(\eta_*)\overline{w}_{\eta\eta}(\eta_*) = -\nu(w_1(\eta_*) + w_2(\eta_*))w_{2\eta\eta}(\eta_*)\overline{w}(\eta_*).$$

  Если $w_{2\eta\eta}(\eta_*) > 0$, то $\overline{w}_{\eta\eta}(\eta_*) > 0$ — противоречие. Если $w_{2\eta\eta}(\eta_*) = 0$, то $\overline{w}_{\eta\eta}(\eta_*) = 0$, откуда $w_{1\eta\eta}(\eta_*) = 0$. Рассмотрим уравнения

$$\nu w_j^2 \varphi_\eta + A\varphi = 0, \ \ j = 1,\, 2.$$

  Тогда функции $w_{j\eta}$ являются их решениями. Если φ_j — решение, $\varphi_{j\eta}(\eta_*) = 0$, то $\varphi_j(\eta_*) = 0$. По теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения, $\varphi_j \equiv 0$. В частности, $w_{j\eta} \equiv 0$. Так как $w_j(1) = 0$, то $w_j \equiv 0$ — противоречие.

- Пусть точка максимума расположена на интервале $\xi = X$, $0 < \eta < 1$. Тогда $\overline{w}_\eta = 0$, $\overline{w}_\xi \geqslant 0$, откуда $U(X)\overline{w}_\xi \geqslant 0$, т.е.

$$\nu w_1^2 \overline{w}_{\eta\eta} = \eta U(X)\overline{w}_\xi - [B + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} - \alpha U(X)\eta]\,\overline{w} > 0$$

  — противоречие.

$\square$

4 Доказательство теоремы существования и асимптотика в точке останова.

Рассмотрим решение (11), (12) при $\xi = 0$. Так как $U(0) = 0$, то это решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0, \ 0 \leqslant \eta < 1, \tag{15}$$

и граничным условиям

$$w(1) = 0, \ (\nu w w_\eta + C)|_{\eta=0} = 0, \tag{16}$$

Трудность в доказательстве существования решения состоит в том, что уравнение нелинейно и при $\eta = 1$ имеется вырождение коэффициента при старшей производной.

Лемма 1. *Уравнение (15) с граничными условиями (16) имеет решение $w(\eta)$, непрерывное при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и бесконечно гладкое при $0 \leqslant \eta < 1$. Для этого решения справедлива оценка*

$$M_7(1-\eta) \leqslant w(\eta) \leqslant M_8(1-\eta)\sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}, \tag{17}$$

где M_7, M_8, μ — положительные константы.

Доказательство. Сначала рассмотрим регуляризованное уравнение

$$L_\varepsilon(w) := \left(\nu w^2 + \varepsilon\right) w_{\eta\eta} + A w_\eta = 0,\ 0 \leqslant \eta < 1, \tag{18}$$

с граничными условиями (16), для него докажем теорему существования и априорные оценки, а затем сделаем предельный переход.

Обозначим

$$\lambda_\varepsilon(w) = \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{w}\right)\Bigg|_{\eta=0}.$$

Априорная оценка снизу.

Пусть w — решение (18), (16), $w(0) > 0$. Положим $V = M_9(1-\eta)$, где $M_9 > 0$. Мы покажем, что $y := V - w \leqslant 0$. Имеем

$$L_\varepsilon(V) = M_9(1-\eta^2)U_x > 0,$$

поэтому

$$L_\varepsilon(V) - L_\varepsilon(w) > 0 \text{ при } \eta < 1.$$

При достаточно малом M_9 выполнено

$$\lambda_\varepsilon(V) = \left(-\nu M_9 + \frac{U_x}{M_9}\right) > 0, \tag{19}$$

откуда следует

$$\left(\nu y_\eta - \frac{U_x y}{wV}\right)\Bigg|_{\eta=0} > 0.$$

Для доказательства неравенства $y \leqslant 0$ применим принцип максимума. Для любого $0 \leqslant \eta < 1$

$$L_\varepsilon(V) - L_\varepsilon(w) = (\nu w^2 + \varepsilon) y_{\eta\eta} + A y_\eta > 0.$$

Далее, мы предполагали, что $w(0) > 0$; кроме того, V и U_x положительны, поэтому знаки $y_\eta(0)$ и $y(0)$ совпадают. Пусть $y(\eta_*) = \max_\eta y(\eta) > 0$. Если $0 < \eta < 1$, то $y_\eta(\eta_*) = 0$, откуда $y_{\eta\eta}(\eta_*) > 0$. Если $\eta_* = 0$, то $y_\eta(0) > 0$. В обоих случаях получаем противоречие.

Замена граничных условий.

Мы получили априорную нижнюю оценку в предположении, что $w(0) > 0$. Поэтому нужно доказать существование именно такого решения. Рассмотрим то же дифференциальное уравнение, но с модифицированным граничным условием в нуле, и покажем, что решение в нуле будет положительным и совпадает с решением исходной системы. Существование решения мы будем доказывать для уравнения с модифицированным граничным условием.

Пусть $\psi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, — бесконечно дифференцируемая функция, $\psi(u) = u$ при $u \geqslant M_9$, $\psi(u) = \frac{M_9}{2}$ при $u \leqslant \frac{M_9}{4}$, $0 \leqslant \psi'(u) \leqslant 1$ при $\frac{M_9}{4} \leqslant u \leqslant M_9$. Рассмотрим уравнение (18) с граничным условием

$$w(1) = 0,\ \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{\psi(|w|)}\right)\Bigg|_{\eta=0} = 0. \tag{20}$$

Пусть $\tilde{w}$ — произвольное решение (18), (20), такое что $\tilde{w}(0) \geqslant 0$ (тогда модуль можно убрать). Покажем, что $\tilde{w} \geqslant V$. Пусть $\tilde{y} = V - \tilde{w}$. Имеем

$$\left(\nu V_\eta + \frac{U_x}{\psi(V)}\right)\Bigg|_{\eta=0} = -\nu M_9 + \frac{U_x}{M_9} \overset{(19)}{>} 0.$$

Так как
$$\left(\nu V_\eta + \frac{U_x}{\psi(V)}\right) - \left(\nu w_\eta + \frac{U_x}{\psi(w)}\right) = \nu\tilde{y}_\eta - \frac{U_x\psi'(\chi)\tilde{y}}{\psi(V)\psi(\tilde{w})}$$
для некоторого $\chi \in \mathbb{R}$, то
$$\left.\left(\nu\tilde{y}_\eta - \frac{U_x\psi'(\chi)\tilde{y}}{\psi(V)\psi(\tilde{w})}\right)\right|_{\eta=0} > 0;$$
кроме того,
$$(\nu w^2 + \varepsilon)\tilde{y}_{\eta\eta} + A\tilde{y}_\eta > 0$$
при $\eta < 1$. Из определения функции ψ следует, что $\frac{U_x\psi'(\chi)}{\psi(V)\psi(\tilde{w})} \geqslant 0$. Так же, как для y, получаем, что $\tilde{y} \leqslant 0$.

Таким образом, $\tilde{w} \geqslant V$. В частности, $\tilde{w}(0) \geqslant V(0) \geqslant M_9$, так что $\psi(\tilde{w}(0)) = \tilde{w}(0)$ и $\tilde{w}$ удовлетворяет граничному условию (16).

Доказательство существования решения.

Решение (18), (20), такое, что $w(0) \geqslant 0$, является неподвижной точкой оператора, сопоставляющего функции θ решение линейного уравнения
$$(\nu\theta^2 + \varepsilon)w_{\eta\eta} + Aw_\eta = 0$$
с граничными условиями
$$w(1) = 0, \ \left.\left(\nu w_\eta + U_x\left[\varphi(|\theta|)w + \frac{1}{\psi(0)}\right]\right)\right|_{\eta=0} = 0,$$
где
$$\varphi(u) = -\int_0^1 \frac{\psi'(su)}{\psi^2(su)}\,ds \leqslant 0.$$
Заметим, что, при $u > 0$
$$u\varphi(u) = \frac{1}{\psi(u)} - \frac{1}{\psi(0)}.$$
Применяя принцип Лере–Шаудера, докажем существование неподвижной точки этого оператора. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра $\gamma \in [0,\,1]$,
$$(\nu\gamma w^2 + \varepsilon)w_{\eta\eta} + Aw_\eta = 0 \tag{21}$$
и граничные условия
$$w(1) = 0, \ \left.\left(\nu w_\eta + U_x\left[\varphi(\gamma|w|)w + \frac{1}{\psi(0)}\right]\right)\right|_{\eta=0} = 0. \tag{22}$$
При $\gamma = 1$ система (21), (22) совпадает с (18), (20) на множестве функций w таких, что $w(0) \geqslant 0$.

Рассмотрим оператор $T(\theta,\,\gamma)$, который функции $\theta \in C^2[0,\,1]$ сопоставляет функцию $w \in C^2[0,\,1]$, являющуюся решением уравнения
$$(\nu\gamma\theta^2 + \varepsilon)w_{\eta\eta} + Aw_\eta = 0 \tag{23}$$
с граничными условиями
$$w(1) = 0, \ \left.\left(\nu w_\eta + U_x\left[\varphi(\gamma|\theta|)w + \frac{1}{\psi(0)}\right]\right)\right|_{\eta=0} = 0. \tag{24}$$
Нужно показать, что

1. оператор $T(\theta,\,\gamma)$ корректно определен, т.е. что решение (23), (24) существует и единственно;

2. оператор $T(\cdot,\,\cdot)$ вполне непрерывен, т.е. непрерывен и компактен;

3. множество решений $T(w,\,\gamma)=w$ равномерно ограничено по γ;

4. отображение $I-T(\cdot,\,0)$ гомотопно тождественному на шаре достаточно большого радиуса.

Тогда в силу теоремы Лере – Шаудера оператор $T(\cdot,\,1)$ имеет неподвижную точку в пространстве $C^2[0,\,1]$. Кроме того, будет показано, что решение (21), (22) будет положительно при $\eta=0$ и поэтому при $\gamma=1$ будет совпадать с решением (18), (20).

Сначала докажем, что решение (23), (24) существует и единственно. Так как уравнение линейно, все его коэффициенты непрерывны и коэффициент при старшей производной положителен, то решение (23) существует и единственно при любых начальных условиях $w(1)$, $w'(1)$. Граничные условия (24) также линейны, поэтому достаточно доказать единственность. (В самом деле, рассмотрим линейный оператор из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, сопоставляющий числу c значение $\nu w_\eta(0)+U_x\varphi(\gamma|\theta(0)|)w(0)$, где w — решение уравнения с начальными условиями $w(1)=0$, $w'(1)=c$. Если решение краевой задачи единственно, то этот оператор имеет нулевое ядро и поэтому сюръективен.) Обозначим $g=w_\eta$. Тогда если $w\neq 0$, то $g\neq 0$ (т.к. $w(1)=0$). Функция g удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma\theta^2+\varepsilon)g_\eta+Ag=0,$$

и если $g\neq 0$, то по теореме существования и единственности для любого $\eta\in[0,\,1)$ значение $g_\eta(\eta)\neq 0$. Отсюда следует, что функция w не имеет локальных экстремумов на $(0,\,1)$. Пусть 0 — положительный максимум функции w. Если $\varphi(\gamma|\theta(0)|)>0$, то $w_\eta(0)>0$ — противоречие. Если $\varphi(\gamma|\theta(0)|)=0$, $g(0)=0$, т.е. $g\equiv 0$.

Докажем равномерную ограниченность множества решений (21), (22) в метрике $C^2[0,\,1]$. Начнем с оценок $|w|$.

Сначала оценим w снизу. Пусть $V_0=M_{10}(1-\eta)$. Тогда

$$\left(\nu V_{0\eta}+U_x\left[\varphi(\gamma|w|)V_0+\frac{1}{\psi(0)}\right]\right)\bigg|_{\eta=0}=\left(-\nu M_{10}+U_x\left[M_{10}\varphi(\gamma|w|)+\frac{2}{M_9}\right]\right)\bigg|_{\eta=0}>0,$$

если M_{10} достаточно мало. При этом, M_{10} можно взять не зависящим от γ, ε. Поэтому для $y=V_0-w$ выполнены неравенства

$$(\nu y_\eta+U_x\varphi(\gamma|w|)y)|_{\eta=0}>0,\quad (\nu\gamma w^2+\varepsilon)y_{\eta\eta}+Ay_\eta>0.$$

Отсюда и из принципа максимума следует, что $y\leqslant 0$. Значит, $w(\eta)\geqslant M_{10}(1-\eta)$ и, в частности, $w(0)>0$.

Теперь оценим w сверху. Определим $\overline{w}$ равенством

$$w=(M_{11}-e^{\beta\eta})\overline{w},$$

где M_{11}, β — достаточно большие положительные константы. Подставив это представление функции w в (21), (22), получаем, что $\overline{w}$ удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma w^2+\varepsilon)\overline{w}_{\eta\eta}+\overline{A}\overline{w}_\eta+\overline{B}\overline{w}=0,$$

где

$$\overline{B}=\frac{-\beta^2(\nu\gamma w^2+\varepsilon)-2A\beta}{M_{11}-e^{\beta\eta}}e^{\beta\eta}<0$$

при достаточно больших β и $M_{11} = 2e^{\beta}$, и граничным условиям

$$\overline{w}(1) = 0, \ (\nu\overline{w}_\eta + \overline{C}\overline{w} + \overline{C}_1)|_{\eta=0} = 0,$$

где

$$\overline{C} = U_x\varphi(\gamma w) - \frac{\nu\beta}{M_{11}e^{-\beta\eta} - 1} < 0$$

при больших β, $\overline{C}_1 = \frac{U_x}{\psi(0)(M_{11} - e^{\beta\eta})} \leqslant \frac{U_x}{\psi(0)}$. Отсюда следует, что функция $\overline{w}$ не может иметь положительного максимума при $\eta > 0$. Если 0 — точка максимума функции $\overline{w}$, то $\overline{w}_\eta(0) \leqslant 0$, откуда $\overline{C}\overline{w} \geqslant -\overline{C}_1$, т.е. $\overline{w} \leqslant \frac{\overline{C}_1}{-\overline{C}}$.

Докажем равномерную ограниченность функции $g := w_\eta$. Из (21) и (22) следует, что функция g удовлетворяет уравнению

$$(\nu\gamma w^2 + \varepsilon)g_\eta + Ag = 0$$

с граничными условиями

$$\left(\nu g + U_x\left[\varphi(\gamma w)w + \frac{1}{\psi(0)}\right]\right)\bigg|_{\eta=0} = 0.$$

Так как функция w равномерно ограничена, то из уравнений и граничных условий следует равномерная ограниченность g.

Равномерная ограниченность $w_{\eta\eta}$ сразу следует из дифференциального уравнения и уже полученных оценок на w, w_η.

Теперь докажем компактность $T(\cdot, \cdot)$. Достаточно показать, что если множество функций θ ограничено в $C^2[0, 1]$, то множество решений ограничено в $C^3[0, 1]$ равномерно по γ; тогда оно будет предкомпактно в пространстве $C^2[0, 1]$ по теореме Арцела – Асколи. Проверим, что решения будут равномерно ограничены вместе со своими производными до третьего порядка. Равномерная ограниченность производных до второго порядка доказывается так же, как равномерная ограниченность множества решений (21), (22). Если продифференцировать уравнения (23) по η и из получившегося тождества выразить $w_{\eta\eta\eta}$, то получится равномерная оценка для третьей производной.

Непрерывность $T(\cdot, \cdot)$ следует из уравнений и граничных условий, которым удовлетворяет разность решений (23), (24), соответствующих различным θ, γ, и из оценок этих решений и их производных.

Тем самым показано, что $I - T(\cdot, 1)$ и $I - T(\cdot, 0)$ вполне непрерывны и гомотопны на шаре достаточно большого радиуса. Проверим, что $I - T(\cdot, 0)$ гомотопно I на шаре большого радиуса. В самом деле, $T(\theta, 0) = w_*$ не зависит от θ, так как коэффициенты уравнения (23) и граничные условия (24) не зависят от θ. Решение уравнения $w = \lambda w_*$ принадлежит шару радиуса $\|w_*\|_{C^2[0,1]}$ для любого $\lambda \in [0, 1]$, так что поля $I - T(\cdot, 0)$ и I гомотопны на шаре радиуса, большего $\|w_*\|_{C^2[0,1]}$. Значит, поля $I - T(\cdot, 1)$ и I также гомотопны на шаре достаточно большого радиуса и поэтому $I - T(\cdot, 1)$ имеет неподвижную точку.

Существование решения полностью доказано.

Верхняя оценка (18), (16).

Покажем, что $w \leqslant V_1 := M_{12}(1 - \eta)\sigma$, где

$$\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1 - \eta)}, \tag{25}$$

M_{12}, $\mu > 0$ не зависят от ε. В качестве μ можно взять любое число из интервала $(0, 1)$ такое, что $\sigma > 1$ для всех $0 \leqslant \eta < 1$. Неравенство доказывается тем же методом, каким были получены остальные априорные оценки. Так как

$$[(1 - \eta)\sigma]' = -\sigma + \frac{1}{2\sigma}, \quad [(1 - \eta)\sigma]'' = -\frac{1}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1 - \eta)},$$

то

$$L_\varepsilon(V_1) = \varepsilon M_{12}\left(-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)}\right) +$$

$$+\nu M_{12}^2(1-\eta)^2\sigma^2\left(-\frac{M_{12}}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{M_{12}}{4(1-\eta)\sigma^3}\right) - M_{12}(1-\eta)(1+\eta)U_x\left[-\sigma + \frac{1}{2\sigma}\right] < 0$$

для любого $\eta \in [0,\, 1)$, если M_{12} достаточно велико (при этом, M_{12} можно выбрать не зависящим от ε). Далее,

$$\lambda_\varepsilon(V_1) = \left(\nu M_{12}\left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma}\right) + \frac{U_x}{M_{12}\sigma}\right)\Bigg|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно больших M_{12} (так как $\sigma > 1$).

Положим $s = V_1 - w$. Тогда для любого $\eta \in [0,\, 1)$

$$(\nu w^2 + \varepsilon)s_{\eta\eta} + As_\eta + V_{1\eta\eta}\nu(w + V_1)s = L_\varepsilon(V_1) < 0,$$

$$\left(\nu s_\eta - \frac{U_x s}{wV_1}\right)\Bigg|_{\eta=0} < 0.$$

Так как $V_{1\eta\eta} < 0$ при $\eta < 1$, то отсюда с помощью принципа максимума доказывается, что $s \leqslant 0$, т.е. $w \leqslant V_1$.

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим систему (18) с граничными условиями (16). Из полученных оценок сверху и снизу следует, что для любого $\delta > 0$ функции w_η и $w_{\eta\eta}$ равномерно ограничены по ε на $[0,\, 1-\delta]$. Дифференцируя (18) по η, получаем равномерную ограниченность всех производных на $[0,\, 1-\delta]$. Значит, множество функций $\{w(\varepsilon)\}$ предкомпактно в $C^m[0,\, 1-\delta]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого $\delta > 0$. Применяя канторовский диагональный процесс, выбираем последовательность $w(\varepsilon_i)$, сходящуюся в $C^m[0,\, 1-\delta]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Предельная функция будет бесконечно дифференцируемой на $[0,\, 1)$ и удовлетворять оценкам (17), уравнению (15) и граничным условиями (16). □

Всюду далее σ определяем формулой (25).

Лемма 2. *Для решения задачи справедливы оценки*

$$w(\eta) \geqslant M_{13}(1-\eta)\sigma. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $\Phi = M_{13}(1-\eta)\sigma$. Тогда

$$L(\Phi) \equiv \nu\Phi^2\Phi_{\eta\eta} + A\Phi_\eta = M_{13}(1-\eta)\sigma\left[-\frac{\nu M_{13}^2}{2} - \frac{\nu M_{13}^2}{4\sigma^2} - (1+\eta)U_x\left(-1 + \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right] > 0,$$

$$\lambda(\Phi) \equiv \left(\nu\Phi_\eta + \frac{U_x}{\Phi}\right)\Bigg|_{\eta=0} = \left(\nu M_{13}\left(-\sigma + \frac{1}{2\sigma}\right) + \frac{U_x}{M_{13}\sigma}\right)\Bigg|_{\eta=0} > 0$$

при достаточно малом M_{13}.

Пусть $s = \Phi - w$. Тогда

$$\nu w^2 s_{\eta\eta} + As_\eta + \Phi_{\eta\eta}\nu(w + \Phi)s > 0,$$

$$\left(\nu s_\eta - \frac{U_x}{w\Phi}s\right)\Bigg|_{\eta=0} > 0,$$

поэтому в силу принципа максимума $s \leqslant 0$, т.е. $w(\eta) \geqslant \Phi(\eta)$. □

5 Схема доказательства теоремы существования в общем случае.

Если бы в уравнении (11) не было слагаемого с w_ξ, то это было бы обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому естественно провести доказательство теоремы по следующей схеме: заменить w_ξ разностным соотношением и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, доказать теорему существования для нее и затем с помощью предельного перехода доказать существование решения исходного уравнения. Этот метод называется методом прямых.

Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $h \in (0, X)$, $m = \left[\frac{X}{h}\right]$. Для каждой функции $f(\xi, \eta)$ обозначим $f^k = f^k(\eta) = f(kh, \eta)$, $k = \overline{0, m}$. Заменим уравнение (11) с граничными условиями (12) системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - (\eta U^k + \mu_k h)\frac{w^k - w^{k-1}}{h} + A^k w^k_\eta + B^k w^k = 0,\ 0 \leqslant \eta < 1,\ k = \overline{0, m} \quad (27)$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0,\ (\nu w^k w^k_\eta - v^k_0 w^k + C^k)|_{\eta=0} = 0. \quad (28)$$

Здесь $\mu_0 = 0$, а при $k \geqslant 1$ в качестве μ_k берется достаточно большая положительная постоянная, которая выбирается позже. Заметим, что при $k = 0$ коэффициент при $\frac{w^k - w^{k-1}}{h}$ равен нулю, т.е. w^0 является решением уравнения

$$\nu(w^0)^2 w^0_{\eta\eta} + A^0 w^0_\eta = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О.А. Олейник, “Математические задачи теории пограничного слоя”, *УМН*, **23**:3 (1968), стр. 3–65.